ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 53.

DER GANZEN REIHE 353. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT VIER FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1917.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

530.5
An 7
ser. A
v. 53
WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 53.

Neuntes Heft.

		Seite
1.	Gerda Laski. Größenbestimmung submikroskopischer Partikel aus optischen und mechanischen Effekten	1
2.	L. Vegard. Magnetische Momente im Atombau	27
3.	H. Seeliger. Bemerkung zu P. Gerbers Aufsatz: „Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation“	31
4.	Paul S. Epstein. Zur Theorie der Beugung an metallischen Schirmen	33
5.	R. Schachenmeier. Zur Theorie der Beugung an metallischen Schirmen. Erwiderung auf die gleichnamige Veröffentlichung von P. Epstein	43
6.	Max B. Weinstein. Das Nernstsche Theorem und die Wärmeausdehnung fester Stoffe. (Zweite Mitteilung.)	47
7.	P. Cermak. Über die Töne von Pfeifen mit Querschnittsänderungen	49
8.	Paul S. Epstein. Bemerkung über das Nernstsche Wärmetheorem	76
9.	R. Schachenmeier. Über ein stabiles Kristallgitter . . .	79

Ausgegeben am 2. Oktober 1917.

Zehntes Heft.

1.	G. Borelius und A. E. Lindh. Widerstand, Peltierwärme und elektrische Nachwirkung außerhalb und in einem Magnetfelde, besonders in kristallinischem Wismut	97
2.	W. Buchheim und H. Dember. Luftelektrische Messungen auf Teneriffa	138

Seite

3. Hermann Rothe. Über eine einfache Berechnung und geometrische Deutung der gastheoretischen Funktionaldeterminante 151
4. S. Oppenheim. Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation 168
5. C. Bergholm. Elektrische Doppelbrechung in binären Flüssigkeitsgemischen 169

Ausgegeben am 26. Oktober 1917.

Elftes Heft.

1. Reinhold Fürth. Einige Untersuchungen über Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen 177
2. M. von Laue. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung von P. Gerber 214
3. Max Toepler. Über den inneren Aufbau von Gleitbüscheln und die Gesetze ihrer Leuchtfäden. (Hierzu Tafel I und II) . 217
4. H. Dember und M. Uibe. Drei optisch-meteorologische Beobachtungen 235
5. G. Borelius. Bemerkung zu einer Arbeit von Adolf Böhi über ein Verfahren zur Messung der absoluten Potentialdifferenzen, welche beim Kontakt beliebiger Leiter auftreten . . 239
6. Max Planck. Zur Theorie des Rotationsspektrums. (Zweite Mitteilung.) 241

Ausgegeben am 27. November 1917.

Zwölftes Heft.

1. A. Rubinowicz. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen 257
2. Minna Lang. Untersuchungen über die Absorption harter Röntgenstrahlen in Gasen. (Hierzu Tafel III) 279
3. H. Kohn. Die Lichtstärke des schwarzen Körpers in Hefnerkerzen und die Strahlungskonstanten der Glühlampenkohle . 320

Ausgegeben am 14. Dezember 1917.

Dreizehntes Heft.

Seite
1. Minna Lang. Untersuchungen über die Absorption harter Röntgenstrahlen in Gasen (Fortsetzung) 337
2. Erich Rumpf. Über Ionisationsmessungen im Geisslerrohr . 373

Ausgegeben am 28. Dezember 1917.

Vierzehntes Heft.

1. Robert Jaeger. Die Dielektrizitätskonstante fester Körper bei verschiedenen Wellenlängen 409
2. H. Seemann. Zur Optik der Reflexion der Röntgenstrahlen an Kristallstrukturflächen. II. (Hierzu Tafel IV) 461
3. Paul Neubert. Bemerkung über die geschichtete positive Glimmentladung 492

Ausgegeben am 15. Januar 1918.

Fünfzehntes Heft.

1. A. Sommerfeld. Die Drudesche Dispersionstheorie vom Standpunkte des Bohrschen Modelles und die Konstitution von H_2, O_2 und N_2 497
2. Irene Parankiewicz. Der kritische Weg zur Feststellung der Existenz einer Atomistik der Elektrizität. (Erörtert an Ölkügelchen) 551
3. L. Vegard. Antwort an Herrn J. Stark 569
4. Th. Wereide. Das Magneton als Funktion der Planckschen Konstante 574

Ausgegeben am 24. Januar 1918.

Sechzehntes Heft.

1. Erich Kretschmann. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie 575
2. G. Borelius. Über die thermoelektrischen Erscheinungen als Mittel zur Analyse der metallischen Mischkristalle und über den Ursprung der Thermoelektrizität 615
3. V. Posejpal. Über die Abhängigkeit der Refraktion der Gase vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre. I 629

Ausgegeben am 1. Februar 1918.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I u. II. M. Toepler.
„ III. M. Lang.
„ IV. H. Seemann.

1917. № 9.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Größenbestimmung submikroskopischer Partikel aus optischen und mechanischen Effekten*[1]; *von Gerda Laski.*

§ 1. Zweck der Untersuchung.

Zur präzisen Prüfung physikalischer Theorien, welche molekulare Verhältnisse klarzulegen versuchen, ist es erforderlich, Raumgrößen, Kräfte und Energien in solch kleinen, noch beobachtbaren Bereichen exakter Messung zu unterwerfen, die den molekularen Dimensionen möglichst naheliegen.

Die Ehrenhaftsche Untersuchungsmethode eröffnete den Weg, an *einzelnen* submikroskopischen Partikeln (Radius unter 10^{-5} cm) Vorgänge mechanischer, molekularkinetischer, elektrostatischer und optischer Natur messend zu verfolgen. Je tiefer wir dabei die Grenzen der Beobachtung und Messung zu verlegen vermögen, um so klarer wird unsere Erkenntnis im Grenzgebiete dessen, was man das Makroskopische und Mikroskopische nennen kann.

Eine wesentliche Rolle spielt dabei die Herstellung stabiler Partikel, welche bei möglichster Kleinheit noch möglichst gut sichtbar sind. Als solche fand Ehrenhaft Partikel aus Edelmetallen, die durch Zerstäubung im elektrischen Lichtbogen in reinem, inertem Gase hergestellt werden. Für die *quantitative* Festlegung aller weiteren physikalischen Bestimmungen ist die möglichst exakte Messung der *Größe* der bei solchen Untersuchungen verwendeten Körper, welche auf direktem Wege mikroskopisch nicht mehr bestimmt werden kann, grundlegendes Erfordernis.

Dazu wurden zwei Wege eingeschlagen. Der erste führte zur Ermittlung des Radius kleiner Kugeln aus ihrer mittleren Fallgeschwindigkeit durch das Stokes-Cunninghamsche *Widerstandsgesetz*; der zweite wies auf die Berechnung der

1) Auszugsweise mitgeteilt aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften **126.** (IIa). 1917.

Größe aus den Abweichungen der einzelnen Fallzeiten von ihrem Mittelwerte auf Grund der Einstein-Smoluchowskischen Theorie der Brownschen *Bewegung*.

Die Ergebnisse beider Berechnungsarten an ein und demselben Teilchen weichen bekanntlich voneinander um Beträge ab, welche die möglichen Fehlergrenzen weit überschreiten. Bei Metallen ergibt z. B. die Theorie der Brownschen Bewegung durchwegs größere Radien als das Widerstandsgesetz.

Ein *dritter*, von den beiden erwähnten Verfahren unabhängiger Weg ist geeignet, Klärung zu bringen. Im Gase suspendierte Metallpartikel, deren Durchmesser Bruchteile der Wellenlänge des Lichtes betragen, zeigen in Dunkelfeldbeleuchtung Farbenphänomene, die als „selektive Absorption" oder „optische Resonanz" gedeutet wurden. Auf dieser Erscheinung fußend, läßt sich, wie im folgenden näher ausgeführt wird, auf Grund der elektromagnetischen Feldgleichungen unter Verwendung der optischen Konstanten des kompakten Materials, aus dem die Partikel erzeugt werden, ein Zusammenhang zwischen der Wellenlänge des seitlich abgebeugten, also im Dunkelfelde zur Beobachtung gelangenden Lichtes und dem Radius des beugenden Objektes entwickeln. So kann man aus der beobachteten Farbe eines einzelnen submikroskopischen Metallpartikels seine Größe erschließen.

Diesen optischen Weg betrat F. Ehrenhaft[1]) im Jahre 1914 an Goldpartikeln. Er verglich den aus der Farbe erschlossenen Radius einzelner Goldkugeln mit den nach den beiden Methoden berechneten. Der Radius aus der Farbe fällt in das durch die Grenzen der Widerstandsgesetze festgelegte Intervall, während die Theorie der Brownschen Bewegung zu große Werte ergibt. Ebenso liegen die Verhältnisse bei Quecksilberpartikeln.

Durch diese Übereinstimmung der Ergebnisse zweier voneinander unabhängiger Methoden (Widerstandsgesetz und Optischer Weg) ist nicht nur der *Radius* der betrachteten Teilchen in engen Grenzen festgelegt, sondern es ist auch eine weitere Stütze für die Stichhaltigkeit der Voraussetzungen über *Kugelgestalt* und *Dichte der Einzelpartikel*, die den Berechnungen zugrunde liegen, gegeben.

1) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 15. p. 592. 1914; 16. p. 227. 1915.

Die vorliegende Arbeit hat es sich nun zur Aufgabe gemacht, in dieser Hinsicht noch weiter zu gehen und die Feststellung von Größe und Gestalt kleinster Partikel bis an die Grenzen des derzeit Erreichbaren durchzuführen. Dazu wurde ein Material gewählt, welches sich vermöge seiner optischen Eigenschaften zu diesem Vorhaben besonders eignet: das Silber.

Submikroskopische Silberpartikel mit ihrem starken Reflexionsvermögen sind in Dunkelfeldbeleuchtung besser beobachtbar als jedes andere in dieser Größe bisher untersuchte Material. Sie zeigen im abgebeugten Lichte besonders auffallende Farbenphänomene, die die Reihe der Spektralfarben durchlaufen. Die lebhaften Farbenunterschiede, welche Partikel sehr benachbarter Größenordnung scharf zu trennen gestatten, können überdies als Wegweiser für Auswahl und Messung so kleiner Teilchen dienen, an denen die Methode, eine Serie von Fallzeiten des Einzelpartikels zu messen, versagt.

So ermöglicht also einerseits die Anwendung der optischen Theorie eine Entscheidung über die Zuverlässigkeit der bisher üblichen Methoden der Größenbestimmungen submikroskopischer Partikel, indem der Vergleich des auf drei voneinander unabhängigen Wegen, dem optischen, mechanischen und molekularkinetischen, berechneten Radius durchgeführt wird. Sie bildet ferner die Grundlage für Untersuchungsmethoden *kleinster Partikel*, die bisher der exakten Messung unzugänglich war. Auf die Ausarbeitung einer solchen Methode wird in dieser Studie hauptsächlich Gewicht gelegt.

Andererseits ist durch den hier durchgeführten Vergleich der Methoden zur Berechnung des Radius eine Prüfung der optischen Theorie durch die Erfahrung auf einem Wege gegeben, der von allen bisher zu diesem Zwecke angestellten Untersuchungen abweicht und *allein* den Voraussetzungen der Theorie gerecht wird.

Denn die Theorie der Beugungserscheinungen an submikroskopischen Objekten gilt exakt nur für optische Phänomene am *Einzelteilchen* und in verdünnten Lösungen mit genau *gleich großen* eingebetteten Teilchen. Diese letzte Bedingung erfüllen die praktisch herstellbaren Suspensionen niemals. Wohl hat man sich auf verschiedene Weise dieser Bedingung der Theorie einigermaßen zu nähern gesucht, indem

In der Diskussion[1]) klärte sich die Sachlage dahin, daß auch Ehrenhaft[2]) zur eingehenden Klärung des Problems die Einführung der optischen Konstanten des massiven Metalles verlangte.

Die allgemeine Theorie, die schließlich auch diesem Umstande gerecht wurde, entwickelte G. Mie[3]) in seinen „Beiträgen zur Optik trüber Medien". Er löste das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an kleinen, mit der Wellenlänge vergleichbaren Kugeln beliebigen Materiales, das durch seine optischen Konstanten, welche durch rein *optische* Messungen am kompakten Material gewonnen werden, definiert ist.

Diese Lösung umfaßt als Grenzfälle sowohl einerseits das Dielektrikum (Rayleigh) als auch andererseits die vollkommen leitende Kugel (J. J. Thomson).

Das allgemeine Integral der für das Potential kleiner freier Schwingungen charakteristischen Differentialgleichung[4]) erscheint für den Fall der Kugel, die von einer Planwelle getroffen wird, als Summe von Gliedern, deren jedes das Produkt einer Zylinderfunktion der Variablen

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

(r = radiale Koordinate, λ = Wellenlänge) in eine Kugelfunktion der beiden anderen Polarkoordinaten ϑ und φ ist. Alle diese Partikularintegrale werden nun in zwei Gruppen gesondert, deren eine die möglichen elektrischen Schwingungen, deren andere die magnetischen Schwingungen der Kugel darstellt. Dabei bezeichnet das νte Glied des allgemeinen Integrals die νte Partialschwingung. Durch Einführung der Grenzbedingungen ergibt sich dann die Berechnung der Koeffizienten.

1) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 5. p. 387. 1904. — F. Pockels, Physik. Zeitschr. 5. p. 460. 1904.

2) F. Ehrenhaft, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 114. (IIa). p. 1140. 1905.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

4) G. Mie stellt nur die Gleichung der radialen Komponenten des Feldes auf. P. Debye stellt in einer Arbeit über den Strahlungsdruck an kleinen Kugeln beliebigen Materiales (Ann. d. Phys. 30. p. 57. 1909), indem er die Potentialgleichung zum Ausgangspunkt seiner Entwicklungen nimmt, die Lösung als Produkt dreier Funktionen je einer Koordinate etwas übersichtlicher dar.

sowie ihre numerische Abschätzung und physikalische Deutung. Die Folge dieser Koeffizienten ist konvergent, so daß also immer nur eine endliche Anzahl von Partialwellen berechnet werden muß. Dabei geht die $(\nu+1)$te elektrische Partialschwingung der Größenordnung ihrer Intensität nach stets ungefähr parallel der νten magnetischen Schwingung.[1])

Solche Entwicklungen gestatten demgemäß die Berechnung des elektromagnetischen Feldes im Innen- und Außenraum der Kugel; sie werden also den Absorptionserscheinungen, der Berechnung der diffusen seitlichen Ausstrahlung, der Polarisation dieser Strahlung gerecht.

Dabei ergibt sich für das seitlich abgebeugte Licht jeder Farbe ein Maximum der Ausstrahlung bei bestimmtem Teilchenradius. Diese „optische Resonanz" ist selbstverständlich nicht allein durch näherungsweises Zusammenfallen der Eigenschwingung des Teilchens mit der Periode der einfallenden Strahlung verursacht, sondern durch die Absorption und Reflexion, die von der materiellen Beschaffenheit des Teilchens abhängen, mitbedingt.

R. Gans[2]) erweitert die Berechnungen in näherungsweiser Entwicklung für jenen Fall, der außer der Kugel praktisch noch in Betracht kommt, das Ellipsoid (stäbchen- und scheibchenförmige Teilchen). Gans und Happel[3]) berechnen Absorption und Dispersion des Lichtes in kolloidalen Metalllösungen mit kugelförmigen Teilchen auch unter Berücksichtigung stärker konzentrierter Kolloide. A. Lampa[4]) untersucht schließlich die Veränderung, die eine durchziehende elektromagnetische Welle im Kolloid erfährt, und gelangt so von anderem Ausgangspunkte zu dem gleichen Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten einer Lösung, in der Kugeln eingebettet sind, wie Mie und Gans u. Happel ihn angaben.

Aus diesen Theorien ergeben sich die leitenden Gesichtspunkte für die Untersuchung der optischen Phänomene an

---

1) Der Grenzfall vollkommener Leiter bildet hier eine Ausnahme, vgl. G. Mie, l. c.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. p. 881. 1912; Physik. Zeitschr. **13**. p. 1185. 1912.

3) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**. p. 277. 1909.

4) A. Lampa, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **118**. (IIa). p. 867. 1909.

man, um die Gleichheit der suspendierten Teilchen zu erreichen, fraktionierendes Zenirifugieren[1]) oder Ultrafiltration[2]) von Lösungen anwandte; doch können solche Verfahren niemals einwandfrei durchgeführt werden. Die vorhandenen Untersuchungen beurteilen daher nur *einen Gesamteffekt, der durch die Ausstrahlung sehr vieler, nicht gleich großer Teilchen bewirkt wird*, und vermochten daher alle nur mehr oder weniger qualitative Aussagen über die Gültigkeit der optischen Theorien zu machen. Zudem beschränken sie sich durchwegs auf *rein optische Beobachtungen* und ziehen aus diesen *allein* ihre *Schlüsse*: *Vergleiche mit Beziehungen, die anderen Bereichen der Physik entstammen, fehlten bisher.*

Eine Vermeidung dieser Unvollkommenheit brachte erst der Übergang zur Untersuchung des stabilen Einzelpartikels, das in inertem Gase suspendiert ist.

§ 2. Über die Beugung des Lichtes an kleinen Kugeln.

Im Hinblick auf die folgenden optischen Berechnungen und Beobachtungen sei in kurzer Übersicht die Theorie der Beugung (Zerstreuung) des Lichtes an mikroskopischen und submikroskopischen Partikeln in ihrer historischen Entwicklung betrachtet.

Bekanntlich treten beim Durchgang eines Lichtstrahles durch ein durchsichtiges Medium, in dem Teilchen von mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbaren Dimensionen eingebettet sind (trübes Medium), Farbenphänomene und Polarisationserscheinungen des zerstreuten Lichtes auf (Himmelslicht, Regenbogen, Suspensionen, kolloidale Metallösungen). In allen Fällen handelt es sich um *Beugungsphänomene*, bei denen die individuelle Größe der eingelagerten Partikel als beugende Objekte eine maßgebende Rolle spielt.

Schon Faraday[3]) vertrat die Ansicht, daß die Färbung des von kolloidalen Goldlösungen reflektierten Lichtes in gesetzmäßiger Beziehung zur Größe der in der Lösung befindlichen Teilchen stehen müsse.

---

1) A. Lampa, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **119.** (IIa). p. 1565. 1910. — H. Robitschek, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **120.** (IIa). p. 1197. 1912.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **47.** p. 270. 1915.

3) M. Faraday, Phil. Mag. (4) **14.** p. 401 u. 512. 1857.

Den Weg zur exakten Behandlung der Frage wies Lord Rayleigh[1]), der, den klassischen Boden der Kirchhoffschen Beugungstheorie verlassend, in angenäherter Betrachtungsweise, gestützt auf die elastische Lichttheorie von Stokes, später auf Grund der Maxwellschen Gleichungen zunächst die Beugung des Lichtes an kleinen dielektrischen Kugeln behandelte (Erklärung des Himmelslichtes).

Den nächsten Schritt zur Verallgemeinerung dieses Beugungsproblems tat J. J. Thomson[2]), der den Grenzfall einer kleinen Kugel von *vollkommener Leitfähigkeit* im Sinne der Maxwellschen Theorie erörtert. Durch Einführung der strengen Randbedingungen in die elektromagnetischen Feldgleichungen berechnete er die Eigenschwingungen einer solchen Kugel und die Polarisation des an ihr abgebeugten Lichtes.

F. Ehrenhaft[3]) betrachtete als angenäherte Realisierung des Thomsonschen Grenzfalles vollkommener Leitfähigkeit die Metalle in kolloidaler Lösung. Er erkannte einen Zusammenhang zwischen Farbe und Radius der Teilchen und faßte das Farbenphänomen[4]) als eine Folge „optischer Resonanz" auf. Wenn die Oszillationsperiode der einfallenden Strahlung mit der Eigenschwingung des eingebetteten Kügelchens übereinstimmt, wird nach Ehrenhaft das Maximum der Absorption des Lichtes in der Kugel in erster Näherung durch Resonanz bedingt. Aus den experimentell gemessenen breiten Absorptionsmaximis kolloidaler Metallösungen schloß er auf die mittleren Radien der suspendierten Teilchen.

F. Pockels[5]) rollte die weitere Frage auf, ob Berechtigung vorhanden ist, die Metalle im Sinne der Thomsonschen Theorie als vollkommene Leiter zu behandeln.

---

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (4) **41**. p. 107 u. 447. 1871; (5) **12**. p. 81. 1881.

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. p. 363 u. 437. 1893.

3) F. Ehrenhaft, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **112**.(IIa). p. 181. 1908; Ann. d. Phys. **11**. p. 489. 1903.

4) Maxwell Garnett jedoch schloß (Phil. Trans. [A] **203**. p. 385 1904; **205**. p. 237. 1906) auf die Konzentration als Ursache der Färbung kolloidaler Metallösungen, während F. Kirchner u. R. Szigmondy (Ann. d. Phys. **15**. p. 573. 1904) die von ihnen an eintrocknender Gelatine beobachteten Farbenumschläge auf Änderung des gegenseitigen Abstandes der Teilchen zurückzuführen versuchten.

5) F. Pockels, Physik. Zeitschr. **5**. p. 152. 1904.

In der Diskussion[1]) klärte sich die Sachlage dahin, daß auch Ehrenhaft[2]) zur eingehenden Klärung des Problems die Einführung der optischen Konstanten des massiven Metalles verlangte.

Die allgemeine Theorie, die schließlich auch diesem Umstande gerecht wurde, entwickelte G. Mie[3]) in seinen „Beiträgen zur Optik trüber Medien". Er löste das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an kleinen, mit der Wellenlänge vergleichbaren Kugeln beliebigen Materiales, das durch seine optischen Konstanten, welche durch rein *optische* Messungen am kompakten Material gewonnen werden, definiert ist.

Diese Lösung umfaßt als Grenzfälle sowohl einerseits das Dielektrikum (Rayleigh) als auch andererseits die vollkommen leitende Kugel (J. J. Thomson).

Das allgemeine Integral der für das Potential kleiner freier Schwingungen charakteristischen Differentialgleichung[4]) erscheint für den Fall der Kugel, die von einer Planwelle getroffen wird, als Summe von Gliedern, deren jedes das Produkt einer Zylinderfunktion der Variablen

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

(r = radiale Koordinate, λ = Wellenlänge) in eine Kugelfunktion der beiden anderen Polarkoordinaten ϑ und φ ist. Alle diese Partikularintegrale werden nun in zwei Gruppen gesondert, deren eine die möglichen elektrischen Schwingungen, deren andere die magnetischen Schwingungen der Kugel darstellt. Dabei bezeichnet das νte Glied des allgemeinen Integrals die νte Partialschwingung. Durch Einführung der Grenzbedingungen ergibt sich dann die Berechnung der Koeffizienten.

1) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. **5**. p. 387. 1904. — F. Pockels, Physik. Zeitschr. **5**. p. 460. 1904.

2) F. Ehrenhaft, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **114**. (IIa). p. 1140. 1905.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. p. 377. 1908.

4) G. Mie stellt nur die Gleichung der radialen Komponenten des Feldes auf. P. Debye stellt in einer Arbeit über den Strahlungsdruck an kleinen Kugeln beliebigen Materiales (Ann. d. Phys. **30**. p. 57. 1909), indem er die Potentialgleichung zum Ausgangspunkt seiner Entwicklungen nimmt, die Lösung als Produkt dreier Funktionen je einer Koordinate etwas übersichtlicher dar.

sowie ihre numerische Abschätzung und physikalische Deutung. Die Folge dieser Koeffizienten ist konvergent, so daß also immer nur eine endliche Anzahl von Partialwellen berechnet werden muß. Dabei geht die $(\nu+1)$te elektrische Partialschwingung der Größenordnung ihrer Intensität nach stets ungefähr parallel der νten magnetischen Schwingung.[1])

Solche Entwicklungen gestatten demgemäß die Berechnung des elektromagnetischen Feldes im Innen- und Außenraum der Kugel; sie werden also den Absorptionserscheinungen, der Berechnung der diffusen seitlichen Ausstrahlung, der Polarisation dieser Strahlung gerecht.

Dabei ergibt sich für das seitlich abgebeugte Licht jeder Farbe ein Maximum der Ausstrahlung bei bestimmtem Teilchenradius. Diese „optische Resonanz" ist selbstverständlich nicht allein durch näherungsweises Zusammenfallen der Eigenschwingung des Teilchens mit der Periode der einfallenden Strahlung verursacht, sondern durch die Absorption und Reflexion, die von der materiellen Beschaffenheit des Teilchens abhängen, mitbedingt.

R. Gans[2]) erweitert die Berechnungen in näherungsweiser Entwicklung für jenen Fall, der außer der Kugel praktisch noch in Betracht kommt, das Ellipsoid (stäbchen- und scheibchenförmige Teilchen). Gans und Happel[3]) berechnen Absorption und Dispersion des Lichtes in kolloidalen Metalllösungen mit kugelförmigen Teilchen auch unter Berücksichtigung stärker konzentrierter Kolloide. A. Lampa[4]) untersucht schließlich die Veränderung, die eine durchziehende elektromagnetische Welle im Kolloid erfährt, und gelangt so von anderem Ausgangspunkte zu dem gleichen Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten einer Lösung, in der Kugeln eingebettet sind, wie Mie und Gans u. Happel ihn angaben.

Aus diesen Theorien ergeben sich die leitenden Gesichtspunkte für die Untersuchung der optischen Phänomene an

1) Der Grenzfall vollkommener Leiter bildet hier eine Ausnahme, vgl. G. Mie, l. c.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. p. 881. 1912; Physik. Zeitschr. **18**. p. 1185. 1912.

3) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**. p. 277. 1909.

4) A. Lampa, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. **118**. (IIa). p. 867. 1909.

Materie jeglicher Art in feinverteiltem Zustande. So gilt sie für dielektrische Teilchen; z. B. suspendierte Wassertröpfchen (Himmelsblau, Regenbogen, Morgen- und Abendröte und verwandte Erscheinungen, Färbung der Gewässer, farbiger Dampfstrahl) oder Emulsionen in Alkohol usw. (Färbung der Mastixlösungen), ferner für metallische Teilchen, also Kolloidsuspensionen in Gasen, flüssige kolloidale Metallösungen, feste kolloidale Metallösungen (z. B. mit Metall gefärbte Gläser) und vermutlich wird sie auch für die Verfärbung von Gläsern und Gesteinen[1]) unter Einfluß radioaktiver Bestrahlung usw. den Ausgangspunkt einer theoretischen Erörterung ergeben.

§ 3. Berechnung der seitlichen Ausstrahlung von Silberkügelchen.

Wir gehen nun zur Berechnung der Intensität und Farbe des Lichtes über, das an kleinen Silberkügelchen, die im Gase suspendiert sind, in Dunkelfeldbeleuchtung in senkrechter Richtung zum einfallenden Strahle ausgestrahlt wird.

Fällt ein unpolarisierter Lichtstrahl auf ein Kügelchen, das in praktisch unendlicher Entfernung in senkrechter Richtung zum einfallenden Strahle beobachtet wird (Dunkelfeldbeleuchtung), so ist die Intensität des seitlich abgebeugten Lichtes bezogen auf die Intensität des durchgehenden Strahles als Einheit:

$$(1)\quad I = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left| -\frac{a_1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{\sigma+1}\frac{(2\sigma)^\sigma}{2^{3\sigma}}\left(\frac{a_{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + p_{2\sigma}\right)\right|^2$$

(vgl. Formel [81] bei Mie).

Dabei bedeuten r die radiale Koordinate, a_σ die Koeffizienten der elektrischen, p_σ die der magnetischen Partialwelle.

Für die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes kommen, wie aus Formel (1) hervorgeht, nur die ungeraden Koeffizienten der elektrischen, die geraden Koeffizienten der magnetischen Wellen in Betracht; praktisch kann man sich bei Berechnung von Metallkügelchen auf die erste elektrische Partialwelle (Rayleighsche Strahlung) beschränken. Denn für Silberkügelchen z. B. ist selbst im Falle großer Radien und großer Wellenlänge a_3 und p_2 zu vernachlässigen; z. B. beträgt für

1) Vgl. C. Doelter, Die Farben der Mineralien. Sammlung Vieweg. Heft 27. p. 93. Braunschweig 1915.

den Radius $\varrho = 9{,}82 \cdot 10^{-6}$ cm, die Wellenlänge $\lambda = 650\ \mu\mu$, $a_1 = -1{,}419—1{,}429\,i$, $p_2 = 0{,}0105—0{,}0046\,i$, a_3 wird praktisch verschwindend.

Dann gilt für die Intensität der Ausstrahlung in einer Richtung:

$$(1a) \qquad I_I = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} \left| \frac{a_1}{2} \right|^2 .$$

Dabei ist:

$$a_1 = 3\,i\, \frac{J_1'(\alpha) J_1(\beta) \cdot \beta - J_1'(\beta) \cdot J_1(\alpha) \cdot \alpha}{K_1'(-\alpha) J_1(\beta) \cdot \beta - J_1'(\beta) \cdot K_1(-\alpha) \cdot \alpha} \quad [1]$$

mit den Variabeln:

$$\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot m = m\alpha,$$

wenn a der Radius der Kugel, λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes im Gase, m der komplexe Brechungsexponent des Metalles ist.

Durch Integration über die Oberfläche *eines Teilchens* erhält man die Gesamtstrahlung:

$$(2) \qquad R = \frac{8\pi}{3} r^2 I_I = \frac{2}{3\pi} \lambda^2 \left| \frac{a_1}{2} \right|^2 .$$

Die Gesamtstrahlung einer verdünnten Lösung der Konzentration C ist [2]):

$$(2a) \qquad R = \frac{24\pi^3}{\lambda^4} \cdot V \cdot |\alpha_1|^2 \cdot C,$$

---

1) Es ist:

$$J_1(\alpha) = \left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/2} I_{3/2}(\alpha), \quad K_1(-\alpha) = \left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/2} H_{3/2}^{2}(\alpha)$$

Die Besselsche Zylinderfunktion I beschreibt bekanntlich das Verhalten der Welle im Innenraum der Kugel und verschwindet im Nullpunkt; die zweite Hankelsche Funktion H^2 bezeichnet die divergierende Welle im Außenraum, die im Unendlichen verschwindet.

2) Die Farbe der Ausstrahlung ist bei großer Verdünnung, wenn die Teilchen sich gegenseitig nicht beeinflussen, unabhängig von der Konzentration.

Alle näheren Details über die numerische Berechnung vgl. in der gleichlautenden Abhandlung, die demnächst in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien erscheint. (Vgl. Akad. Anzeiger vom 8. März 1917.)

wenn

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{2a^3}$$

gesetzt wird, V das Teilchenvolumen bedeutet (vgl. Formel [87] bei Mie).

Es wurde nun die Intensität des seitlich ausgestrahlten Lichtes für Silberkügelchen vom Radius $1 \cdot 10^{-5}$ bis $1 \cdot 10^{-6}$ cm, die im Gase suspendiert sind, berechnet. Diese Berechnung erstreckt sich vom Ultravioletten über das ganze sichtbare Spektrum bis an das Ultrarote.[1])

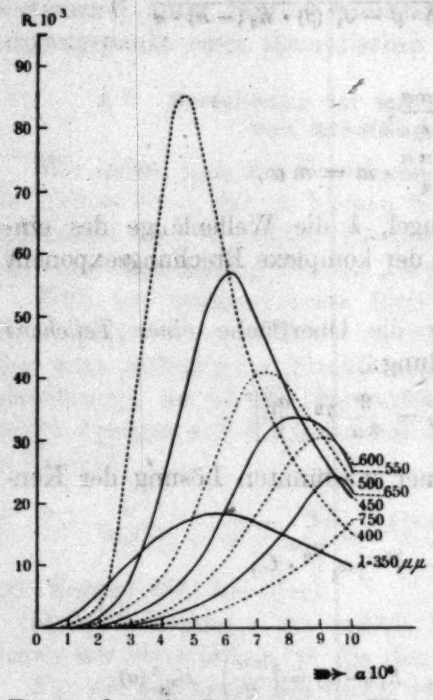


Fig. 1. Optische Resonanz von Silberkügelchen im Gase.

Wenn es sich nur um *die Bestimmung der Lage des Strahlungsmaximums* im Spektrum handelt (und nicht um die absolute Intensität der Ausstrahlung), kann dieses *auch für das Einzelteilchen* aus den Strahlungskurven einer Lösung konstanter Konzentration abgelesen werden.

Demgemäß zeigt Fig. 1 die Kurven „optischer Resonanz". Den Radien als Abszissen ist die Gesamtstrahlung R als Ordinate zugeordnet, die von 1 mm³ einer Lösung der Konzentration $C = 10^{-6}$ (1 mm³ Ag in 1 Liter Gas) ausgeht.

Fig. 2 stellt die Intensität der Ausstrahlung der Teilchen in Abhängigkeit von der Wellenlänge dar.

Aus der Berechnung des seitlich zerstreuten Lichtes ergibt sich für jede Farbe ein Maximum der Ausstrahlung bei

1) Den Rechnungen wurden folgende Wellenlängen zugrundegelegt: $\lambda = 350\ \mu\mu$, $400\ \mu\mu$, $450\ \mu\mu$, $500\ \mu\mu$, $550\ \mu\mu$, $600\ \mu\mu$, $650\ \mu\mu$, $750\ \mu\mu$.

bestimmtem Teilchenradius; die Lage des Strahlungsmaximums in senkrechter Richtung zum einfallenden Lichte für bestimmte Teilchengrößen erhellt aus den optischen Kurven der Fig. 1 (Tab. 4).

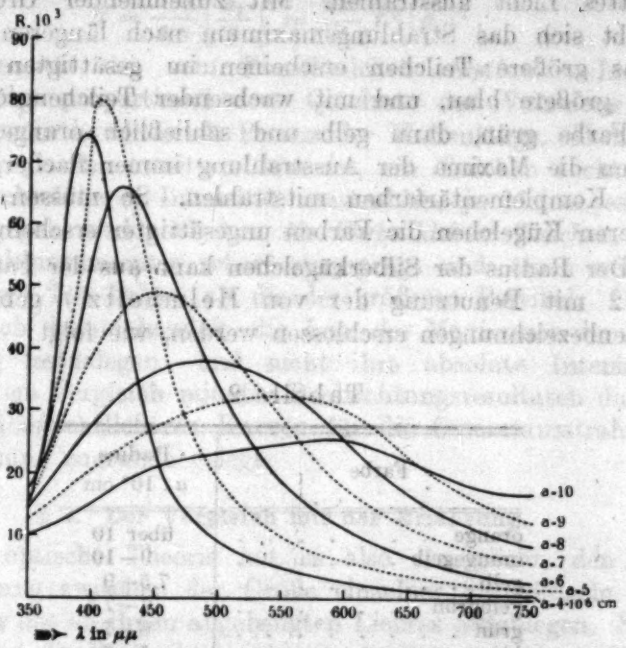


Fig. 2. Seitliche Ausstrahlung von Silberkügelchen im Gase.

Tabelle 1.

Radius $a \cdot 10^6$ cm	Wellenlänge des Maximums $\lambda_{Max.}$
10	650
9	600
8	550
7	500
6	450
5	420
4	400

Aus Fig. 2[1]), in der bei konstanter Teilchengröße die Intensität der Gesamtstrahlung als Ordinate den Wellen-

1) Der Vergleich mit den Kurven von E. Müller (Ann. d. Phys. 35. p. 500. 1911), der die Ausstrahlung einer wässerigen kolloidalen Silberlösung berechnete, zeigt, daß sich das Maximum der Ausstrahlung von Silberkügelchen im Gase gegenüber der flüssigen Lösung nach kürzeren Wellenlängen verschiebt.

längen als Abszissen zugeordnet ist, ergibt sich, daß Teilchen unterhalb des Radius ca. $8 \cdot 10^{-6}$ cm in Dunkelfeldbeleuchtung nicht mehr sichtbar sind, weil sie hauptsächlich ultraviolettes Licht ausstrahlen. Mit zunehmender Größe verschiebt sich das Strahlungsmaximum nach längeren Wellen. Etwas größere Teilchen erscheinen im gesättigten Violett, noch größere blau, und mit wachsender Teilchengröße wird die Farbe grün, dann gelb und schließlich orange. Dabei werden die Maxima der Ausstrahlung immer flacher, so daß auch Komplementärfarben mitstrahlen. So müssen bei den größeren Kügelchen die Farben ungesättigter erscheinen.

Der Radius der Silberkügelchen kann aus der Farbe nach Fig. 2 mit Benutzung der von Helmholtz[1]) gebrauchten Farbenbezeichnungen erschlossen werden, wie folgt:

Tabelle 2.

Farbe	Radius $a \cdot 10^6$ cm
orange	über 10
orangegelb	9—10
gelb	7,5—9
gelbgrün	7—7,5
grün	6—7
blau	5—6
violett	4—5

Die Kurven der Figg. 1 und 2, die uns über die *Lage* des Strahlungsmaximums von Silberkugeln Aufschluß gegeben haben, wurden unter Annahme konstanter Konzentration, d. h.

$$C = NV = \text{const.}$$

berechnet. Unter dieser Annahme wächst mit abnehmendem Teilchenvolumen V die Zahl N der Teilchen in der Volumeinheit des Mediums sehr rasch und mit wachsender strahlender Oberfläche nimmt auch die Intensität der Gesamtstrahlung feiner Suspensionen zu. Nach den Kurven I und II nimmt demnach scheinbar mit abnehmendem Radius und zunehmender Sättigung der Farbe auch die absolute Intensität der Ausstrahlung zu.

1) H. von Helmholtz, Physiologische Optik. III. Auflage 1911. Bd. 2. p. 54 u. 63.

Tatsächlich gilt dies jedoch beim Einzelteilchen nicht; denn die Gesamtstrahlung eines einzelnen Kügelchens beträgt (vgl. Formel [2]):

$$R = \frac{2\lambda^2}{3\pi}\left|\frac{a_1}{2}\right|^2 = \frac{8\pi^3}{\lambda^4} V^2 |a_1|^2. \tag{2b}$$

Die Intensität des vom Einzelteilchen zerstreuten Lichtes wächst also proportional dem Quadrate des Volumens und invers proportional der 4. Potenz der Wellenlänge. Demnach muß, wie ja ohne weiteres klar ist, ein Teilchen Licht von um so schwächerer Intensität ausstrahlen, je kleiner es ist.

Hingegen wird auch hier die *Farbe kleiner Teilchen*, weil ihre Strahlungsmaxima scharf ausgeprägt sind, einen weitaus *gesättigteren* Ton haben, als die der größeren Partikel. Da es sich jedoch darum handelt, die *Lage* des Maximums der Ausstrahlung festzulegen, und nicht ihre absolute Intensität, wurden dem Vergleich mit den Beobachtungsresultaten die bei weitem übersichtlicheren Kurven für die Gesamtausstrahlung einer Lösung zugrunde gelegt.

§ 4. Der Vergleich mit der Erfahrung.

Die optische Theorie hat es also ermöglicht, den Zusammenhang zwischen der Größe einzelner Silberkugeln und der Farbe des an ihnen abgebeugten Lichtes festzulegen. Nunmehr bietet die Beobachtung der Ortsänderung farbiger Silberpartikel in Dunkelfeldbeleuchtung jene schon einleitend erwähnten Möglichkeiten, um wiederum die Größe dieser Kügelchen zu bestimmen.

Diese Untersuchung soll im folgenden durchgeführt werden.

Kolloidale Silberpartikeln wurden hierzu durch Zerstäubung im elektrischen Lichtbogen in reinstem, auf das sorgfältigste getrockneten Stickstoff hergestellt.[1]) Durch den Gasstrom wurden die Partikel in einen kleinen, dicht abschließbaren Plattenkondensator getragen, wo sie durch die konzentrierten Strahlen von Bogenlampen von rechts und links

1) Der Stickstoff wurde in zwei Vorlegeflaschen mit H_2SO_4 vorgetrocknet, ging durch P_2O_5-Vorlagen, wurde in einem elektrischen Ofen über blankes Cu geführt, um die letzten O_2-Reste zu entfernen, ging sodann nochmals durch P_2O_5-Trocknungen und gelangte in das Zerstäubungsgefäß (vgl. Ehrenhaft, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 119. (IIa). p. 830. 1910), in dem wieder Schalen mit P_2O_5 standen. Dieses P_2O_5 bleibt vollkommen trocken.

beleuchtet (Beleuchtungsobjektive Appertur 0,8 Äquivalentbrennweite 17 mm), von vorne (senkrecht zu der Beleuchtungsrichtung) durch ein Mikroskop (Objektiv AA von Zeiss, mit Okular 12 mit Rastrum) beobachtet werden konnten. Hierzu stand die von F. Ehrenhaft[1]) angegebene Anordnung zur Verfügung.

Im Mikroskop zeigten sich auf dunklem Hintergrunde leuchtende Pünktchen mit den für Silberpartikel charakteristischen Farbenphänomene. Es waren orange Teilchen, ausgesprochen gelbe Partikel, ferner gelbgrüne, grüne, blaue und purpurfarbene Partikel (diese drei letzteren in sehr gesättigtem Farbenton) zu erblicken, wie dieselben aus den verschiedenen kolloidalen Lösungen des Silbers im Wasser bekannt sind.

In diesem optischen Bilde läßt sich bereits in rein qualitativer Hinsicht ein Zusammenhang zwischen Farbe und Beweglichkeit der Kügelchen erkennen. Denn die orange Silberteilchen sind in deutlich verfolgbarer Fallbewegung begriffen; Partikel von gelblicher Färbung lassen trotz ihrer Brownschen Bewegung eine sichtliche Falltendenz erkennen, während die blauen und grünen Partikel in so starker Brownscher Bewegung sind, daß die Fallbewegung im Gase beinahe überdeckt wird. Auffallend sind die purpurnen Partikel, deren ausgesprochen heftige Brownsche Bewegung, die sie oft nur für Bruchteile von Sekunden im Gesichtsfelde aufblitzen läßt, schon darauf hindeutet, daß wir es hier mit äußerst kleinen Teilchen zu tun haben.

Auch das *Verhältnis der absoluten Intensitäten* des von den Kügelchen abgebeugten Lichtes kann man abschätzen. Die blauen, grünen und purpurnen Partikeln sind sichtlich viel lichtschwächer als die gelben, während orangefarbige

---

1) Wurden die Silberteilchen mit nur *einer* Bogenlampe im Dunkelfelde beleuchtet, so machte sich bei Partikeln bestimmter Größe im intensivsten Teile des beleuchtenden Kegels der Strahlungsdruck besonders bemerkbar, der die Silberpartikel im konzentrierten Strahlenkegel von der Beleuchtungsquelle weg aus dem Gesichtsfelde trug. Durch Beleuchtung mit *zwei* konzentrischen Strahlen von rechts und links wurde der Strahlungsdruck praktisch kompensiert. Nach Kompensation des Strahlungsdruckes standen die Silberpartikel sichtbar nur mehr unter Einfluß der Schwerkraft und der Brownschen Bewegung. (Anz. der Wiener Akademie d. Wissensch. Nr. 4, Sitzung vom 3. Februar 1916.)

Silberteilchen sehr lichtstark erscheinen, so wie es die Erörterungen in § 3 erwarten lassen.

Um eine Verständigung über die im folgenden verwendeten Farbenbenennungen zu erzielen, wurden die Farben der Silberpartikeln, wie sie sich im optischen Bilde subjektiv darboten, nach Raddes Internationaler Farbenskala (Société stenochromique, Paris; Verlag Otto Radde, Hamburg) bezeichnet:

Tabelle 3.

Bezeichnung der beobachteten Farbe	Festlegung in Raddes Internat. Farbenskala	
orange	Skala 4	$n-r$
orangegelb	„ 5—6	$o-q$
gelb	„ 7	$p-r$
blaßgelb	„ 8	$p-r$
gelbgrün	„ 10	$q-s$
grün	„ 12—16	$i-n$
blau	„ 18—19	$i-o$
hellblau (zyanblau)	„ 20—21	$k-o$
violett	„ 22	$i-o$
purpur	„ 25	$l-k$

§ 5. Bestimmung des Radius der größeren Silberkugeln.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Größe der Silberkügelchen über.

Bei den größeren Partikeln $a = 12 - 7 \cdot 10^{-6}$ cm lassen sich nach dem schon oft beschriebenen Verfahren ohne Schwierigkeit längere Serien von Fall- und Steigzeiten an ein und demselben Teilchen messen, indem seine Passage an den Marken des Okularmaßstabes beim Fall im Schwerefeld registriert, das Partikel hierauf durch Einschaltung eines elektrischen Feldes gehoben und seine Steigzeit in gleicher Weise verzeichnet wird.

Die Beweglichkeit B des Teilchens und der Radius a können nach den beiden bekannten voneinander unabhängigen Rechenverfahren nach der Beziehung:

$$mg = \frac{v_f}{B}, \tag{3}$$

worin v_f die Fallgeschwindigkeit, mg das Gewicht des Kügelchens bedeutet, berechnet werden. Nach dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze wird aus der gemessenen mittleren Fallgeschwindigkeit des Kügelchens v_f seine Beweglichkeit $B_{\text{St-C}}$ durch:

(4) $$B_{St\text{-}C} = \frac{1}{6\pi\mu a}\left[1 + A\frac{l}{a}\right]$$

ausgedrückt, worin l die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle, μ der Reibungskoeffizient des Mediums,

$$A = \frac{1{,}63}{f + 2(1-f)}$$

ist. Dabei bezeichnet f eine Konstante, das Verhältnis der Zahl der unelastischen Stöße der Gasmolekel zu den elastischen, deren Wert zwischen 0 und 1 liegt.

Der Radius a des Partikels wird für die beiden Grenzfälle $f = 0$ und $f = 1$ berechnet.

Die Einstein-Smoluchowskischen Theorie der Brownschen Bewegung gibt den Zusammenhang der beobachteten Größe $\bar{\lambda}^2$, des mittleren sekundlichen Quadrates der Verschiebung, die das Teilchen infolge der Molekularstöße des Mediums erleidet, aus den Abweichungen der einzelnen Fallzeiten von ihrem Mittelwerte, mit der Beweglichkeit des Teilchens zu:

(5) $$B_{Br} = \frac{2N}{2RT} \cdot \bar{\lambda}^2 .$$

Aus dem Gewichte mg des Kügelchens (Formel [3]) errechnet sich dann der Radius.

E. Weiss[1]) hat bereits die Messung von Fallserien an größeren Silberpartikeln durchgeführt und nach den beiden erwähnten Methoden das Gewicht der Kügelchen bestimmt. Dabei hatte er, um die chemische Reinheit und Stabilität der Silberteilchen zu erweisen, diese in einem elektrischen Ofen umgeschmolzen. Er fand an ein und demselben Teilchen auch nach dem Umschmelzen

$$m g_{Br} > m g_{St\text{-}C},$$

d. h. das Gewicht mg_{Br}, das aus der Brownschen Bewegung erschlossen wurde, größer als das aus dem Widerstandsgesetze errechnete. Eine unabhängige Bestimmung des Radius aus der Farbe, die zwischen diesen beiden abweichenden Größenbestimmungen entscheiden kann, wie sie von Ehrenhaft an Goldkügelchen durchgeführt wurde, fehlte bisher bei Silberpartikeln.

Ein solcher Vergleich scheint aber geboten, um nachzuweisen, daß auch Silber im reinen Gase keinerlei Änderung

1) E. Weiss, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 120. (IIa). p. 1021. 1911.

erleidet und man daher aus der gemessenen Fallgeschwindigkeit von Silberkugeln deren Masse einwandfrei erschließen kann.[1])

In vorliegender Arbeit wurden an orange, orangegelben, gelben und gelbgrünen Silberkügelchen so lange Fallserien gemessen, bis der Mittelwert der Fallzeiten, die wahre Fallzeit, praktisch konstant war. Wo eine genügende Statistik vorhanden ist, konnte somit nach den beiden üblichen Verfahren gerechnet werden. Im folgenden seien die diesbezüglichen Resultate angeführt.

Werden die gemessenen Partikel wie in Tab. 4 nach abnehmender Fallgeschwindigkeit, also nach abnehmendem Radius, geordnet, so ordnen sich ihre Farben nach der Reihenfolge orange, orangegelb, gelb, gelbgrün, grün, blau, hellblau, violett, wie sie im Spektrum aufeinander folgen.

Bei allen Partikeln fällt der Wert des Radius, der aus den Kurven der Fig. 2 aus der beobachteten Farbe erschlossen wurde, zwischen die Grenzen der aus den Widerstandsgesetzen berechneten Radien, und zwar an die obere Grenze. So ergibt sich z. B. für Partikel Nr. 3 (orange) aus der Farbe ein Radius von über $10 \cdot 10^{-6}$ cm, aus dem Fallgesetz ($f = 0$) $a = 11{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm, für Partikel Nr. 7 (orangegelb) aus der Farbe der Radius $9—10 \cdot 10^{-6}$ cm, aus dem Fallgesetz $f = 0$ $9{,}7 \cdot 10^{-6}$ cm, für ein gelbes Teilchen (Nr. 11) für den Radius aus der Farbe $7{,}5—9 \cdot 10^{-6}$ cm, aus dem Fallgesetz $f = 0$ $7{,}7 \cdot 10^{-6}$ cm.

In Tab. 4 bestätigt sich wieder in allen Fällen, daß auch bei Silberpartikeln die Theorie der Brownschen Bewegung größere Radien ergibt als das Widerstandsgesetz. So ist, um nur ein Beispiel anzuführen, bei dem erwähnten Partikel Nr. 3 der Radius aus der Brownschen Bewegung

$$a_{Br} = 15{,}7 \cdot 10^{-6}\,\text{cm}.$$

Aus Tab. 4 ergibt sich also durch die exakte Übereinstimmung von Widerstandsgesetz $f = 0$ und „optischem Weg", daß orange Silberkugeln einen Radius von $10—13{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm, orangegelbe einen Radius $9—10 \cdot 10^{-6}$ cm, gelbe $7{,}5—9 \cdot 10^{-6}$cm, gelbgrüne $7—7{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm haben.

1) Vgl. P. Langevin et M. de Broglie, La Théorie du Rayonnement et les Quanta. Gauthier-Villars, Paris 1912. p. 251.

Tabelle 4.

Nr.	Beobachtete Farbe	$v_f \cdot 10^3$ cm	Radius = 10^6 cm: a. d. Stokes-Cunningham-schen Widerstands-gesetzen $a_{f=0}$	$a_{f=1}$	aus der Theorie der Brown-schen Bewe-gung a_{Br}	aus der Farbe be-rechneter Radius	Zahl der Fall-zeiten	Zahl der Steig-zeiten
1	orange	3,35	12,4	9,8		orange	7	4
2	orange	2,94	11.5	8,9	14,6	über 10	48	34
3	orange	2,89	11,3	8,8	15,7		39	30
4	orangegelb	2,86	11,3	8,7		orangegelb	15	
5	orangegelb	2,46	10,2	7,8		9—10	17	12
6	orangegelb	2,39	10,1	7,6			12	
7	orangegelb	2,26	9,7	7,3	15,5		49	34
8	gelb	2,12	9,3	7,0	12,9	gelb	49	51
9	gelb	1,86	8,5	6,3		7,5—9	6	3
10	gelb	1,71	8,1	5,9			11	10
11	gelb	1,60	7,7	5,6	10,8		49	49
12	blaßgelb	1,53	7,5	5,4	10,7	gelbgrün	30	30
13	gelbgrün	1,53	7,5	5,4		7—7,5	6	5
14	gelbgrün	1,47	7,3	5,3			9	5
15	grün	1,84	8,5	6,2		grün	3	
16	grün	1,78	8,3	6,1		6—7	3	
17	tiefgrün	1,39	7,0	5,0			3	
18	blau	1,29	6,5	4,7		blau	5	
19	hellblau	1,02	6,0	4,2		5—6	6	6
20	sehr helles Blau	0,574	3,7	2,4		violett	5	3

Für die grünen und blauen Partikeln können jedoch aus Tab. 4 *allein*, obzwar auch hier bereits die Übereinstimmung zutage tritt, keine bindenden Schlüsse gezogen werden. Denn bei diesen kleinen, in heftiger Brownscher Bewegung befindlichen Teilchen, deren einzelne Fallzeiten stark voneinander abweichen, ist bei so wenigen Messungen das Mittel der Fallgeschwindigkeit noch nicht genau festgelegt. Aber auch hier deckt sich bereits das Intervall, in dem der Radius aus der Farbe sich bewegen kann, mit dem Intervall der Widerstandsgesetze; so folgt für tiefgrüne Partikel aus der Farbe ca. 6—7 . 10^{-6} cm, aus den Fallgesetzen 6,1—8,3 bzw. 5,0—7,0 cm. Für tiefblaue Teilchen resultiert aus der Farbe 5—6, aus den Fallgesetzen 4,7—6,5 bzw. 4,2—6,0 . 10^{-6} cm; für ein violettes Partikel, welches nach seiner Farbe kleiner sein soll als das tiefblaue, ist der Radius aus dem Widerstandsgesetz ca. 4 . 10^{-6} cm.

Für die größeren Silberkugeln vom Radius 7—18 . 10^{-6} cm ist also die Entscheidung in der Größenbestimmung bereits durch die Übereinstimmung der optischen Methode mit dem Fallgesetz $f = 0$ gefällt. Der eindeutige Zusammenhang zwischen der Farbe des von diesen Kugeln abgebeugten Lichtes (orange bis gelbgrün) mit der Größe wurde festgelegt.

§ 6. Größenbestimmung der kleinsten Partikel.

Nunmehr erübrigt noch die genaue Größenbestimmung der kleinsten Partikel, die wegen ihrer Lichtschwäche im diffusen Lichte nicht mehr verfolgbar sind und wegen ihrer heftigen Brownschen Bewegung rasch die Einstellebene des Mikroskops verlassen.

Die charakteristischen Eigenschaften der kleinsten (grünen, blauen und purpurnen) Partikel — ihre heftige Brownsche Bewegung, welche die Falltendenz scheinbar überdeckt, und die trotz ihrer Lichtschwäche äußerst gesättigte Farbe — bilden zusammen mit den Erfahrungen, die bereits an den größeren Partikeln gemacht wurden, den Ausgangspunkt zu einer Methode, auch die Größen dieser kleinsten Partikel festzulegen.

Der eindeutige Zusammenhang zwischen Radius und Farbe, der für Silberkugeln der Größe 7—12 . 10^{-6} cm Radius bereits festgelegt wurde, wird in der folgenden Untersuchung *vorausgesetzt* insofern die *gleiche Farbe der kleinen Silberpartikel als Kriterium gleicher Größe benutzt wird*; wie aus den optischen Kurven der Figg. 1 und 2 hervorgeht, ist der Radius in der zu erwartenden Größenordnung durch die Farbe in so engem Intervall definiert, daß diese Übertragung gerechtfertigt ist.

In der Messung wurde eine einfache Methode angewandt, welche den Charakter der regellos ungeordneten Bewegung dieser Teilchen getreu festhält.

Ein Partikel intensiver Farbe (grün, blau oder purpurn) wurde von einem beliebigen Punkte des Okularrastrums ins Auge gefaßt und seine Bewegung bis zu einem anderen Punkte verfolgt. Die Zeit zwischen Anfang und Ende der Beobachtung wurde registriert und der Weg des Partikels auf einem rastrierten Papier aufgezeichnet.

Eine Probe solcher Zeichnungen von Bahnen gleichfarbiger Partikel zeigt Fig. 3. Es muß bemerkt werden, daß die Bahnen der Partikel, die in Fig. 3 *neben*einander gezeichnet sind, tatsächlich *nach*einander beobachtet wurden; selbstverständlich kann jeweils nur *ein* im Gesichtsfelde befindliches Teilchen ins Auge gefaßt werden.

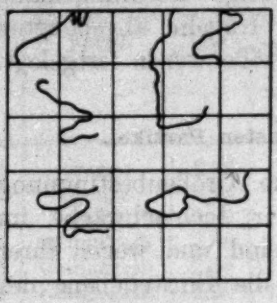


Fig. 3. Bahnen gleichfarbiger Partikel.

Nunmehr gehen wir zur Berechnung der Größe der kleinsten Silberpartikel aus diesen Beobachtungen über.

Es wurden von jeder Farbe bei 100 Partikeln der horizontale Abstand Δx_h und der vertikale Abstand Δx_v von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung jedes Teilchens ausgemessen und die mittleren sekundlichen Verschiebungsquadrate in horizontaler und vertikaler Richtung:

$$\frac{1}{100}\sum_{1}^{100}{}_i \frac{\Delta x_{hi}{}^2}{t_i} = \bar{\lambda}_h{}^2$$

und

$$\frac{1}{100}\sum_{1}^{100}{}_i \frac{\Delta x_{vi}{}^2}{t_i} = \bar{\lambda}_v{}^2$$

gebildet.

Dabei wirken in vertikaler Richtung die Schwerkraft und die Brownsche Bewegung, in horizontaler Richtung die Brownsche Bewegung *allein*.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß das mittlere Quadrat der Verschiebung, die ein Teilchen unter alleiniger Einwirkung der Brownschen Bewegung in vertikaler Richtung erleiden würde, praktisch gleich sei dem mittleren Quadrat seiner Verschiebung in horizontaler Richtung.

Smoluchowski[1]) hat nun gezeigt, daß für ein Teilchen, das unter gleichzeitigem Einfluß der Brownschen Bewegung

1) M. von Smoluchowski (Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Série A. Juli 1913. p. 423). Aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen folgt hier die Formel in folgender Gestalt:

$$\overline{(x - x)}^2 = 2Dt + (\gamma P t)^2,$$

und der Schwerkraft in der Zeit t eine bestimmte Verschiebung erreicht, die Beziehung gilt, daß das Quadrat der tatsächlich beobachteten Verschiebung in der Zeit t gleich ist der Summe aus den mittleren Quadraten der Verschiebung des Teilchens infolge der regellosen Brownschen Bewegung und der gleichförmigen Fallbewegung.

In unserer Bezeichnungsweise lautet die Gleichung:

$$\overline{\Delta x_v}^2 = \overline{\Delta x_h}^2 + s^2. \tag{6}$$

Die Fallstrecke s des Teilchens während der beobachteten Zeit d ist nach Formel (3):

$$s = B\,m\,g\,t_f\,,$$

worin t_f die wahre Fallzeit des Teilchens über die Strecke s bedeutet, wenn nur die Schwerkraft allein wirken würde.

Werden alle Verschiebungsquadrate auf die Zeiteinheit bezogen, so ergibt sich:

$$\lambda_v^2 = \bar{\lambda}_h^2 + B^2(mg)^2\left(\frac{\overline{t_f^2}}{t}\right). \tag{7}$$

Betont muß werden, daß in Formel (7) bis jetzt keine andere Voraussetzung über die Brownsche Bewegung enthalten ist, als daß diese ungeordnet verläuft; die Berechtigungzu dieser Annahme wurde neuerdings von D. Konstantinowsky[1]) erwiesen. Nun wurde bei Partikeln bis zum Radius ca. $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm festgestellt, daß die Werte für den Radius eines Partikels, wenn sie einerseits nach den Fallgesetzen, andererseits nach der Theorie der Brownschen Bewegung berechnet wurden, Abweichungen zeigen. Irgendeine Annahme in den Berechnungen, welche Gleichberechtigung[2]) der beiden Theorien involviert, wäre also nicht gerechtfertigt. In den vorliegenden Berechnungen jedoch wurde jede Voraussetzung über die

---

worin $x - x_0$ die tatsächliche Verschiebung, D den Diffusionskoeffizienten, γ die Beweglichkeit, P das Gewicht des Teilchens bezeichnet.

Ferner läßt sich die Formel, wie ich einer freundlichen Mitteilung von Prof. Ph. Frank entnehme, direkt aus dem Virialsatz gewinnen.

1) D. Konstantinowsky, Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 123. (IIa). p. 1728. 1914.

2) Viele Autoren führen zur Berechnung des Radius von Partikeln, deren Brownsche Verschiebung direkt gemessen wurde, das Widerstandsgesetz in die Formel der Brownschen Bewegung ein. Dieses Verfahren scheint nicht zutreffend.

mittlere Energie der Teilchen vermieden und nur Größen, die der direkten Beobachtung der Brownschen Bewegung entstammen, in Beziehung zu dem Widerstandsgesetz gebracht.

Daher wird der weiteren Berechnung der Ausdruck für die Beweglichkeit aus den Widerstandsgesetzen (Formel [4]), der durch die Resultate aus der Optik von p. 18 erneuert gestützt wurde, zugrundegelegt.

Formel (7) geht dann in folgende Form über:

$$(7a) \qquad \bar{\lambda}_v^2 - \bar{\lambda}_h^2 = \left[\left(1 + A\frac{l}{a}\right)\frac{1}{6\pi\mu a}\,\frac{4a^3\pi\sigma g}{3}\right]^2 \cdot \left(\frac{\overline{t_f^2}}{t}\right).$$

Der Ausdruck $\bar{\lambda}_v^2 - \bar{\lambda}_h^2$, welcher der direkten Beobachtung entspringt, ist also proportional einem Faktor, der durch die Größe des Teilchens bestimmt wird. Zur Berechnung des Radius a ist also nur noch der Faktor $(\overline{t_f^2}/t)$ zu ermitteln. t_f ist die wahre Fallzeit des Teilchens über die Fallstrecke s. Ihr Wert wurde durch folgende Überlegung festgestellt:

Wäre bei allen Beobachtungen die Passage der gleichfarbigen Teilchen über *dieselbe* vertikale Fallstrecke registriert worden, so wäre die wahre Fallzeit, die jedoch infolge der Brownschen Bewegung Schwankungen erleidet, exakt gleich dem Mittel aus allen, am gleichen Teilchen bzw. am Teilchen gleicher Farbe gemessenen Fallzeiten.[1]) Nun wurde zwar im vorliegenden Falle die Bahn der Teilchen über jeweils verschiedene Fallstrecken verfolgt; alle diese Strecken schwanken jedoch in kleinem Intervall um eine mittlere Fallstrecke, so daß man praktisch den Mittelwert aller am Teilchen gleicher Farbe registrierter Zeichen als die mittlere (= wahre) Fallzeit t_f über eine mittlere Strecke auffassen kann. Mit diesem Werte t_f wurde die Größe:

$$\frac{1}{100}\sum_1^{100}{}_i \frac{t_f^2}{t_i} = \left(\frac{\overline{t_f^2}}{t}\right) = \bar{\bar{t}}$$

gebildet.

Die Gleichung, aus der nunmehr der Radius a ermittelt werden kann, lautet:

$$(8) \qquad a^2 + Ala - \frac{9\mu}{2\sigma g}\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_v^2 - \bar{\lambda}_h^2}{\bar{\bar{t}}}} = 0.$$

---

1) Vgl. E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **16**. p. 289. 1915. — M. von Smoluchowski, Physik. Zeitschr. **16**. p. 318. 1915.

Aus den 3 Gruppen von Messungen an je 100 Teilchen grüner, blauer und purpurner Farbe wurden die $\bar{\lambda}_h^2$ und $\bar{\lambda}_\varphi^2$ berechnet; die Ergebnisse sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

Farbe	blau	grün	purpur
$\bar{\lambda}_h^2 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$	14,7	17,3	24,0
λ_φ^2	24,7	23,4	28,2
$\bar{\lambda}_\varphi^2 - \bar{\lambda}_h^2$	10,0	6,1	4,2

Man sieht also, daß das horizontale Verschiebungsquadrat λ_h^2, welches durch die Brownsche Bewegung allein verursacht ist, bei den purpurnen Partikeln größer als bei den blauen, bei diesen größer als bei den grünen ist: nun besteht aber zwischen Teilchengröße und Stärke der Brownschen Bewegung die Beziehung, daß ein Teilchen sich in um so heftigerer Brownschen Bewegung befindet, je kleiner es ist. Demzufolge ergibt sich aus der Reihe der λ_h^2, das 24,0 bei purpurnen, 17,4 bei blauen, 14,7 bei grünen Partikeln beträgt, daß die grünen Silberkügelchen größer als die blauen, diese größer als die purpurnen sind.

Aus den optischen Kurven (vgl. Tab. 2) entspringt die Reihenfolge

$$\text{grün} > \text{blau} > \text{violett}.$$

Diejenigen Kügelchen, welche der Theorie nach, ihrer Größe entsprechend, violett erscheinen sollten, erscheinen tatsächlich purpurn. Daneben lassen sich, aber äußerst selten, kleine Partikeln mit violettem Farbenton beobachten, wie es den Kurven entspricht.

Das beste Kriterium für das Anwachsen des Radius bildet die Zunahme der Differenz $\lambda_\varphi^2 - \bar{\lambda}_h^2$, die den zunehmenden Einfluß der Schwerkraft über die Brownsche Bewegung kennzeichnet. Sie beträgt bei grünen Teilchen 10,0, bei blauen 6,1, bei purpurnen $4{,}2 \cdot 10^{-6}$ cm. Damit ist also wieder die Reihenfolge

$$\text{grün} > \text{blau} > \text{purpur}$$

gekennzeichnet.

Aus diesen Daten wird nun der Radius durch Einführung der Widerstandsgesetze nach Formel (8) berechnet. Das Ergebnis zeigt die folgende Tabelle.

Tabelle 6.

Farbe	grün	blau	purpur
Radius aus dem Fallgesetz $f = 0$. 10^6 cm . . .	6,5	5,3	4,9
Radius aus der optischen Berechnung . 10^6 cm .	6—7	5—6	4—5

Der Radius der grünen Teilchen ergibt sich also aus dem Fallgesetz $f = 0$ zu $6{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm, aus der optischen Berechnung zu $6—7 \cdot 10^{-6}$ cm; der Radius der blauen Partikel ist nach dem Fallgesetz $f = 0$ $5{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm, aus der Farbe $5—6 \cdot 10^{-6}$ cm; die purpurnen Partikel haben nach dem Fallgesetz einen Radius von $4{,}9 \cdot 10^{-6}$ cm, aus der Farbe geschätzt $4—5 \cdot 10^{-6}$ cm.

Die Übereinstimmung der Resultate aus den optischen Rechnungen mit denen aus dem Widerstandsgesetz für $f = 0$ ist also auch bei Partikeln der Größe $4—7 \cdot 10^{-6}$ cm Radius wieder eine sehr befriedigende.

Damit ist die Möglichkeit nachgewiesen, die Größe von Materiepartikeln bis zum Radius $4 \cdot 10^{-6}$ cm festzulegen.

§ 7. Zusammenfassung.

Für alle Schlüsse über physikalische Vorgänge an den kleinsten Aggregaten der Materie ist die Festlegung der Größe dieser Objekte grundlegendes Erfordernis. Eine direkte Ausmessung kann nur bei Objekten bis zur Größe der Lichtwellenlänge erfolgen. Bei submikroskopischen Partikeln bis zur äußersten Grenze der Beobachtbarkeit müssen indirekte Methoden platzgreifen.

Eine Untersuchung wie die Größenbestimmung kleinster, eben noch wahrnehmbarer Materieteilchen kann nicht auf *einem* Prinzip allein ein für allemal gegründet werden. Es müssen mehrere voneinander unabhängige Erscheinungen herangezogen werden; man muß sich also gewissermaßen

mehrerer Maßstäbe bedienen, und erst aus ihrer Übereinstimmung darf auf die Richtigkeit der Größenbestimmung geschlossen werden.

Bei der Wahl dieser mannigfachen Methoden hat als maßgebender Gesichtspunkt zu gelten, jeweils die physikalischen Erscheinungen der Beobachtung nutzbar zu machen, die an der beobachteten Materie und der betrachteten Größenordnung besonders charakteristisch zutage treten.

Als Beispiel dieser Methodik wurde in vorliegender Studie die Größenbestimmung kleinster Silberkugeln durchgeführt. Dazu wurden drei verschiedene Gebiete der Physik (Optik, Mechanik, Statistik) herangezogen.

Die erste Methode benutzt die optischen Phänomene am submikroskopischen Einzelteilchen. Aus der Theorie der Beugung des Lichtes ergibt sich unter Zugrundelegung der molaren optischen Konstanten des Silbers ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen der Größe und der Farbe von Silberpartikeln der Dimension 10^{-5} bis 10^{-6} cm Radius. Mit abnehmender Größe ist die Farbe des abgebeugten Lichtes nach der Reihe der Spektralfarben abgestuft. So läßt sich aus der beobachteten Farbe des Einzelpartikels sein Radius erschließen. Beispielsweise lassen orange Silberpartikel einen Radius $10—13 \cdot 10^{-6}$ cm, grüne einen Radius von $6—7 \cdot 10^{-6}$ cm erwarten.

Die Kontrolle dieser Größenbestimmung aus der optischen Berechnung bis zu Partikeln der unteren Grenze $7 \cdot 10^{-6}$ cm Radius bieten zwei Verfahren durch Beobachtung der mittleren Fallgeschwindigkeit und der Abweichungen von derselben. Diese gründen sich

1. auf mechanische Gesetze (Stokes-Cunningham);
2. auf statistische Gesetze (Theorie der Brownschen Bewegung).

Von der Größengrenze $7 \cdot 10^{-6}$ cm ab überwiegt die Brownsche Bewegung der Kügelchen so stark ihre Fallbewegung, daß eine Festlegung der mittleren Fallgeschwindigkeit am Einzelteilchen nicht mehr möglich ist. Bei den kleinsten Teilchen (grün, blau, purpurn) wird die gleiche Farbe als Index gleicher Größe genommen und auf direktem Wege die Verschiebung bestimmt, welche ein Partikel einerseits unter Einwirkung der Brownschen Bewegung und der Schwerkraft,

andererseits unter Wirkung der Brownschen Bewegung *allein* erfährt. Es wird eine Methode angegeben, welche aus dieser Differenz wieder die Größe zu bestimmen gestattet.

Von den benutzten Skalen stimmen in dem ganzen Bereiche die mechanische und die optische überein (und zwar setzt dabei die mechanische Skala Form und Dichte der Partikel voraus, die optische Skala die Form und die molaren optischen Konstanten des Metalles). Die Berechnung aus der Farbe ergibt also dieselben Werte wie das Widerstandsgesetz für $f = 0$.

Aus der statistischen Skala hat sich nur die Annahme der Ungeordnetheit der Bewegung bewährt.

Im Speziellen hat sich ergeben, daß orange Silberpartikel den Radius 10—13 . 10^{-6} cm, orangegelbe 9—10, gelbe 7,5—9, gelbgrüne 7—7,5, grüne 6—7, blaue 5—6, purpurne 4—5 haben.

Der Weg zur exakten Größenbestimmung von Silberpartikeln ist also in folgenden Etappen festgelegt:

1. Die mechanische Skala (Widerstandsgesetz $f = 0$ von Stokes-Cunningham) läuft für sich allein bei Silber bis zur Größe 7 . 10^{-6} cm Radius.

2. Die optische Skala allein läuft bei Silber ca. in den Größen 13—4 . 10^{-6} cm Radius.

3. Unterhalb der Größe 7 . 10^{-6} cm Radius kombiniert man zur zweckmäßigen Kontrolle die optische und die mechanische Skala und bedient sich außerdem der direkten Messung der Brownschen Bewegung.

Eine genaue Größenbestimmung von Silberpartikeln unter ca. 4 . 10^{-6} cm Radius ist mit den derzeitigen Hilfsmitteln und Methoden noch nicht möglich.

I. Physikalisches Institut der K. K. Universität Wien.

(Eingegangen 22. Mai 1917.)

2. *Magnetische Momente im Atombau;* *von L. Vegard.*

In ein paar Aufsätzen[1]) behandelt Hr. Th. Wereide die Verbindung zwischen dem Magneton und denjenigen magnetischen Momenten, die ein Elektron in den Bohrschen Stabilitätskreisen unter gewissen Voraussetzungen veranlassen könne.

Da er nicht auf frühere Arbeiten auf diesem Gebiete hingewiesen hat, erlaube ich mir, auf eine Arbeit[2]), die ich im Mai 1915 veröffentlicht habe, aufmerksam zu machen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit die inneren Atomkerne magnetische Momente besitzen und ob solche Felder gewisse Abweichungen in der Balmerschen Serie erklären können.

Es sei auch erwähnt, daß schon Chalmers gefunden hat[3]), daß ein Elektron, das ein Winkelmoment von $h/2\pi$ besitzt, ein magnetisches Moment von fünf Magnetonen geben würde. Ein Magneton ist durch die Größe $1123{,}5/N$ definiert, wo N die Avogadrosche Zahl bedeutet.

Die Formel

$$\frac{1123{,}5}{N}\,5 = \frac{e\,h}{4\pi\,m}, \tag{1}$$

mit welcher Hr. Wereide operiert, ist also wohl bekannt. Diese zahlenmäßige Übereinstimmung kann wohl anregend wirken; aber es wäre doch verfrüht, darauf ein zu großes Gewicht zu legen.

Es ist indessen selbstverständlich, da die Relation in der Tat zahlenmäßig richtig ist, daß in ganz formaler Weise die Formel jede der vier Größen N, h, e und m zu berechnen gestattet, wenn die übrigen drei als bekannt angenommen werden, und zu richtigen Zahlenwerten führt.

---

1) Th. Wereide, Ann. d. Phys. **52**. p. 276, 283, 289. 1917.
2) L. Vegard, Phil. Mag. **29**. p. 651. 1915.
3) H. Stanley Allen, Phil. Mag. Jan. 1915.

Für die Untersuchungen der magnetischen Momente von rotierenden elektrisch geladenen Körpern habe ich mich mit Vorteil der folgenden allgemeinen Formel bedient.

$$M_g = \frac{1}{2}\frac{E}{M}\mu. \tag{2}$$

M_g ist das magnetische Moment, E die Gesamtladung und M die Gesamtmasse des Körpers und μ das Winkelmoment. Massendichte und elektrische Volumdichte sind als konstant vorausgesetzt.

Setzt man

$$E = e$$

und

$$\mu = \frac{h\tau}{2\pi}$$

(τ eine ganze Zahl), so bekommt man die dem Bohrschen Wasserstoffatom entsprechend möglichen magnetischen Momente. Es ist doch wohl fraglich, ob überhaupt die Elektronen in den Stabilitätskreisen magnetische Momente nach der Formel (2) geben; denn diese Formel gilt mit Sicherheit nur für gewöhnliche Körper.

Mit Hilfe der Formel (2) habe ich untersucht, unter welchen Bedingungen ein kugelförmiger Atomkern ein magnetisches Moment von fünf Magnetonen besitzen kann. Es wird indessen gefunden, daß eine solche Annahme zu allzu großen Werten der Energie und Rotationsgeschwindigkeit führt.

Eine andere Möglichkeit wäre die, daß man den inneren Kern als ein zusammengesetztes Gebilde betrachtet, und ein solcher Fall ist auch näher behandelt worden.

Es wird für das Wasserstoffatom die folgende Struktur angenommen:

Ein positiver Kern von der Ladung N_e wird von zwei Elektronensystemen umgeben: ein inneres mit $N-1$ Elektronen und ein äußeres von einem Elektron. Das ganze innere System soll ein magnetisches Moment von fünf Magnetonen besitzen, oder es muß

$$\sum_{1}^{N-1} m a_i^2 \omega_i = \frac{h}{2\pi} \tag{3}$$

sein, wo a_i und ω_i der Radius bzw. die Winkelgeschwindigkeit einer der inneren Elektronen bedeutet.

Durch die Annahme, daß die inneren Elektronen einen einzigen Ring bilden, findet man nach einiger Rechnung:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_i = \dfrac{a}{(N-1)^2\,(N-\frac{1}{4}\,S_{N-1})}, \\ W_i = (N-\frac{1}{4}\,S_{N-1})^2\,(N-1)^2\,W. \end{cases}$$

W_i ist die Energie der inneren Elektronen, a und W sind Radius und Energie des äußeren Elektrons im Normalzustande des Atoms und

$$S_{N-1} = \sum_{s=1}^{s=N-2} \operatorname{cosec} \frac{s\pi}{N-1}\,.$$

Eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Konstitution wäre die, daß der Radius a_i der inneren Elektronenbahn gegenüber demjenigen des äußeren Elektrons sehr klein ist, so daß das ganze innere System als Kern für das äußere Elektron betrachtet werden kann.

Diese Bedingung ist in der Tat erfüllt; denn a_i nimmt mit wachsendem N rasch ab, und eine derartige Konstitution des Kerns ist wohl nicht ausgeschlossen. Wenigstens für die schwersten Atome muß man ja zusammengesetzte Kerne annehmen; denn die radioaktiven Prozesse bestehen ja in einem Zerfall des Kerns, und die β-Strahlumwandlungen zeigen, daß der Kern teilweise aus Elektronen bestehen muß.

Die Bestimmung der Anzahl von Elektronen im Atom aus der sekundären Röntgenstrahlung und der Zerstreuung der α-Strahlen berücksichtigt nur die äußeren Elektronen, deren Anzahl gleich der Atomnummer N gefunden wird.

Die Energie des inneren Systems wird mit wachsendem N sehr groß. Dazu gehören große Frequenzen und starke Bindung, und es ist wohl denkbar, daß, den Röntgen- und α-Strahlen gegenüber, das innere System als Ganzes wirken kann.

Wir sehen somit, daß die Annahme eines inneren Elektronensystems mit einem magnetischen Moment von fünf Magnetonen gewisse typische Eigenschaften der radioaktiven Atomkerne nachahmt.

Doch können wir ebensowenig mit als ohne Kernmagnetismus die Stabilitätskreise auf Grundlage der klassischen Elektrodynamik allein eindeutig ableiten. Dies ersieht man sofort bei Betrachtung der Bahnen im magnetischen Äquatorplan.

Die Bedingung einer zirkulären Bahn für das äußere Elektron des Wasserstoffs wird:

$$\frac{m}{e^2} a^3 \omega^2 = 1 \pm \frac{h\omega}{4\pi m c} \cdot \tag{5}$$

Wir bekommen nur diese Relation (5) zwischen a und ω, und die Bestimmung der Bahn fordert noch eine Beziehung, die aber nicht in den gewöhnlichen elektrodynamischen Gleichungen gegeben ist.

Kristiania, 29. April 1917.

(Eingegangen 8. Mai 1917.)

3. *Bemerkung zu P. Gerbers Aufsatz: „Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation"; von H. Seeliger.*

Herr E. Gehrcke macht im 51. Band dieser Annalen auf eine Arbeit von P. Gerber nachdrücklich aufmerksam und behauptet im folgenden Bande (p. 415) gelegentlich eines Abdrucks der genannten Arbeit, der von „verschiedenen Seiten" gewünscht worden sei, in einer Anmerkung, daß dadurch die Perihelbewegung des Merkur „quantitativ" erklärt sei. Mich hat diese Bemerkung sehr überrascht, da mir seit 18 Jahren bekannt ist, daß die ganze Rechnung Gerbers auf einem elementaren Irrtum beruht. Dieser ist so leicht zu erkennen, daß ich bisher Anstand genommen habe ihn aufzudecken. Nunmehr scheint es aber doch nützlich zu sein weitergreifenden Mißverständnissen vorzubeugen.

Wie und mit welcher Begründung Gerber zur Aufstellung des Potentialgesetzes (p. 437)

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \tag{1}$$

gelangt, soll nicht erörtert werden und es wird genügen darauf hinzuweisen, wie die Ableitung der allein in der Richtung des Radiusvektors wirkenden Kraft R auf ein merkwürdiges Verkennen des Sinnes der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Form hinausläuft: Verwechslung der beiden Funktionen lebendige Kraft und Potential, Außerachtlassung des Umstandes, daß das Potential nicht von den Geschwindigkeiten abhängen darf usw. Hätte Gerber das so vielfach behandelte Webersche elektrodynamische Gesetz zur Probe verwendet, so hätte er wohl sicher seinen Irrtum bemerken müssen, denn dieses hat bekanntlich das Potential

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

und ebenso bekannt ist, daß die Kraftkomponente R gegeben ist durch

$$R = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

während Gerbers Vorschrift

$$R = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial r'}\right)$$

auf Webers Potential angewendet ergibt

$$R = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Es würde also eine säkulare Perihelbewegung, die bekanntlich im wesentlichen durch das 2. Glied in der Klammer bestimmt wird, im verkehrten Sinne stattfinden. Gerber findet durch die falsche Rechnung für sein Potential (1)

$$R = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{6r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Man sieht daraus ohne jede Rechnung, daß sich danach in der Tat eine Perihelbewegung des Merkur in einem Betrage, der nahezu dem empirisch gefundenen gleichkommt, ergibt, weil bekanntlich aus dem Weberschen Gesetz nur ein Drittel dieses Betrages hervorgeht.

Ebenso leicht, wie sich ergeben hat, daß der Ausdruck Gerbers für R ganz und gar nicht dem Potential (1) entspricht, ist der richtige Ausdruck zu erlangen. Hält man daran fest, daß (1) nur eine Kraftkomponente R ergeben soll, so findet sich selbstverständlich

$$X = R\frac{x}{r}, \quad Y = R\frac{y}{r}, \quad Z = R\frac{z}{r},$$

wo x, y, z bzw. X, Y, Z rechtwinklige Koordinaten und Kraftkomponenten bedeuten. Das Potential hat man der Arbeit gleichzusetzen, d. h. es ist

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r'}\cdot\frac{dr'}{dt},$$

wo $r' = \frac{dr}{dt}$ und da $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, hat man

$$R\frac{dr}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r'}\frac{dr'}{dt}.$$

Das Potential (1) ergibt hiernach

$$R = -\frac{\mu}{r^2}\left\{1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left[\frac{2}{c}\frac{r}{r'} + \frac{6}{c^2}r\right]\frac{d^2r}{dt^2}\right\}.$$

R hat also kaum eine Ähnlichkeit mit dem von Gerber gefundenen, es enthält auch die erste Potenz von c, das 3. Glied ist positiv, gibt also eine negative Perihelbewegung und außerdem kommt dr/dt einmal im Nenner vor.

München, 29. Mai 1917.

(Eingegangen 31. Mai 1917.)

4. *Zur Theorie der Beugung an metallischen Schirmen;*

von Paul S. Epstein.

§ 1. Über den obigen Gegenstand hat neuerdings[1]) R. Schachenmeier drei Abhandlungen veröffentlicht[2]), von denen die erste eine allgemeine Beugungstheorie für Schirme von beliebiger Form begründen soll, die beiden anderen Anwendungen dieser Theorie auf Sonderfälle enthalten. So anregend namentlich die erste Arbeit (im Folgenden mit l. c. zitiert) in einigen mathematischen Einzelheiten ist, machen sich bei genauerem Eingehen auf dieselbe doch schwere Bedenken geltend, ob die in ihr behandelte Aufgabe mit den Beugungsproblemen der Optik etwas zu tun hat.

Zunächst wollen wir die Schachenmeiersche Problemstellung ausführlich darlegen. Es wird die folgende zweidimensionale Aufgabe betrachtet: *Ein Strahlenbündel von der Öffnung $\pi/2$ ist, aus dem Unendlichen kommend, auf einen Punkt der den Schirm begrenzenden Kurve konzentriert, wobei die Polarisationsebene des Bündels in der Bildebene liegt.* Schachenmeier stellt an die Spitze seiner Theorie die drei folgenden Forderungen (l. c. p. 8) für die Funktion Φ, welche den gesamten Schwingungszustand außerhalb des Schirmes darstellen soll:

1. Φ muß der Schwingungsgleichung genügen und eine reinperiodische Funktion der Zeit sein.

2. Φ muß an der Schirmoberfläche verschwinden (d. h. Schachenmeier beschränkt sich auf die Theorie vollkommen reflektierender Schirme).

3. In dem Gebiet der einfallenden Strahlen (d. h. in einem Sektor von der Öffnung $\pi/2$) muß Φ in hinreichend großer

1) Vgl. Anmerkung 1) zu p. 42.

2) R. Schachenmeier, Zur mathematischen Theorie der Beugung an Schirmen von beliebiger Form. Karlsruhe 1914; Ann. d. Phys. 45. p. 1109. 1914; 46. p. 1009. 1915

Entfernung vom Brennpunkt des Bündels die einfallende Welle beliebig genau darstellen.

Ferner wählt Schachenmeier den auf der Begrenzung des Schirmes liegenden Brennpunkt des einfallenden Bündels als Ursprung eines Polarkoordinatensystems (r, φ) und setzt die Lösung Φ in Form einer Reihe von Produkten Besselscher Funktionen des Argumentes kr (k bedeutet die Wellenzahl

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{c},$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge im Vakuum, n die Frequenz ist) und trigonometrischer Funktionen an. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir, wie üblich, den komplexen Zeitfaktor e^{int} abspalten und erhalten die Reihe in der Form

$$(1) \qquad u(r, \varphi) = \sum_0^\infty J_n(kr)\,(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Die eigentliche Lösung ist dann

$$(2) \qquad \Phi = \Re e\,(u \cdot e^{int}),$$

wobei $\Re e$ bedeutet, daß von der eingeklammerten Größe der reelle Teil zu nehmen ist. Von dieser Reihe setzt Schachenmeier im Weiteren voraus, *daß sie für beliebig große Werte von r konvergiert.* Dies ist, wie wir sehen werden, für das Verhalten der Funktion $u(r, \varphi)$ nicht weniger charakteristisch als *der Umstand, daß im Ansatz von* Schachenmeier *andere Zylinderfunktionen als die* Besselschen *nicht auftreten.*

Wenn wir zur Kritik dieser von Schachenmeier gestellten Forderungen übergehen, so fällt uns zunächst auf, daß er von einer Bedingung, deren Berücksichtigung man bis jetzt für unbedingt nötig hielt, um erst ein Beugungsproblem als Randwertaufgabe vollständig zu definieren, überhaupt nicht spricht. Wir meinen die sogenannte „Ausstrahlungsbedingung", deren physikalische und mathematische Unerläßlichkeit namentlich von Sommerfeld[1]) ausführlich dargelegt wurde, und auf deren Inhalt wir weiter unten eingehen.

Dagegen scheint uns die dritte Bedingung von Schachenmeier den Resultaten der Rechnung vorzugreifen und zum

1) A. Sommerfeld, Jahresber. d. deutschen Mathematikerver. 21. p. 309. 1912.

Mindesten überflüssig zu sein.[1]) Dieser Punkt ist indessen von untergeordneter Bedeutung, und wir werden im Folgenden nur die Frage prüfen, ob der Ansatz (1) die Ausstrahlungsbedingung befriedigt oder auch nur mit derselben vereinbar ist.

§ 2. Um besser übersehen zu können, welche physikalischen Folgen der von Schachenmeier gemachte Ansatz (1) nach sich zieht, ist es vorteilhaft, das durch $u(r, \varphi)$ gegebene gesamte Strahlungsfeld in zwei Bestandteile zu zerlegen: die einfallende Welle und die Störungswelle

$$u = u_e + u_{st}. \tag{3}$$

Unter der Bezeichnung „einfallende Welle" versteht man den Schwingungszustand, welcher herrschen würde, wenn der beugende Schirm nicht vorhanden wäre. Die „Störungswelle" ist demnach diejenige optische Erregung, welche ihre Entstehung der Anwesenheit des Schirmes verdankt. Es ist nun klar, daß sich u_e, falls wie bei Schachenmeier keine Lichtquellen im Endlichen liegen, durch eine in der gesamten (r, φ)-Ebene konvergente Reihe vom Typus (1) darstellen läßt, da Zylinderfunktionen anderer Art als die Besselschen im Nullpunkt unendlich werden, und Unendlichkeitsstellen aus physikalischen Gründen ausgeschlossen sind.[2]) Der Ansatz (1) fordert also in Verbindung mit (3) ohne weiteres

$$u_{st} = \sum_0^\infty J_n(kr) \cdot (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \tag{4}$$

wobei nach Schachenmeier *auch diese Reihe in der ganzen (r, φ)-Ebene konvergent sein soll.*

Die in § 1 erwähnte *Ausstrahlungsbedingung* besteht nun darin, daß die Störung u_{st} im Unendlichen (r sehr groß gegen λ bei beliebigem φ) den Charakter einer vom Nullpunkt wegeilenden Welle haben muß. Die analytische Formulierung

1) Gerade im Falle von Schachenmeier nehmen die einfallende Amplitude und die Störung (vgl. § 2) nach demselben Gesetze ab (wie $1/\sqrt{r}$), und es ist nicht einzusehen, wieso das Verhältnis der ersteren zur letzteren beliebig groß werden kann.

2) Ebensowenig kann die Funktion u_e vieldeutig sein, weshalb nur ganzzahlige Indizes n in Betracht kommen. Für den uns interessierenden Fall konvergenter Strahlenbündel sind Entwicklungen von P. Debye (Ann. d. Phys. 30. p. 755. 1909) gegeben worden.

dieser Forderung gibt Sommerfeld für zweidimensionale Fälle in der folgenden Form

$$\lim_{r=\infty}\left(\sqrt{r}\,\frac{\partial u_{st}}{\partial r} - ik u_{st}\right) = 0, \quad \lim_{r=\infty} \sqrt{r}\cdot u_{st} \neq \infty.$$

Noch einfacher läßt sich die Ausstrahlungsbedingung formulieren[1]), wenn man von komplexen Werten der Wellenzahl k (etwa mit negativem imaginären Teil) ausgeht und ein reelles k nur als Grenzfall betrachtet. Dann reduziert sich die Ausstrahlungsbedingung darauf, daß u_{st} im gesamten Unendlichen der (r, φ)-Ebene verschwindet. Damit ist gemeint, daß *der absolute Betrag* $|u_{st}|$ *in jedem Punkte eines um den Ursprung mit dem Halbmesser* r *gelegten Kreises mit wachsendem* r *unter jeden noch so kleinen endlichen Wert* ε *sinkt*. Dies wird auch physikalisch anschaulich, wenn man bedenkt, daß komplexe Werte von k einer Lichtausbreitung in *absorbierenden* Medien entsprechen. Eine „ausstrahlende" Welle, die in der Umgebung des Nullpunktes endliche Amplitude hat, klingt auf ihrem Wege ins Unendliche exponentiell ab. Umgekehrt muß eine „einstrahlende" Welle im Unendlichen exponentiell unendlich groß werden, damit sie mit endlicher Amplitude im Ursprung ankommt.

Unsere Aufgabe reduziert sich demnach darauf, zu untersuchen, ob die Reihe (4) im Grenzfall sehr großer r für jedes φ verschwinden kann. Es ist leicht zu zeigen, daß dies *nicht* möglich ist: Wir setzen voraus, daß der Koeffizient c_n der Reihe (4) von Null verschieden ist, dann hat man nach Fourier

$$c_n J_n(kr) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_{st}(r, \varphi)\cos n\varphi\, d\varphi.$$

Bekanntlich ist der absolute Betrag einer Summe (bzw. eines Integrals) kleiner (oder gleich) als die Summe (das Integral) der absoluten Beträge, a fortiori gilt daher

$$|c_n \cdot J_n(kr)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |u_{st}(r, \varphi)|\, d\varphi.$$

1) Nach einer mündlichen Mitteilung von Prof. E. Hilb.

Es sei nun φ_m derjenige Wert von φ, bei welchem der Betrag $|u_{st}(r, \varphi)|$ für ein bestimmtes festgehaltenes r sein Maximum erreicht, es folgt

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}\,|c_n \cdot J_n(kr)| < |u_{st}(r, \varphi_m)|.$$

Für große Werte von kr gilt die asymptotische Darstellung

$$(6) \qquad J_n(kr) \sim \frac{\cos\left(kr - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi kr}},$$

woraus man erkennt, daß bei komplexem k die linke Seite von (5) mit wachsendem r unbegrenzt wächst. Diese Ungleichung sagt also aus, daß es auf jedem mit dem noch so großen Radius r um den Ursprung beschriebenen Kreise mindestens einen Punkt gibt, in welchem $|u_{st}|$ weit davon entfernt zu verschwinden, die Größenordnung $e^{ikr}/\sqrt{r}$ oder eine höhere hat.

Damit ist bewiesen, daß ein Schwingungspotential, welches sich durch eine in der ganzen (r, φ)-Ebene konvergente Reihe vom Typus (4) darstellen läßt, die Ausstrahlungsbedingung nicht befriedigt und daher für die Darstellung einer optischen Störungswelle ungeeignet ist. Eine Ausnahme kann man nur für den Sonderfall gelten lassen, daß sich der Schirm ins Unendliche erstreckt, dann braucht nämlich die Ausstrahlungsbedingung nur außerhalb des Schirmes, also nur in Sektoren der (r, φ)-Ebene erfüllt zu sein, und dies kann die Reihe (4), wie aus speziellen Beispielen bekannt ist, leisten. Indessen darf in diesem Fall die für das Unendliche giltige Entwickelung nur dann nach Besselschen Funktionen mit ganzzahligen Indizes angesetzt werden, wenn der vom Schirm freie Sektor den Winkel π/n (n eine ganze Zahl) einschließt. Der Ansatz (4) hat also auch hier keine allgemeine Berechtigung.

Da die asymptotischen Darstellungen der Neumannschen Funktionen

$$(7) \qquad N_n(kr) \sim \frac{\sin\left(kr - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi kr}}$$

lauten, so sind dieselben für eine Störungswelle ebenso unbrauchbar wie die Besselschen und nur eine nach Hankelschen *Zylinderfunktionen zweiter Art* fortschreitende Reihe

$$(8)\qquad u_{st} = \sum_0^\infty H_n^{(2)}(kr)\cdot(e_n\cos n\varphi + f_n \sin n\varphi)$$

genügt der Ausstrahlungsbedingung.[1]) Denn es gilt für $|kr| \gg 1$

$$(9)\qquad H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - iN_n(kr) \sim \frac{e^{-i\left(kr+\frac{2n+1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi kr}},$$

so daß (bei komplexem k mit negativem imaginärem Teil) für hinreichend großes r jedes Glied der Summe (8) exponentiell verschwindet.

§ 3. Wenn es demnach nicht möglich ist, die Störungswelle u_{st} durch eine in der gesamten (r, φ)-Ebene konvergente Entwicklung vom Typus (4) darzustellen, so ist eine solche Darstellung in Teilgebieten dieser Ebene, die nicht ins Unendliche reichen, sehr wohl möglich. In der Tat kann man ja den Nullpunkt in einen Bereich verlegen, in welchem u_{st} aus physikalischen Gründen regulär sein muß, so daß ein Auftreten der Zylinderfunktionen $H_n(kr)$ oder $N_n(kr)$, (welche im Gegensatz zu $J_n(kr)$ im Nullpunkt unendlich werden) ausgeschlossen ist, und auch gebrochene Indizes wegen der notwendigen Eindeutigkeit nicht in Frage kommen. Es entsteht die Frage, wie weit sich in diesem Fall der Konvergenzbereich von (4) erstreckt und wodurch er beschränkt wird. Um dies zu beantworten, müssen wir an einige bekannte Sätze erinnern[2]): Für die Konvergenz der Reihen (4) und (8) kommt das Verhalten der Glieder hoher Ordnung in n in Betracht $(n \gg |kr|)$, für welche im Gegensatz zu (6) und (9) die Näherungsdarstellungen gelten

$$J_n(kr) \sim \frac{(kr)^n}{2^n n!}, \qquad H_n^{(2)}(kr) \sim \frac{(n-1)!\,2^n}{(kr)^n}.$$

Die Reihe (4) konvergiert also genau in demselben Bereich wie die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty (kr)^n \left(\frac{c_n}{2^n n!}\cos n\varphi + \frac{d_n}{2^n\cdot n!}\sin n\varphi\right),$$

1) Vgl. auch die Diskussion v. Ignatowsky-Seitz (W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905; W. Seitz, Ann. d. Phys. 19. p. 554. 1906).

2) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47. p. 323. 1896.

d. h. innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, welcher bis an die nächste Singulärstelle der Funktion heranreicht.

Wir haben bereits bemerkt, daß im Medium außerhalb des Schirms Singularitäten physikalisch unzulässig sind, sie können daher nur im Innern des Schirmes liegen. Andererseits, falls dort keine Singularitäten vorhanden wären, würde Reihe (8) in beliebiger Entfernung vom Nullpunkt konvergieren, was, wie wir bewiesen haben, der Ausstrahlungsbedingung widerspricht. Wir gelangen so zu dem Satz: *Die von einem beliebigen Schirm erzeugte Störungswelle u_{st} muß notwendig Singulärstellen im Innern dieses Schirms besitzen.* (Auszunehmen ist nur der am Schlusse des § 2 erwähnte Sonderfall.)

Man könnte uns entgegenhalten, daß wir hier von längst bekannten und selbstverständlichen Dingen sprechen, indessen wird gegen diese Grundlage einer jeden Beugungstheorie immer wieder verstoßen. Der Trugschluß von Schachenmeier besteht nämlich gerade darin (l. c. p. 10), daß er in Reihe (4) die asymptotischen Darstellungen (6) einführt, welche nur für $|kr| > n$ gelten, ohne sich um die Singularitäten von u_{st} zu kümmern und ohne überhaupt die Frage aufzuwerfen, ob diese Reihe im Bereich der Anwendbarkeit der Formeln (6) noch gültig ist. Dies ist, wie wir gezeigt haben, nicht der Fall, und damit fallen auch alle von Schachenmeier gezogenen Folgerungen.

Wir wollen noch auf die Entwicklungen nach Hankelschen Funktionen vom Typus (8) eingehen, welche, wie wir gesehen haben, die Funktion u_{st} im Unendlichen darstellen. Dieselben entsprechen den Reihen nach fallenden Potenzen der Potentialtheorie und konvergieren außerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, welcher durch den von ersterem am weitesten entfernten Singulärpunkt der Funktion u_{st} hindurchgeht.

Man erkennt hieraus, daß die praktische Anwendbarkeit der Zylinderfunktionen auf Beugungsprobleme eine ziemlich beschränkte ist. Nur bei ganz spezieller Verteilung der Singularitäten läßt sich u_{st} durch eine im gesamten Äußern des Schirmes konvergente Reihe vom Typus (8) darstellen (wobei der Ursprung des Koordinatensystems ins Innere zu verlegen

ist). Ebenso selten dürften die Fälle sein, in denen man mit den beiden Entwicklungen (4) und (8) auskommt. Im allgemeinen treten in ringförmigen Gebieten außer diesen beiden noch andere Reihen, die nach Zylinderfunktionen mit gebrochenen Indizes fortschreiten, auf[1]), und dies bedeutet eine derartige Komplikation der Rechnungen, daß man zur Benutzung anderer der besonderen Form des gerade zu behandelnden Schirms besser angepaßter Entwicklungen greifen muß.

§ 4. Wir haben die Fundierung, welche Schachenmeier seiner Beugungstheorie in der ersten seiner Arbeiten gibt, für ungenügend befunden. Dementsprechend betrachten wir auch die Behauptungen, welche er in den Anwendungen dieser Theorie[2]) aufstellt, als unbewiesen, ohne jedoch ihren sachlich physikalischen Inhalt von vornherein abzulehnen. Das Resultat seiner zweiten Abhandlung faßt Schachenmeier dahin zusammen, *daß sich für jeden beliebigen vollkommen spiegelnden Schirm eine Verteilung der einfallenden (linear polarisierten) Intensität angeben läßt, bei welcher das gebeugte Licht elliptisch polarisiert ist.* Es scheint nicht sehr wahrscheinlich, daß sich das Ergebnis in dieser Allgemeinheit aufrecht erhalten lassen wird, für die Entscheidung darüber sind indessen noch weitere Untersuchungen erforderlich.[3]) Anders verhält es sich mit der dritten Arbeit, welche über die Farben kolloidaler Metalllösungen handelt, und damit ein bereits erledigtes Thema von neuem aufrollt. Von den Behauptungen dieser Arbeit ist nur soviel zuzugeben, daß ein vollkommen spiegelndes Partikel in der Tat gewisse Wellenlängen stärker zerstreuen und dadurch einen selektiven Effekt erzeugen wird. Es fragt sich nur, ob diese Selektion ausreicht, um die an kolloidalen Lösungen beobachteten sehr lebhaften Farben zu erklären. Über diese Frage besteht bereits eine umfassende Literatur[4]); der Stand-

1) Ein bekanntes Beispiel dafür bietet der von A. Sommerfeld (Math. Ann. 45. p. 263. 1894) behandelte Fall.

2) R. Schachenmeier, Zweite und dritte Abhandlung der Fußnote 2) auf p. 1109.

3) Daß in Spezialfällen elliptische Polarisation auftritt, ist bekannt. Vgl. z. B. P. S. Epstein, Beugung an einem dünnen Schirm. Dissert. München 1914. Dagegen tritt in den trivialen Fällen, die sich nach der Thomsonschen Spiegelungsmethode behandeln lassen, keine auf.

4) Eine Zusammenstellung der Literatur findet sich bei P. S. Epstein, Enzykl. d. math. Wiss. V. 3, 24. Nr. 67.

punkt, welchen jetzt Schachenmeier einnimmt, daß die „optische Resonanz" vollkommen leitender Teilchen für die Erklärung der Erscheinung genüge, wurde vor längerer Zeit von F. Ehrenhaft[1]) vertreten. Von G. Mie[2]) wurde jedoch durch eingehende theoretische Untersuchung der Beugung an kugelförmigen Goldteilchen gezeigt, daß diese Ansicht irrig ist, und daß sich die Farben nur unter Berücksichtigung der optischen Konstanten des Materials (Gold) erklären lassen. Eine Untersuchung von R. Gans[3]) über ellipsoidische Gold- und Silberteilchen rechtfertigte nachträglich die Annahme von Mie, daß die Korpuskeln in solchen Lösungen wenig von der Kugelgestalt abweichen.

Neuerdings schien die Diskussion dadurch abgeschlossen, daß Ehrenhaft[4]) in seinen letzten Publikationen den Mieschen Standpunkt rückhaltlos anerkennt. Es ist daher schwer verständlich, aus welchem Grunde Schachenmeier die bereits tote Frage zu neuem Leben erweckt.[5])

§ 5. Auf Grund alles Gesagten gelangen wir zu dem Schluß, daß die von Schachenmeier in seiner Theorie der Beugung an vollkommen reflektierenden Schirmen gemachten Ansätze, den in der Optik zu stellenden Forderungen nicht entsprechen. Seine Ausführungen haben daher weder für das Existenzproblem der optischen Beugungstheorie, noch für die Behandlung besonderer Beispiele einen unmittelbaren Wert. Dadurch halte ich es für gerechtfertigt, daß ich von einer Erwähnung der Schachenmeierschen Arbeiten in meinem Enzyklopädieartikel über „spezielle Beugungsprobleme" abgesehen habe.

Als positives Verdienst ist zugunsten Schachenmeiers die Kühnheit zu buchen, mit welcher er an die Behandlung

---

1) F. Ehrenhaft, Wien. Bericht II a, **112.** p. 181. 1903; **115.** p. 1115. 1905.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. **25.** p. 377. 1908.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. **37.** p. 881. 1912; **47.** p. 270. 1915.

4) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. **15.** p. 952. 1914; **16.** p. 227. 1915.

5) *Nachträgliche Anmerkung.* — Inzwischen wurde mir von Cl. Schäfer in einer Besprechung meines Enzyklopädieartikels (Physikal. Zeitschr. **17.** p. 216. 1916) u. a. eine zu flüchtige Darstellung dieses Gegenstandes vorgeworfen. Seine Kritik vermochte mich indessen nicht von der Notwendigkeit eines ausführlicheren Eingehens auf eine bereits begrabene Streitfrage zu überzeugen.

von in Teilintervallen des Winkelraumes (Sektoren der Ebene) verschiedenen Grenzbedingungen herantritt. Es scheint, daß die Scheu, mit welcher man derartigen Problemen bis jetzt aus dem Wege gegangen ist, übertrieben war, und aus dieser Erkenntnis wird vielleicht die mathematische Physik mutatis mutandis mittelbaren Vorteil ziehen können.

Von den Nebenergebnissen unserer kritischen Untersuchungen über zweidimensionale Beugungsprobleme mit Schirmen von endlicher Ausdehnung sei Folgendes hervorgehoben:

1. Ein Schwingungspotential, welches durch eine in der ganzen (r, φ)-Ebene konvergente, nach Besselschen Funktionen von ganzzahligem Index fortschreitende Entwicklung darstellbar ist, erfüllt nicht die „Ausstrahlungsbedingung" und ist daher für eine Störungswelle u_{st} ungeeignet.

2. In einem regulären Punkte kann man für u_{st} eine solche Entwicklung ansetzen. Jedoch ist sie nur innerhalb eines Kreises um diesen Punkt konvergent, welcher bis an die nächste Singulärstelle der Funktion u_{st} heranreicht.

3. Die von einem beliebigen Schirm erzeugte Störungswelle hat notwendig im Innern dieses Schirms Singularitäten.

München, Oktober 1915.[1])

1) Die Publikation wurde auf Wunsch von Hrn. Schaehenmeier verschoben, da er im Felde steht und bis jetzt keine Zeit für wissenschaftliches Arbeiten hatte.

(Eingegangen 2. Juni 1917)

5. *Zur Theorie der Beugung an metallischen Schirmen.*
Erwiderung auf die gleichnamige Veröffentlichung von P. Epstein;
von R. Schachenmeier.

I. Die von Epstein unter gleicher Überschrift[1]) gegen meine Beugungsarbeiten[2]) erhobenen Einwände sind bereits dadurch widerlegt, daß der einzige darin enthaltene analytisch-exakte Beweis, auf welchem sämtliche übrigen Behauptungen fußen, fehlerhaft ist. Dieser Beweisversuch wird von Epstein in § 2 unternommen. Epstein schließt folgendermaßen:

Es ist

$$\frac{1}{2}\,|c_n J_n(kr)| \leqq |u_{st}(r,\varphi_m)| \qquad \text{(Gleich. (5) bei E.),} \tag{1}$$

und für großes r gilt asymptotisch

$$J_n(kr) \sim \frac{\cos\left(kr - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi kr}}. \qquad \text{(Gleich. (6) bei E.)} \tag{2}$$

Weil somit, bei komplexem k, $J_n(kr)$ mit r unendlich wird wie

$$\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \tag{3}$$

so wird wegen (1) auch

$$|u_{st}(r,\varphi_m)| \tag{4}$$

unendlich, mindestens wie (3). Hierauf beruhen alle weiteren Ausführungen Epsteins.

Dieses Resultat ist aber dann *nicht* gültig, wenn k reell ist. Vielmehr wird dann mit unendlichem r (3) und (2) gleich Null. In meinen sämtlichen Beugungsarbeiten tritt nur reelles k auf, da ich das Medium außerhalb des Schirmes als nicht absorbierend annehme. Epstein begeht also den Trugschluß, daß er sein für komplexes k abgeleitetes Ergebnis auf den Sonderfall eines reellen k überträgt, wo dasselbe ungültig ist.

1) Vgl. dieses Heft, p. 33.

2) „Z. math. Theorie d. Beugung usw." Karlsruhe 1914; „Über den Polarisationszustand usw." Ann. d. Phys. 45. p. 1109 ff. 1914; „Färbung des Lichtes durch Metallpartikel". Ann. d. Phys. 46. p. 1009 ff. 1915.

Mit diesem Beweis fallen ohnehin auch alle übrigen, mehr subjektiven Behauptungen Epsteins. Sie sollen im folgenden trotzdem noch in großen Zügen besprochen werden, um, wenn möglich, auch seine gefühlsmäßigen Bedenken zu zerstreuen, welche meines Erachtens nur daher rühren, daß das Problem von einer ganz anderen Seite her, als erwartet, bewältigt wird.

I. Der Inhalt des § 1 bei Epstein besteht im wesentlichen in der Behauptung, daß meine Arbeit „von der Ausstrahlungsbedingung überhaupt nicht spricht." Diese Bedingung besagt nach Epstein (vgl. seinen § 2), daß „die Störung im Unendlichen den Charakter einer vom Nullpunkt wegeilenden Welle haben muß." In meiner zweiten Arbeit, „Über den Polarisationszustand usw.", stelle ich nun an das Schwingungspotential Z p. 1111—1113 die Forderung, daß es in großer Entfernung vom Nullpunkt eine Superposition sein soll von auf ihn zueilenden und von ihm wegeilenden Wellen. Die letzteren stellen die „Störung" dar. Die Ausstrahlungsbedingung ist also bei meinem Ansatz für die Störung sehr wohl, streng berücksichtigt.[1]) In etwas modifizierter Gestalt wird die Ausstrahlungsbedingung in meiner ersten Arbeit („Zur Theorie der Beugung usw.") eingeführt. Sie ist nämlich implizite enthalten in der Bedingung 3, p. 8. Nach derselben dürfen im Sektor $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ überhaupt keine vom Nullpunkt wegeilende Wellen auftreten, was ein Unterfall der Ausstrahlungsbedingung ist. Infolge der speziellen geometrischen Anordnung ist das Problem schon durch diese Bedingung, zusammen mit 1. und 2., eindeutig bestimmt. In allen übrigen Sektoren ist der Nachweis, daß die Störung für große r den Charakter einer wegeilenden Welle hat, p. 6/7 u. 10 ausführlich erbracht (vgl. z. B. insbesondere p. 10 die fünf letzten Zeilen). Meine Bedingung 3. ist also auch durchaus nicht „überflüssig" noch „greift sie den Resultaten vor". Das Beugungsproblem ist lediglich deshalb in die Gestalt der Bedingungen 1.—3. gekleidet worden, um es für die nachfolgende mathematische Behandlung bequem zu machen.

Epstein befindet sich also im Irrtum, wenn er in Zweifel zieht, daß mein „Ansatz die Ausstrahlungsbedingung

1) Leider habe ich die außerordentlich elegante Formulierung Sommerfelds, die den physikalischen Inhalt dieser Bedingung sehr klar heraushebt, nicht benutzt, weil sie mir damals nicht bekannt war.

befriedigt oder auch nur mit derselben vereinbar ist." Der positive Beweis, den er seiner Behauptung in seinem § 2 zu geben versucht, enthält den in I. aufgedeckten Trugschluß, ist also auch bereits unmittelbar widerlegt....

III. In seinem § 8 stellt Epstein zunächst den Satz auf, daß die „Störung" u_{rr} notwendig Singularitäten im Inneren des Schirmes besitzen müsse. Ich habe mich zu dieser Frage überhaupt nirgends geäußert und tue es auch jetzt nicht, während Epstein anzunehmen scheint, daß ich „gegen diese Grundlage" verstoße. Wenn meine *Reihen* im Inneren des Schirmes konvergent bleiben[1]), so ist das möglich, weil sie keinerlei Anspruch darauf erheben, auch im *Inneren* irgendwelchen optischen Vorgang darzustellen. Um es noch mehr verständlich zu machen, weshalb alles Suchen nach Singularitäten bei meinen Lösungen ergebnislos verlaufen muß, sei noch darauf hingewiesen, daß dieselben nur Annäherungen von beliebiger Genauigkeit sein wollen, wie z. B. p. 2, 42 u. 43 von „Theorie der Beugung usw." ausdrücklich bemerkt ist.

Daß meine Reihen trotzdem Singularitäten aufweisen müßten, folgert Epstein wieder mit Hilfe des in I. aufgezeigten Trugschlusses, womit seine Behauptung auch unmittelbar widerlegt ist.

Epstein empfiehlt am Schluß seines § 8 die Hankelschen Funktionen statt der Besselschen zu benutzen, kommt aber selbst zu dem Ergebnis, daß sie nur in seltenen Fällen anwendbar sind ebenso wie die gleichzeitige Benützung beider Funktionsarten in verschiedenen Gebieten der Ebene. Meine an den Besselschen Funktionen entwickelten Methoden lassen sich auch auf die Hankelschen sowie auf Besselsche Funktionen mit gebrochenen Indizes u. a. anwenden. Es werden damit wahrscheinlich Fälle behandelt werden können, die den Besselschen Funktionen unzugänglich sind.

IV. Da die Fundierung meiner Theorie, wie gezeigt, durch die Epsteinsche Kritik nicht berührt wird, so ist Epstein auch nicht berechtigt, in seinem § 4 meine Anwendungen dieser Theorie als durch seine Kritik der Fundierung widerlegt zu bezeichnen.

---

1) Vgl. l. c. p. 9, Zeile 1—6 und den ausführlichen Beweis in § 10. Die Arbeit setzt von der Reihe nicht „voraus, daß sie für beliebig große Werte von r konvergiert", wie E. in seinem § 1 sich ausdrückt, sondern sie *beweist* es. Damit entfallen auch seine in § 3 geäußerten Bedenken bezüglich der Anwendbarkeit seiner Formeln (6).

Überdies schreibt mir Epstein in „Polarisationszustand usw." eine Behauptung zu, die ich in dieser Allgemeinheit nicht aufgestellt habe, nämlich „daß sich für *jeden beliebigen* ... Schirm eine Verteilung ... angeben läßt, bei welcher das gebeugte Licht elliptisch polarisiert ist." Ich habe dies aber nur unter der Voraussetzung behauptet, daß der Schirm die in „Polarisationszustand usw." p. 1116 angezogenen Bedingungen erfüllt. In dieser Form ist der Satz durch die zitierte Arbeit *bewiesen*.

Was schließlich meine Arbeit „Färbung des Lichtes durch Metallpartikel" angeht, so glaube ich nicht, daß aus derselben irgendwelche polemische Absicht herausgelesen werden kann, wie sie Epstein mir zuschreibt. Auch habe ich nicht behauptet, „daß die optische Resonanz vollkommen leitender Teilchen für die Erklärung der Erscheinung genüge." Vielmehr ist meine Theorie gerade *so* angelegt, daß sie leicht auch auf Berücksichtigung der optischen Konstanten ausgedehnt werden kann. Wohl aber glaube ich, auch schon in dem behandelten Falle vollkommener Leitfähigkeit eine *neue* Seite des Problems aufgezeigt zu haben. Denn der darin nachgewiesene selektive Effekt ist doch wesentlich verschieden von der bisherigen Art eine „optische Resonanz" einzuführen. Außerdem gilt meine Theorie nicht nur für die bisher hauptsächlich behandelten kreisförmigen und elliptischen, sondern in gewissen Grenzen für ganz beliebige Querschnitte des Teilchens. Der Zweck der Arbeit war also, eine *objektive* wissenschaftliche *Tatsache* vorzubringen.[1])

V. Die Epsteinsche Kritik erweist sich im allgemeinen wie im besonderen als völlig unhaltbar. *Ich erhalte daher meine sämtlichen Ausführungen über das Beugungsproblem in vollem Umfange aufrecht.*

Im Felde, Anfang Juni 1917.

1) Bezugnahme auf die vorhandene Literatur war mir leider zur Zeit der Veröffentlichung, nach Kriegsausbruch, unmöglich, da dieselbe für mich unerreichbar war. Das war wohl entschuldbar, da meine Theorie den Theorien von Mie, Gans, Ehrenhaft usw. durchaus nicht widerspricht, sondern sehr wohl mit ihnen verträglich ist.

(Eingegangen 16. Juni 1917.)

6. *Das Nernstsche Theorem und die Wärmeausdehnung fester Stoffe;* von *Max B. Weinstein.*

(Zweite Mitteilung.)

In einer ersten Mitteilung[1]) habe ich gezeigt, daß aus der Planckschen Auffassung des Nernstschen Theorems nicht mit Notwendigkeit folgt, daß die Wärmeausdehnung der Stoffe, für die es gilt, im absoluten Nullpunkt der Temperatur Null ist. Ich möchte jetzt das gleiche dartun für Nernsts eigne Darstellung seines Theorems. Geht man mit Nernst vom Helmholtzschen Satz

$$U = A - \vartheta \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\right)_v \tag{1}$$

aus, wo U, A, ϑ innere Energie, maximale Arbeit, absolute Temperatur angeben, so folgt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\vartheta = \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_\vartheta - \vartheta \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\right)_v\right]_\vartheta .$$

Aus den bekannten Gleichungen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\vartheta = -p + \vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v , \quad \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_\vartheta = -p$$

ergibt sich dann

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\right)_v\right]_\vartheta . \tag{2}$$

Da nach dem Nernstschen Theorem

$$\lim \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\right)_{v,\,\vartheta=0} = 0$$

sein soll, so folgert Nernst, daß auch

$$\lim \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{v,\,\vartheta=0} = 0$$

1) M. B. Weinstein, Ann. d. Phys. 52. p. 218. 1917.

und dann, indem $(\partial v / \partial p)_\vartheta$ für $\vartheta = 0$ als von Null verschieden angesehen wird, daß auch

$$\lim \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_{p, \vartheta = 0} = 0$$

sein muß.

Indessen braucht $\lim (\partial (\partial A / \partial \vartheta)_v / \partial v)_\vartheta$ nicht notwendig Null zu sein, wenn auch $\lim (\partial A / \partial \vartheta)_v$ Null ist. Man kann das an einer Menge von Funktionen dartun. Ich nenne nur eine der einfachsten. Sei v_0 das Volumen für $\vartheta = 0$, und es werde

$$A = A_1 + (v - v_0) A_2$$

gesetzt mit der Bedingung

$$\lim \left(\frac{\partial A_1}{\partial \vartheta}\right)_{v, \vartheta = 0} = 0,$$

so ist auch

$$\lim \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\right)_{v, \vartheta = 0} = 0$$

also das eigentliche Nernstsche Theorem erfüllt, und dabei kann $\lim (\partial A_2 / \partial \vartheta)_v$ durchaus von Null verschieden sein. Dann aber hat man

$$\lim \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{v, \vartheta = 0} = \lim \left(\frac{\partial A_2}{\partial \vartheta}\right)_{v, \vartheta = 0},$$

also von Null verschieden, so daß auch die Wärmeausdehnung im absoluten Nullpunkt der Temperatur nicht Null zu sein braucht, was sie anscheinend — ich darf auf meine Abhandlungen über die Zustandsgleichung der festen Körper verweisen — bei vielen Stoffen in der Tat auch nicht ist. Ich brauche wohl nicht hervorzuheben, daß der obige Ansatz für A nur ein Beispiel sein soll.

Ferner ergibt sich, daß in Nernsts eigner Fassung seines Theorems dieses unter *allen* Umständen streng richtig sein kann. Früher hatte sich gezeigt, daß bei Plancks Fassung dieses Theorem nur näherungsweise Giltigkeit haben würde, falls die Wärmeausdehnung in der Tat im absoluten Nullpunkt der Temperatur nicht Null sein sollte. Demnach dürfte ideell Nernsts eigne Fassung seines Theorems vor der Planckschen vorzuziehen sein.

(Eingegangen 16. Juni 1917.)

7. *Über die Töne von Pfeifen mit Querschnittsänderungen;* von *P. Cermak.*

Nach den bisherigen Erfahrungen und Theorien ist die Tonhöhe einer gedeckten Pfeife von kreisförmigem oder quadratischem Querschnitt in weiten Grenzen unabhängig von der Röhrenweite. Und doch zeigt ein ganz einfacher Versuch, daß da eine Einschränkung zu machen ist: das gelte nur so lange, als der Querschnitt der Pfeife keine plötzliche Veränderung erfährt. Zwar gilt auch für die gedeckten Kegelpfeifen mit recht guter Annäherung die Beziehung $N = c/(4L)$, doch erfolgt bei ihnen die Querschnittsänderung im Verlaufe des Rohres nicht plötzlich, sondern gleichmäßig und stetig. Nimmt man aber etwa einen Lampenzylinder, wie er für Petroleumrundbrenner üblich ist, zur Hand und erregt von seinen beiden Enden aus den Ton der gedeckten Pfeife, so wird auch ein nicht sehr geschultes Ohr merken, daß dieser Zylinder zwei ganz verschiedene Töne gibt, je nachdem ob man das weite oder das enge Ende abdeckt.

Von dieser Erfahrung ausgehend untersuchte ich den Einfluß solch plötzlicher Querschnittsänderungen auf die Tonhöhe von Pfeifen und stellte mir aus Messingröhren von kreisförmigem und quadratischem Querschnitt Pfeifen verschiedenster Form her (angedeutet durch die verschiedenen Typen der Fig. 1), wobei die Gesamtlänge, die Länge und Weite der einzelnen

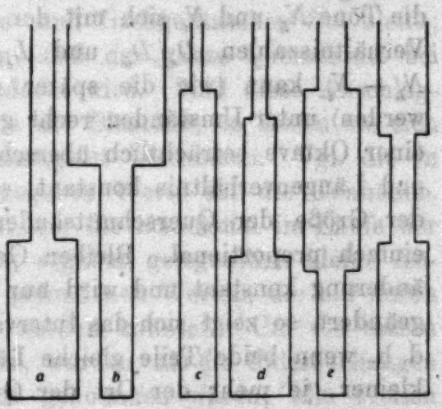


Fig. 1.

Teile, die Zahl, Form und Aufeinanderfolge der Querschnittsänderungen abgewechselt wurden. Wesentlich bei der Herstellung solcher Pfeifen ist, daß die ineinander gefügten Teile genau abgeschliffen und sorgfältig verlötet sind, denn die im weiteren dargestellten Gesetzmäßigkeiten behalten ihre Gültigkeit nur solange, als es sich um *plötzliche* Querschnittsänderungen handelt.

Beschränkt man sich zunächst auf Röhren, die eine einzige Querschnittsänderung aufweisen, bei denen aber Gesamtlänge, Länge und Weite der einzelnen Teile verschieden gewählt sein können, so ist ihnen allen als *gedeckten Pfeifen* gemeinsam, daß man mit ihnen zwei verschiedene Grundtöne erzeugen kann. Bezeichnen wir fortan den aus der Formel $e/4L$ sich ergebenden Ton mit N_0 (d. i. also den vom Querschnitt unabhängigen Ton eines einfachen Rohres der Länge L), so erhält man bei der gleichlangen gedeckten Pfeife *mit* Querschnittsänderung gegenüber N_0 eine Tonerhöhung, wenn sie vom weiten zum engen, eine Tonerniedrigung, wenn sie vom engen zum weiten Ende hin angeblasen wird. Die beiden Töne seien im weiteren mit N_h und N_t bezeichnet. Bezeichnen wir noch mit L_e und L_w die Länge des engen und des weiten Teiles, mit D_e, D_w die Durchmesser, bzw. die Seitenlängen der quadratischen Querschnitte, so zeigen schon einfache Hörproben, daß die Töne N_h und N_t sich mit der Gesamtlänge L und mit den Verhältniszahlen D_e/D_w und L_e/L_w ändern. Die Differenz $N_h - N_t$ kann (wie die später angeführten Tabellen zeigen werden) unter Umständen recht groß werden und das Intervall einer Oktave beträchtlich überschreiten. Bleiben Gesamtlänge und Längenverhältnis konstant, so wächst diese Differenz mit der Größe der Querschnittsänderung, sie ist ihr aber nicht einfach proportional. Bleiben Gesamtlänge und Querschnittsänderung konstant und wird nur das Verhältnis der Teillängen geändert, so zeigt sich das Intervall am größten für $L_e/L_w = 1$, d. h. wenn beide Teile gleiche Länge haben, und wird um so kleiner, je mehr der Ort der Querschnittsänderung an eines der Pfeifenenden heranrückt. Doch sind dabei die Differenzen $N_h - N_0$ und $N_0 - N_t$ durchaus nicht immer gleich groß. Schließlich läßt sich mit einfachen Hörversuchen schon recht exakt feststellen, daß bei gleich bleibendem D_e/D_w und L_e/L_w

das Intervall der beiden Töne, also N_h/N_t, unabhängig von der Gesamtlänge L der Pfeife ist. Das kann nur sein, wenn beide Töne einzeln der Länge proportional sind. Man ist daher zu der Annahme berechtigt, daß sowohl N_h wie N_t proportional N_0 sind.

Erst allmählich gelang es mir, in die Verwirrtheit dieser Erscheinungen einige Ordnung zu bringen und eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten, die im weiteren dargestellt werden sollen, ausfindig zu machen und schließlich konnte ich auch eine empirische Formel aufstellen, die alle diese Ergebnisse und noch weitere unten angeführte umfaßt und recht genau darzustellen vermag.

Die Tonhöhen bestimmte ich durchwegs mit dem Monochord. Da nun die Tonhöhe einer gedeckten Pfeife durchaus verschieden gefunden wird, je nachdem mit welcher Stärke man das Rohr anbläst, und da weiter solch zusammengesetzte Pfeifen um so schwerer und undeutlicher auf Anblasen ansprechen, je größer die Differenz ihrer Querschnitte ist, so wurde, um immer gleichmäßige Tonerregung zu erhalten, der Ton der gedeckten Pfeife dadurch erzeugt, daß das Rohr mit dem einen oder anderen Ende kräftig auf den flachsten Teil der Mittelhand aufgeschlagen wurde. Man kann sich leicht überzeugen, daß man auf solche Weise immer den gleichen Ton erhält, der von Anblase- und Zischgeräuschen frei bleibt; man muß nur dafür sorgen, daß der ganze Querschnitt bei dem Schlage gleichzeitig bedeckt wird. Sind diese Anschlagtöne auch nicht so laut wie die Blastöne, so lassen sie sich doch mit viel größerer Genauigkeit bestimmen. Vgl. die in den folgenden Tabellen angegeben Werte für die Tonhöhen. Neubestimmungen der Tonhöhen, die manchmal im Laufe der Untersuchungen nötig waren, ergaben gelegentlich kleine Abweichungen von den früher gefundenen Werten, die nur durch Temperatureinflüsse erklärt werden konnten. Um von diesen Schwankungen frei zu werden, wurden, als die Untersuchungen zu einem gewissen Abschluß gekommen waren, alle Pfeifen nochmals durchgemessen bei der gleichen Temperatur, und nur diese Werte finden sich in den Tabellen. Die Längen und Weiten der Pfeifenteile wurden mit einer guten Schubleere, die auch Tiefen zu messen gestattete, an den fertigen Pfeifen ge-

messen. Zur Berechnung der Größe N_0 braucht man die Schallgeschwindigkeit. Da es immer einigermaßen unsicher ist, welche Werte dafür einzusetzen sind, wegen der Änderungen, die Temperatur und Röhrenweite bedingen, wurde an einigen engen und weiten Röhren der hier verwendeten Länge die Tonhöhe mit dem Monochord möglichst genau bestimmt und dann aus $N = c/4L$ der Wert von c bestimmt und für die übrigen Pfeifen benutzt. Es ergab sich für die unten berechneten N_0 die Schallgeschwindigkeit zu 32 589 cm als ein Mittelwert, der bei allen den hier verwendeten Röhrenweiten von 0,6—2,5 cm brauchbar blieb. Auf solche Weise konnte ich bei den gedeckten Pfeifen auch die ohnehin recht kleine Wertheimsche Längenkorrektur vermeiden.

Tonhöhe bei verschieden großer Querschnittsänderung. Die Vorversuche hatten gezeigt, daß die Erniedrigung bzw. Erhöhung (gegen N_0 gemessen) unter sonst gleichen Bedingungen dann am größten ausfällt, wenn das Verhältnis $L_e/L_w = 1$ wird. Genauere, weiter unten angeführte Versuche werden zeigen, daß das nur angenähert gilt; zunächst aber kann man diesen Befund als richtig annehmen und nun einmal verschiedene Pfeifen, bei denen dieses Verhältnis gleich eins ist, die aber verschieden große Querschnittsänderungen aufweisen, miteinander vergleichen. Da einerseits nicht alle diese Pfeifen die gleiche Länge aufwiesen, andererseits aber nach den Vorversuchen sowohl N_t wie N_h proportional N_0 sind, so konnten die für sie gefundenen Tonhöhenwerte alle auf die gleiche Normallänge von 12 cm umgerechnet werden. Diese so erhaltenen Werte wurden nun graphisch mit dem Verhältnis D_e/D_w in Zusammenhang gebracht. Die günstigste, am leichtesten durch eine Gleichung darstellbare Beziehung ergab sich, wenn man in ein Koordinatensystem auftrug als Ordinaten die auf 12 cm Länge umgerechneten Schwingungszahlen, als Abszissen die Größe $(1 - D_e/D_w)$. In Fig. 2 ist das ausgeführt für die Erniedrigungstöne N_t. Dabei beziehen sich die Kreuzchen auf Pfeifen mit quadratischem, die Punkte auf solche mit kreisförmigem Querschnitt. Man sieht den Punkten schon an, daß sie ungefähr auf einer Parabel höherer Ordnung liegen.

Legt man nun in dem erhaltenen Bilde den Koordinaten-

ursprung in den Punkt ($1 - D_e/D_w = 0$; $N_t = 679$), so stellt die ausgezogene Kurve folgende Gleichung dar:

$$\left(\frac{N_0 - N_t}{N_0}\right)^3 = \left(1 - \frac{D_e}{D_w}\right)^4 .$$

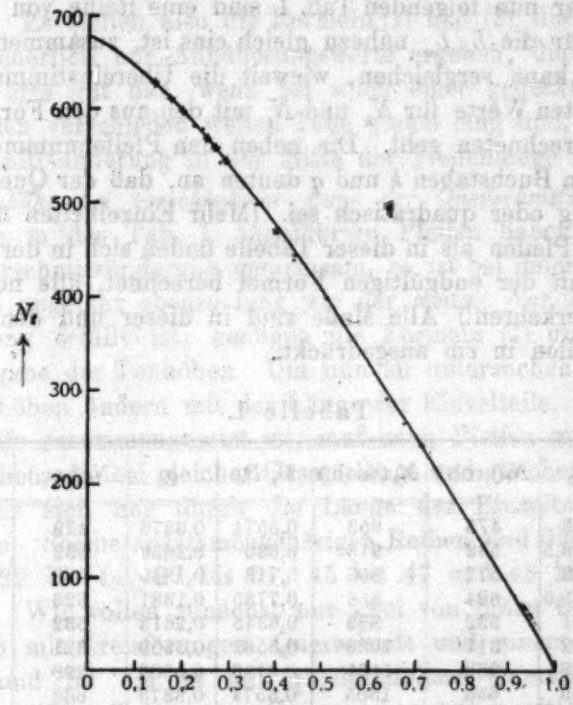


Fig. 2.

Daraus würde folgen:

$$N_t = N_0 \left\{1 - \left(1 - \frac{D_e}{D_w}\right)^{4/3}\right\}$$

oder wenn man setzt

$$\left(1 - \frac{D_e}{D_w}\right)^{4/3} = \varrho ,$$

so wird

(1) $$N_t = N_0 \,(1 - \varrho).$$

Auf ganz entsprechendem Wege erhält man für die Erhöhungstöne ein hier nicht abgedrucktes Bild, das dargestellt wird durch die Gleichung:

$$N_h = N_0 \left\{1 + \left(1 - \frac{D_e}{D_w}\right)^{4/3}\right\}$$

oder

$$N_h = N_0 \,(1 + \varrho). \tag{2}$$

In der nun folgenden Tab. 1 sind eine Reihe von solchen Pfeifen, für die L_e/L_w nahezu gleich eins ist, zusammengestellt und man kann vergleichen, wieweit die Übereinstimmung der beobachteten Werte für N_h und N_t mit den aus den Formeln (1) und (2) berechneten geht. Die neben den Pfeifennummern eingetragenen Buchstaben k und q deuten an, daß der Querschnitt kreisförmig oder quadratisch sei. (Mehr Einzelheiten über die einzelnen Pfeifen als in dieser Tabelle finden sich in der Tab. 2, wo sie, mit der endgültigen Formel berechnet, alle noch einmal wiederkehren!) Alle Maße sind in dieser und den folgenden Tabellen in cm ausgedrückt.

Tabelle 1.

Nr.	N_0	N_t (beob.)	N_h (beob.)	D_e/D_w	ϱ	N_t (ber.)	N_h (ber.)
5 k	723	475	953	0,5574	0,3373	479	967
10 k	723,5	532	913	0,630	0,2656	532	916
11 k	722	577	859	0,718	0,1849	588	856
12 k	725,5	624	836	0,7735	0,1381	626	826
13 k	721	532	889	0,6345	0,2613	532	909
14 k	722	311	1088	0,3562	0,5559	321	1123
16 k	722	282	1135	0,3196	0,5986	290	1145
21 k	1009	656	1305	0,5574	0,3373	668	1348
23 k	508	334	676	0,5574	0,3373	336,5	679
24 q	699	616	768	0,798	0,1185	616	782
25 q	692	580	821	0,747	0,1601	582	802
26 q	714	496	926	0,596	0,2987	501	927
28 k	724	428	1012	0,4866	0,4111	426	1022
37 q	677	558	791	0,730	0,1745	559	795
46 q	677	627	737	0,857	0,0748	626	728
49 q	678	610	750	0,825	0,0979	612	744
51 q	679	544	816	0,707	0,1946	546	809
57 k	679	242	1061	0,2803	0,6450	242	1117
58 k	401,5	342	466	0,758	0,1508	341	462

Die in der Tabelle angeführten N_0 sind nicht wie die in Fig. 2 eingezeichneten auf die Normallänge von 12 cm umgerechnet worden, sondern gehören zu den aus der Tab. 2 ablesbaren Werten der Gesamtlänge der betreffenden Pfeifen. Man sieht, daß die Übereinstimmung der berechneten mit den

beobachteten Werten von N_t und N_h eine über Erwarten gute ist und dabei sind in die Tabelle eingetragen sowohl Pfeifen, die bei ungefähr gleichem N_0 verschiedenes D_e/D_w aufweisen, als auch solche, bei denen bei ungefähr gleichem D_e/D_w die Länge beträchtliche Abweichungen aufweist (z. B. Nr. 5, 21, 23, 58). Es stellen also die Formeln (1) und (2), die zunächst doch sicherlich nur Annäherungswerte ergeben, die beobachteten Werte gut dar, wenn bei solch einer gedeckten Pfeife die beiden verschieden weiten Teile gleich lang sind, wenn die Querschnittsänderung in der Mitte der Pfeifenlänge erfolgt.

Tonhöhe bei verschiedener Lage der Querschnittsänderung. Alle die in der Tab. 1 angeführten Pfeifen haben den Ort der Querschnittsänderung gemeinsam, es ist bei ihnen der enge Rohrteil ungefähr ebenso lang wie der weite. *Nur* wenn diese Bedingung erfüllt ist, genügen die Formeln (1) und (2) zur Wiedergabe der Tonhöhen. Um nun zu untersuchen, wie sich die Tonhöhen ändern mit der Länge der Einzelteile, aus denen die Pfeife zusammengesetzt ist, muß man Pfeifen miteinander vergleichen, die bei gleicher Gesamtlänge und gleichem Weitenverhältnis sich nur durch die Länge der Einzelteile unterscheiden. Solche zusammengehörigen Reihen sind die Pfeifen 1 bis 8, 32 bis 44, 27 bis 31, 45 bis 47 und 48 bis 50 (vgl. Tab. 2). Wir wollen zunächst nur zwei von ihnen betrachten: 1 bis 8 mit kreisförmigem Querschnitt und einem $D_e/D_w = 0{,}568$ und 32 bis 44 mit quadratischem Querschnitt und $D_e/D_w = 0{,}73$. Trägt man die experimentell ermittelten Tonhöhen in ein Koordinatensystem ein, wobei man die Tonhöhen als Ordinaten und die jeweilige Länge des engen Teiles der Pfeife als Abszisse wählt, so erhält man die hier wiedergegebenen Figg. 3 und 4.[1]) (Die Maßstäbe der Ordinaten sind in den beiden Figuren verschieden groß gewählt entsprechend dem Umstande, daß bei der Pfeifenreihe mit dem kleineren Weitenverhältnis die Tonänderungen ja größer ausfallen mußten.) In beiden Bildern ist die Tonhöhe, die der Röhre ohne Querschnittsänderung zukommt, durch eine Parallele zur Abszissen-

1) In den Figuren sind nicht die Werte der Tabelle 2 eingezeichnet, sondern sie sind alle auf eine Normallänge von 12 cm umgerechnet, um die Gesetzmäßigkeit klar hervortreten zu lassen.

achse besonders hervorgehoben. Man sieht, daß die Kreuzchen, die die experimentell gefundenen Tonhöhen darstellen, *ungefähr* symmetrisch zu dieser Parallelen liegen, und daß als

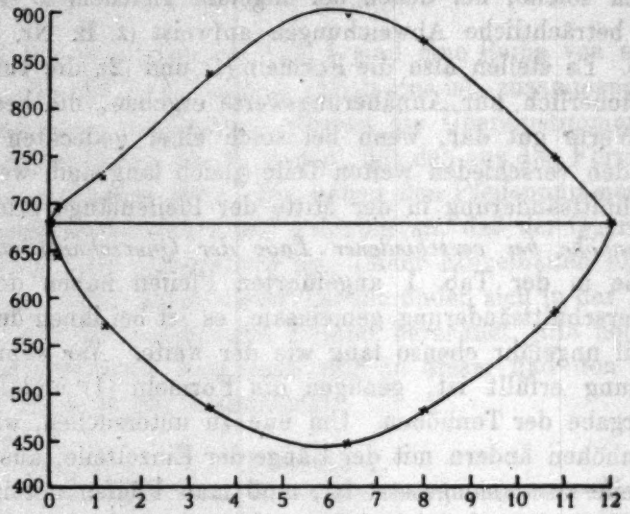


Fig. 3. Pfeifen 1—8.

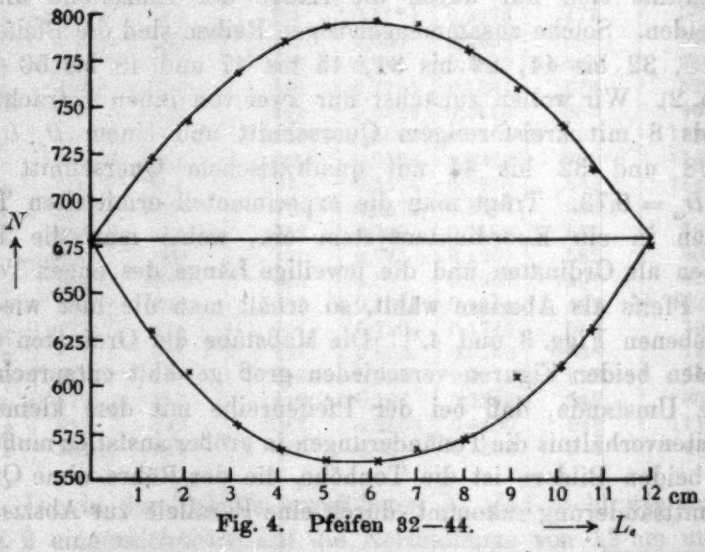


Fig. 4. Pfeifen 32—44. ⟶ L_e

eine zweite (auch nur ungefähr wirkende) Symmetrieachse des Bildes eine Parallele zur Ordinatenachse gelten kann, die am Orte der halben Gesamtlänge der Pfeife gezogen werden müßte.

Damit über die Bedeutung der Figuren kein Mißverständnis entstehe, sei nochmals hervorgehoben: Die Punkte oberhalb der ausgezogenen Horizontalen stellen N_h, die unterhalb N_t dar; man erhält einen eingezeichneten Ton N_h bzw. N_t dann, wenn man eine Pfeife von der durch die Länge der ausgezogenen Horizontalen dargestellten Gesamtlänge, deren Länge des engen Teiles an der Abszissenachse ablesbar ist, entweder vom weiten zum engen oder vom engen zum weiten Teile hin anbläst.

Je näher also die Querschnittsänderung einem der Enden der Pfeife liegt, desto geringer sind die *Änderungen* der Tonhöhe gegenüber einer gleich langen Pfeife ohne Querschnittsänderung. Um nun unsere Formeln diesem Befunde anzupassen, müssen wir sie so erweitern, daß sie folgende Bedingungen erfüllen: N_h und N_t müssen gleich N_0 werden, wenn die Querschnittsänderung an den Pfeifenenden liegt, ihr Betrag muß ein Maximum bzw. Minimum erreichen, wenn die Querschnittsänderung in der Mitte liegt. Da bieten sich mehrere Wege, von denen sich der nachfolgend dargestellte bewährt hat. Man versieht den Klammerausdruck unserer Gleichungen (1) und (2) mit einem Exponenten, der so beschaffen ist, daß er gegen die Pfeifenenden nach Null konvergiert, für die Pfeifenmitte aber ein Maximum hat. Als solcher Exponent bewährt sich zunächst am besten der Ausdruck

$$\frac{L_e \cdot L_w}{(L/2)^2}.$$

Es würden also die Gleichungen (1) und (2) sich umwandeln in

$$N_h = N_0(1+\varrho)^\lambda \quad \text{und} \quad N_t = N_0(1-\varrho)^\lambda,$$

wenn obiger Ausdruck mit dem Buchstaben λ abgekürzt dargestellt wird. Aber auch diese Erweiterung genügt noch nicht, denn sie würde ergeben, daß für jede Pfeife $N_h - N_0 = N_0 - N_t$ sei und das ist, wie sowohl die Figg. 3 und 4 als auch die Tab. 2 zeigen, durchaus nicht immer der Fall. Weiter zeigen die Figuren, daß sie nicht genau dort, wo $L_e = L/2$ ist, durch eine Vertikale in zwei symmetrische Teile zerlegt werden, sondern die beiden Hälften etwas verschieden sind. Man kann sich leicht durch graphische Darstellung überzeugen, daß der

Typus der Änderung von N_t mit L_e wiedergegeben werden kann durch eine Gleichung, bei der λ ersetzt ist durch

$$\frac{(L_e + x) \cdot L_w}{(L/2)^2}$$

und ebenso wird der Verlauf von N_h wiedergegeben, wenn λ ersetzt wird durch

$$\frac{L_e \cdot (L_w - x)}{(L/2)^2}.$$

Nun bleibt nur die Frage offen, welche Bedeutung und Größe dem x zukommt. Die Querschnittsänderung würde also auf eine Pfeife, die vom engen zum weiten Rohrteil angeblasen wird, so wirken, als ob der enge Teil eine Verlängerung erführe, auf eine vom weiten zum engen Rohrteil angeblasene, als ob der weite Teil eine Verkürzung erführe. Das nächstliegende ist dann, daß man versucht, die Korrektion gleich der Differenz der Durchmesser zu setzen, also $x = D_w - D_e$. Die Ausrechnung ergibt aber, daß das nicht stimmt, höchstens angenähert gilt, wenn diese Differenz recht klein ist. Auch

$$x = \frac{D_w - D_e}{2}$$

führt nicht zum Ziel. Dagegen hat es sich bei den von mir untersuchten Pfeifen bewährt, die Größe x gleich 0,15 cm zu setzen. Das ist natürlich wieder nur ein Annäherungswert, der vielleicht bei Pfeifen, die ganz andere Größenverhältnisse aufweisen als die meinen, versagen wird, aber hier tut er jedenfalls seine Dienste.

Die Exponenten der Klammerausdrücke müssen also danach lauten:

$$\frac{(L_e + x) \cdot L_w}{(L/2)^2} = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \frac{L_e \cdot (L_w - x)}{(L/2)^2} = \lambda_2,$$

wo $x = 0{,}15$ ist, und aus den Gleichungen (1) und (2) werden

$$N_h = N_0 (1 + \varrho)^{\lambda_2} \tag{3}$$

und

$$N_t = N_0 (1 - \varrho)^{\lambda_1}. \tag{4}$$

Während der Ausdruck λ für $L_e = L_w$ gleich eins wird, wird in diesem Falle λ_1 etwas größer, λ_2 etwas kleiner als 1.

Das stimmt mit der Erfahrung überein (vgl. Tab. 2), daß für jedes Querschnittsverhältnis die Differenz $N_0 - N_t$ etwas größer ausfällt als die Differenz $N_h - N_0$. In den Figg. 3 und 4 sind die eingezeichneten Kurven nun genau nach den neuen Formeln (3) und (4) berechnet, und zwar bei Fig. 3 für $N_0 = 679$ und $\varrho = 0{,}3262$; bei Fig. 4 für $N_0 = 679$ und $\varrho = 0{,}1745$. Der Verlauf der Erniedrigungen und Erhöhungen wird durch die Kurven gut dargestellt[1]); wie gut die Gleichungen jetzt aber die Tonhöhen zu berechnen gestatten, sieht man viel besser aus der Tab. 2 als aus den Figuren. Denn bei der Berechnung der eingezeichneten Kurven ist ja N_0 und ϱ jedesmal für den ganzen Pfeifensatz als konstant angenommen, während die Tabelle zeigt, daß doch auch innerhalb dieser Sätze kleine Längen- und Weitenschwankungen vorkommen die die Größen N_0 und ϱ kleinen Änderungen unterwerfen.

Die nachfolgende Tab. 2 enthält nun für eine große Reihe von verschiedenartig zusammengesetzten Pfeifen in den aufeinanderfolgenden Reihen: zunächst die Ordnungsnummer der Röhre, dann die mit dem Monochord bestimmten Werte für N_t und N_h, also die Tonhöhen, die die Röhren als gedeckte Pfeifen liefern, wenn man sie einmal am weiten, das andere Mal am engen Ende abschließt. Dann folgt die Größe N_0, die angibt, welche Tonhöhe einer gleich langen gedeckten Pfeife ohne Querschnittsänderung zukommt. Die nächsten fünf Reihen enthalten die Gesamtlänge, die Längen des engen und weiten Teiles und deren Durchmesser. Die letzten Reihen enthalten die berechneten Größen, zunächst ϱ, dann die Werte für λ_1 und λ_2, zuletzt die nach den Gleichungen (3) und (4) errechneten Tonhöhen.

Hinter den Pfeifennummern in der ersten Reihe befinden sich wieder die Buchstaben *k* und *q*, die andeuten, ob kreisförmiger oder quadratischer Querschnitt vorliegt. Die Pfeifen 1—8 haben bei ungefähr gleicher Länge und gleichem Querschnittsverhältnis verschieden lange Teile; die Pfeifen 10—16 weisen verschiedene Querschnittsänderungen auf, die aber alle in der Mitte liegen;

1) Die Abweichung der einen der Pfeifen (41) ist darauf zurückzuführen, daß dabei wohl ein „Baufehler" vorliegt, etwa die Querschnittsänderung nicht plötzlich genug erfolgt.

Tabelle

Nr.	N_t(beob.)	N_h(beob.)	N_0	L	L_s	L_w	D_s
1 *k*	721	721	721	11,30	—	11,30	—
2 *k*	687	733	723	11,27	0,14	11,13	0,79
3 *k*	607	772	720	11,31	1,13	10,18	0,79
4 *k*	514	886	721	11,30	3,21	8,09	0,79
4 *k*	475	953	723	11,27	5,95	5,32	0,78
5 *k*	506	926	725	11,24	7,44	3,80	0,79
7 *k*	621	791	721	11,30	10,11	1,19	0,78
8 *k*	721	721	724	11,25	11,25	—	0,79
10 *k*	532	913	723,5	11,26	5,58	5,68	0,91
11 *k*	577	859	722	11,28	5,49	5,79	0,56
12 *k*	624	836	725,5	11,23	5,95	5,28	1,385
13 *k*	532	889	721	11,30	5,60	5,70	1,39
14 *k*	311	1088	722	11,28	5,67	5,61	0,78
16 *k*	282	1135	722	11,28	5,68	5,60	0,56
20 *k*	311	1012	731	11,19	3,95	7,24	0,79
21 *k*	656	1305	1009	8,07	4,05	4,02	0,78
22 *k*	444	891	677	12,04	6,025	6,015	0,78
23 *k*	334	676	508	16,03	8,04	7,99	0,78
24 *q*	616	786	699	11,66	5,94	5,72	0,79
25 *q*	580	821	692	11,77	5,96	5,81	0,59
26 *q*	496	926	714	11,41	5,93	5,48	0,59
27 *k*	476	929	725	11,24	2,82	8,42	0,995
28 *k*	428	1012	724	11,25	5,96	5,29	0,995
29 *k*	447	967	723,5	11,26	7,42	3,84	0,995
30 *k*	480	894	719	11,34	8,47	2,87	0,995
31 *k*	537	842	721	11,30	9,46	1,84	0,995
32 *q*	676	676	677	12,03	—	12,03	—
33 *q*	680	721	678	12,02	1,28	10,74	0,58
34 *q*	607	741	678	12,01	2,09	9,93	0,58
35 *q*	580	768	679	11,99	3,13	8,88	0,58
36 *q*	567	781	679	12,0	4,065	7,935	0,58
37 *q*	558	791	677	12,03	5,03	7,00	0,58
38 *q*	558	795	677	12,03	6,16	5,87	0,58
39 *q*	565	795	677	12,03	7,055	4,975	0,58
40 *q*	572	781	679	12,0	8,02	3,98	0,58
41 *q*	602	759	677	12,04	9,15	2,89	0,58
42 *q*	610	737	678	12,02	10,075	1,945	0,58
43 *q*	633	717	678	12,01	10,76	1,24	0,58
44 *q*	676	676	679	12,0	12,0	—	0,58
45 *q*	640	725	678	12,02	3,34	8,68	1.2
46 *q*	627	737	677	12,03	6,31	5,72	1,2
47 *q*	649	721	677	12,03	9,50	2,53	1,2
48 *q*	627	729	678	12,02	3,15	8,87	0,99
49 *q*	610	750	678	12,02	6,13	5,89	0,99
50 *q*	628	725	677	12,04	9,21	2,83	0,99
51 *q*	544	816	677	12,03	6,095	5,935	0,99
54 *k*	355	826	675	12,08	10,08	2,00	0,69
55 *k*	443	816	677	12,03	10,00	2,03	0.69
56 *k*	617	733	678	12,02	10,07	1,95	0,69
57 *k*	242	1061	679	12,0	6,01	5,99	0,99
58 *k*	342	466	401,5	20,30	11,96	8,34	0,69

2.

D_w	ϱ	λ_1	λ_2	N_t (ber.)	N_h (ber.)	Nr.
1,38	—	—	—	721	721	1
1,39	0,3262	0,117	0,0484	694	733	2
1,39	0,3262	0,408	0,355	613	778	3
1,39	0,3262	0,851	0,798	515	882,6	4
1,40	0,3373	1,023	0,969	474	958	5
1,39	0,3262	0,913	0,860	506	924	6
1,39	0,3333	0,382	0,329	618	793	7
—	—	—	—	724	724	8
1,445	0,2656	1,027	0,973	527	910	10
0,78	0,1849	1,027	0,974	585	852	11
1,79	0,1381	1,022	0,968	623	823	12
2,19	0,2613	1,027	0,974	528	904	13
2,19	0,5559	1,027	0,973	314	1110	14
1,79	0,5986	1,027	0,973	283	1140	16
2,45	0,5952	0,948	0,895	310	1100	20
1,40	0,3373	1,087	0,946	658,5	1328	21
1,40	0,3373	1,024	0,974	445	899	22
1,40	0,3738	1,018	0,981	334	676	23
0,99	0,1185	1,025	0,973	615	780,5	24
0,79	0,1601	1,025	0,974	579	780	25
0,99	0,2987	1,024	0,989	496,5	925	26
2,045	0,4111	0,792	0,738	476,5	935	27
2,045	0,4111	1,021	0,968	421,5	1010,5	28
2,045	0,4111	0,917	0,864	445	974	29
2,045	0,4111	0,770	0,716	478	920	30
2,045	0,4111	0,554	0,5005	538	857	31
0,795	—	—	—	677	677	32
0,795	0,1745	0,425	0,375	626	720	33
0,795	0,1745	0,617	0 567	602	743	34
0,795	0,1745	0,811	0,760	581	767	35
0,795	0,1745	0,929	0,879	568	782	36
0,795	0,1745	1,0025	0,953	559	789	37
0,795	0,1745	1,023	0,974	556	792	38
0,795	0,1745	0,991	0,941	560	788	39
0,795	0,1745	0,903	0,854	571	779	40
0,795	0,1745	0,742	0,692	587	765	41
0,795	0,1745	0,550	0,542	610	740	42
0,795	0,1745	0,375	0,325	631	714	43
—	—	—	—	679	679	44
1,4	0,0748	0,829	0,789	636	718	45
1,4	0,0748	1,022	0,971	625	726	46
1,4	0,0748	0,675	0,628	642	708	47
1,2	0,0979	0,8105	0,760	624	728	48
1,2	0,0979	1,024	0,957	610	741	49
1,2	0,0979	0,731	0,681	628,5	721,5	50
1,4	0,1946	1,024	0,974	542	805	51
2,7	0,6746	0,561	0,5115	359,5	879	54
1,8	0,5249	0,569	0,520	443	843	55
0,9	0,1434	0,5515	0,5015	622,5	725	56
3,55	0,6450	1,025	0,975	235	1103	57
0,92	0.1508	0,980	0,951	342	459	58

bei 20 liegt die besonders große Querschnittsänderung nicht in der Mitte. Dann kommen drei Pfeifen 21—23, die die Proportionalität mit der Gesamtlänge zeigen. Alle bisherigen waren von kreisförmigem Querschnitt. Kreisförmig ist dann noch der Satz 27—31, der ähnliches zeigt wie 1—8, nur daß bei ihm eine recht große Querschnittsänderung vorliegt, und die Pfeifen 54—58, von denen 57 wieder eine besonders große Querschnittsänderung zeigt (das Intervall $N_h - N_t$ beträgt bei ihr schon mehr als zwei Oktaven!), während 58 sich vor allen anderen durch besondere Länge auszeichnet. Die Pfeifen 24 bis 26 und 32—51 zeigen die gleichen Variationen bei quadratischem Querschnitt.

Im allgemeinen ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den errechneten Tonhöhen eine sehr gute. Aber auch die wenigen Abweichungen dürfen nicht allzu gewichtig eingeschätzt werden. Die möglichen Fehler sind auch für ein geübtes Ohr bei den Monochordablesungen ziemlich groß und nur durch immer wiederholte Bestimmungen erhält man Mittelwerte, die solch gute Übereinstimmung ergeben. (Wenn man die Pfeifen nicht in der beschriebenen Weise anschlägt, sondern anbläst, weichen die Einzelwerte noch viel mehr voneinander ab.) Eine andere Fehlerquelle, die nach Möglichkeit vermieden wurde, aber gelegentlich doch noch in Betracht kommen kann, stellt sich ein, wenn die Verlötung der Einzelteile nicht sehr sorgfältig geschieht und im Innern der Röhre übergeflossenes Lot die plötzliche Querschnittsänderung zu einer allmählichen macht. Es ist also wichtig, daß die aneinander gefügten Teile ganz plötzlich von einem zum anderen Querschnitt übergehen, denn nur solche Änderungen werden durch die Formeln dargestellt. Immerhin sind einige der Abweichungen doch noch größer, als daß sie durch diese Fehlerquellen erklärt werden könnten; so z. B. weichen die errechneten Erhöhungstöne bei ganz großen Querschnittsänderungen, die nicht in der Pfeifenmitte liegen, allzusehr von der beobachteten ab. Bei Pfeife 20 berechnet man 1100 statt 1012, bei Pfeife 54 879 statt 826. Da reicht eben die Genauigkeit der Formel noch nicht aus und der Fehler liegt jedenfalls daran, daß die Größe x im Ausdruck λ_2 nicht gleich 0,15 gesetzt werden darf bei diesen Pfeifen, sondern in einem

anderen, mir bis jetzt verborgenen Zusammenhange mit den Dimensionen der Pfeifenteile stehen mag.

Bevor ich aber die Behandlung der Ergebnisse an diesen einfachen gedeckten Pfeifen abschließe, möchte ich noch darauf hinweisen, daß in den Formeln, die also vollkommener ausgeschrieben so lauten:

$$N_t = \frac{c}{4L}\left(1 - \left[1 - \frac{D_e}{D_w}\right]^{4/3}\right)^{\lambda_1}$$

und

$$N_h = \frac{c}{4L}\left(1 + \left[1 - \frac{D_e}{D_w}\right]^{4/3}\right)^{\lambda_2}$$

vermutlich das Verhältnis D_e/D_w besser noch ersetzt wird durch den Ausdruck $\sqrt{Q_e/Q_w}$, wenn mit Q die Querschnittsgrößen bezeichnet werden. Dann stellen die Formeln vielleicht auch Pfeifen dar, bei denen der eine Teil kreisförmigen, der andere dreieckigen oder irgendwie beschaffenen Querschnitt besitzt. Versuche mit derartigen Pfeifen habe ich bisher nicht angestellt. Weiter zeigt die Formel für N_h, daß für $Q_e = 0$ $N_h = 2N_0$ wird, wenn $L_e = L_w$. Das muß ja auch der Fall sein, denn dann hat man eben nur mehr eine halb so lange Pfeife. Dagegen scheint dem Vertiefungstone keine Grenze gesetzt zu sein. Doch ist diese Folgerung nicht ernst zu nehmen, denn für solch große Querschnittsänderungen gilt die Formel sicherlich nicht mehr. Also für ganz große Querschnittsänderungen versagen die Exponenten λ_1 λ_2 ihren Dienst, doch leistet die Näherungsformel immerhin genug, wie aus dem weiteren zu ersehen sein wird.

Gedeckte Pfeifen mit mehrfachen Querschnittsänderungen. Um die Verhältnisse an solchen Pfeifen kennen zu lernen, wählte ich zunächst ein Rohr, wie es in Fig. 1d dargestellt ist, das nun nach Belieben unten oder oben geschlossen werden konnte: die Pfeife Nr. 52. Sie besteht also aus drei Teilstücken; ihre Gesamtlänge L ist 11,95 cm, daher $N_0 = 682$, die Dimensionen ihrer Teile sind $L_1 = 4{,}01$; $D_1 = 0{,}99$; $L_2 = 3{,}96$; $D_2 = 1{,}2$; $L_3 = 3{,}98$; $D_3 = 1{,}4$. Die beobachteten Tonhöhen sind $N_t = 567$; $N_h = 800$. Hätten wir an Stelle dieser Pfeife zwei Pfeifen, jede mit nur einer Querschnittsänderung, so daß die erste bestände aus L_1 mit D_1 und $L_2 + L_3$ mit D_2, so erhielten wir für diese Pfeife die Töne $N_t' = 620$ und $N_h' = 740$. Bestände

die zweite aus $L_1 + L_2$ mit D_2 und L_3 mit D_3, so erhielten wir $N_t'' = 636$ und $N_h'' = 725$. Nun ist aber $(N_0 - N_t') + (N_0 - N_t'') = 108$, dagegen $(N_0 - N_t) = 115$ und entsprechend $(N_h' - N_0') + (N_h'' - N_0) = 95$ gegen $(N_h - N_0) = 118$.

Unter Berücksichtigung der auftretenden Fehlerquellen kann man behaupten: Die Erniedrigung bzw. Erhöhung der dreistufigen Pfeife 52 ist gerade so groß wie die Summe der Erniedrigungen bzw. Erhöhungen der gedachten zweistufigen Pfeifen. Das berechtigt, die bisherigen Formeln für mehrstufige Pfeifen folgendermaßen zu erweitern:

$$N_t = N_0(1 - \varrho_1)^{\lambda_1'}(1 - \varrho_2)^{\lambda_1''}(1 - \varrho_3)^{\lambda_1'''} \ldots,$$
$$N_h = N_0(1 + \varrho_1)^{\lambda_2'}(1 + \varrho_2)^{\lambda_2''}(1 + \varrho_3)^{\lambda_2''} \ldots,$$

wobei

$$\lambda_1' = \frac{(L_1 + x)(L_2 + L_3 + \ldots)}{(L/2)^2}; \quad \lambda_1'' = \frac{(L_1 + L_2 + x)(L_3 + \ldots)}{(L/2)^2} \text{ usw.}$$

und

$$\lambda_2' = \frac{(L_1)(L_2 + L_3 + \ldots - x)}{(L/2)^2}; \quad \lambda_2'' = \frac{(L_1 + L_2)(L_3 + \ldots - x)}{(L/2)^2} \text{ usw.}$$

und die ϱ_1, ϱ_2 ... die Glieder sind, welche wie oben angeführt, das Querschnittsverhältnis der einzelnen Stufen enthalten. Für die Pfeife 52 (wiederum, wie bisher, immer $x = 0{,}15$ gesetzt) liefert die Formel die Werte 578 und 787 statt 567 und 801, die beobachtet wurden.

Wenn in der Formel unendlich viele Klammergrößen mit verschwindend kleinem ϱ auftreten, dann haben wir den Fall der Kegelpfeife, für die wieder $N_t = N_h = N_0$ ist. Wenn die aufeinanderfolgenden Querschnittsänderungen nicht im gleichen, sondern in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen, dann bekommen wir Pfeifen, wie sie in der Fig. 1 durch die Beispiele *e* und *f* dargestellt sind. Für die Berechnung müssen die Formeln dann so angesetzt werden, daß in dem die Querschnittsänderung charakterisierenden Klammerausdruck für eine Erweiterung das negative Vorzeichen und der Exponent λ_1, für eine Einschnürung das positive Vorzeichen und der Exponent λ_2 zu setzen ist.

Als Beispiele will ich die Pfeifen 18 und 19 anführen. Pfeife 19 entspricht der Fig. 1*e*. Es ist also eine Pfeife, die oben und unten gleich weit ist, in der Mitte, aber exzentrisch

gelegen, einen weiteren Kasten trägt. Sie gab, je nachdem sie an dem einen oder dem anderen Ende abgedeckt wurde, die beiden verschiedenen Töne $N_1 = 613$ und $N_2 = 652$. Ihre Größenverhältnisse waren $L = 11{,}43$ (woraus $N_0 = 713$), $L_1 = 3{,}93$, $D_1 = 0{,}79$, $L_2 = 2{,}16$, $D_2 = 1{,}39$, $L_3 = 5{,}34$, $D_3 = 0{,}79$. Die Erweiterung war gleich der darauf folgenden Einschnürung; daher genügen für die Berechnung der beiden Ansätze:

$$N_1 = N_0(1-\varrho)^{\frac{(L_2+x)(L_1+L_1)}{(L/2)^2}} \cdot (1+\varrho)^{\frac{(L_2+L_2-x)L_1}{(L/2)^2}};$$

$$N_2 = N_0(1-\varrho)^{\frac{(L_1+x)(L_2+L_3)}{(L/2)^2}} \cdot (1+\varrho)^{\frac{(L_1+L_2-x)(L_3)}{(L/2)^2}}.$$

ϱ hat den Wert 0,3262 und die Berechnung ergibt $N_1 = 611$; $N_2 = 647$.

Die Pfeife 18 entsprach der Fig. 1f. Bei einer Gesamtlänge von 11,35 cm waren $L_1 = 3{,}73$; $L_2 = 2{,}51$; $L_3 = 5{,}11$; $D_1 = D_3 = 1{,}39$; $D_2 = 0{,}79$; $N_0 = 718$. Daraus berechnet man nach den entsprechend angesetzten Formeln bei $\varrho = 0{,}3262$; $N_1 = 611$; $N_2 = 660$ und beobachtet wurden $N_1 = 613$; $N_2 = 666$. Also auch hier gibt die Formel die tatsächlichen Verhältnisse mit guter Übereinstimmung wieder. Ohne daß ich noch weitere Beispiele solcher Kasten- und Einschnürungspfeifen anführe, mag über die bei ihnen ermittelten Tonhöhen folgendes hervorgehoben werden: 1. Sie geben auf alle Fälle, von welchem Ende her sie auch angeregt werden, eine Tonerniedrigung gegenüber dem ihrer Länge entsprechenden N_0. 2. Trotzdem ihre beiden Enden gleiche Öffnung haben, geben sie zwei verschiedene Töne, die nur dann zusammenfallen, wenn die beiden Endteile gleich lang sind, d. h. $L_1 = L_3$ wird. 3. Wenn man zwei Pfeifen vergleicht, die bei gleichen Weitenverhältnissen so beschaffen sind, daß die eine den Kasten gerade dort trägt, wo die andere die Einschnürung besitzt (ungefähr erfüllt ist das gerade bei den Pfeifen 18 und 19), so sind die vier ermittelten Töne paarweise gleich. Man kann also die gleichen Tonveränderungen gegenüber N_0 erreichen durch einen eingebauten Kasten wie durch eine gleich lange entsprechend bemessene und entsprechend gelegene Einschnürung; es ist aber nicht möglich, auf diesem Wege eine Tonerhöhung gegenüber N_0 zu erreichen. 4. Durch die oben auf-

gestellte Formel ist der Vorgang nur darstellbar, solange die L_2, also der Abstand der beiden Querschnittsänderungen, nicht allzuklein werden; sonst fallen die Störungsgebiete ineinander und da versagt die Formel wieder. Die berechneten Tondifferenzen fallen dann zu groß aus.

Offene Pfeifen mit Querschnittsänderungen. Ich habe nun an einer großen Reihe der schon in Tab. 2 mit ihren einzelnen Größenbeziehungen angegebenen Pfeifen auch die Töne bestimmt, die sich als offene Pfeifen ergeben. Die Tonbestimmung ist dabei etwas schwieriger und dementsprechend auch etwas unzuverlässiger, weil die Röhren als offene Pfeifen noch schlechter ansprechen und weil ihre Tonhöhe nicht durch Anschlagen sondern nur durch Anblasen bestimmt werden kann und sich mit der Anblasestärke etwas verändert. Doch habe ich bei vorsichtigem Anblasen die Schwierigkeit überwinden können. Die gefundenen Werte befinden sich in der mit N (beob.) überschriebenen Reihe der Tab. 3. Bei der Berechnung der Tonhöhe, die das betreffende Rohr ohne Querschnittsänderung ergeben würde, N_0, kommt vor allem in Betracht, daß N_0 nicht gleich $c/2\,L$, sondern daß die Wertheimschen Endkorrektionen in Rechnung gesetzt werden müssen, d. h. bei Kreisquerschnitt muß L ersetzt werden durch $(L + 0{,}33\,D)$, bei quadratischem Querschnitt durch $(L + 0{,}187 \cdot 2 \cdot D)$. Und zwar ist bei Pfeifen mit verschieden weiten Enden der Mittelwert eingesetzt worden. Wenn also für eine weite Pfeife zu setzen ist $(L + s_w)$ und für eine engere $(L + s_e)$, so wurde bei der zusammengesetzten Pfeife als Länge eingesetzt

$$\left(L + \frac{s_w + s_e}{2}\right).$$

Daß die Korrektion sich mit der Tonhöhe ändert, ist nicht berücksichtigt worden. Auf diese Weise sind die in der Tabelle verzeichneten N_0 gewonnen. Vergleicht man diese beiden Reihen der Tab. 3 miteinander, so zeigt sich auch hier wieder eine große Verschiedenheit der Töne, die die Röhren ergeben, je nach Größe und Lage der Querschnittsänderung. Je größer diese — bei Gleicherhaltung aller übrigen Bestimmungsstücke der Röhre —, desto größer ist die Abweichung vom Werte N_0. Der Zusammenhang zwischen der Lage der Querschnittsänderung und der gefundenen Tonhöhe ist aber bei den offenen

Pfeifen noch verwickelter als bei den gedeckten. Am besten ist diese Beziehung zu übersehen, wenn wir wieder an einem ganzen Pfeifensatz, bei dem Länge und Querschnittsgröße konstant sind und nur die Lage der Querschnittsänderung verschieden ist, die Verhältnisse betrachten. Zu dem Zweck ist in Fig. 5 für die Pfeifen 32—44 eingetragen als Ordinate die Tonhöhe, als Abszisse die Länge des engeren Pfeifenteiles, und zwar sind die beobachteten Werte durch Kreuzchen bezeichnet. Verbindet man diese Punkte durch eine den Gang der Erscheinung ungefähr wiedergebende Kurve, wie das in der Figur geschehen ist, so kann man das Ergebnis so beschreiben: Rückt die Querschnittsänderung vom engen gegen das weite

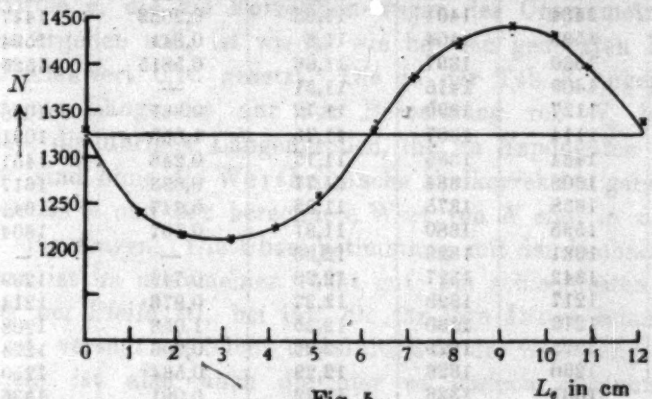


Fig. 5.
Offene Pfeifen 32—44.

Ende der Pfeife vor, so erhält man zunächst eine immer größer werdende Tonvertiefung, die ein Maximum ungefähr dort erreicht, wo $L_e = L/4$ ist. Dann wird die Vertiefung wieder geringer und der normale Pfeifenton N_0 wird erreicht, wenn $L_e = L/2 = L_m$ ist. Wird nun $L_e > L/2$, so tritt eine Tonerhöhung ein, die ihr Maximum für $L_e = 3/4\,L$ erreicht und schießlich gegen das andere Ende hin wieder verschwindet. Man sieht also, die Vorgänge, die bei den gedeckten Pfeifen auftraten, je nachdem deren enges oder weites Ende abgedeckt wurde, die treten an einem einzelnen offenen Rohre mit ebensolcher Querschnittsänderung in ganz ähnlicher Weise auf, wenn die Querschnittsänderung die Länge der Röhre durchläuft. Daher ist es bei der offenen Pfeife gleichgültig, an

welchem Ende sie angeblasen wird: Sie gibt nur einen Ton.[1]) In Tab. 3 sind nun diese Ergebnisse auch für andere Röhren teils mit kreisförmigem, teils mit quadratischem Querschnitt eingetragen; immer entsprechen die Werte der Fig. 5 in bezug auf die Lage des Pfeifenknickes.

Tabelle 3.

Nr.	N (beob.)	N_0	Red. Länge	λ	N (ber.)
1 *k*	1381	1384	11,76	—	—
2 *k*	1384	1401	11,63	0,201	1352
3 *k*	1217	1397	11,67	0,725	1228
4 *k*	1187	1397	11,66	1,028	1164
5 *k*	1434	1401	11,63	0,2053	1447
6 *k*	1595	1404	11,6	0,841	1594
7 *k*	1530	1397	11,66	0,5815	1525
8 *k*	1409	1416	11,51	—	—
20 *k*	1127	1390	11,72	0,861	1028
27 *k*	1114	1387	11,75	1,053	1091
28 *k*	1434	1386	11,77	0,246	1451
29 *k*	1608	1384	11,77	0,833	1617
30 *k*	1638	1375	11,85	0,947	1641
31 *k*	1595	1380	11,81	0,807	1604
32 *q*	1331	1323	12,33	—	—
33 *q*	1242	1327	12,28	0,749	1239
34 *q*	1217	1328	12,27	0,976	1214
35 *q*	1213	1330	12,25	1,053	1208
36 *q*	1225	1329	12,26	0,906	1224
37 *q*	1260	1326	12,29	0,564	1250
38 *q*	1331	1326	12,29	0,091	1336
39 *q*	1391	1326	12,29	0,555	1389
40 *q*	1422	1329	12,26	0,859	1428
41 *q*	1445	1324	12,30	0,946	1433
42 *q*	1433	1327	12,28	0,907	1431
43 *q*	1401	1328	12,27	0,575	1392
44 *q*	1340	1331	12,22	—	—
54 *k*	1609	1288	12,64	0,8195	1634
55 *k*	1580	1310	12,44	0,8275	1589
56 *k*	1412	1328	12,28	0,809	1406

1) Eine gewöhnliche offene Pfeife kann man sich entstanden denken durch Zusammensetzung zweier, halb so langer gedeckter Pfeifen, die mit den geschlossenen Enden zusammengefügt sind. Wenn nun bei offenen Pfeifen mit Querschnittsänderungen die Tonhöhe eine andere ist und auch sie nur einen Ton geben, so darf man schließen, daß auch sie entstanden sind durch solche Zusammensetzung zweier gedeckter Pfeifen, die aber jetzt verschiedene Längen haben und doch den gleichen Ton ergeben, weil die eine von ihnen ohne die andere mit Querschnittsänderung auftritt. Daraus ergibt sich eine Beziehung, die die Tonhöhe einer

Ich habe versucht, die für die gedeckten Pfeifen gefundene Annäherungsformel so umzugestalten, daß sie auch die Verhältnisse an offenen Pfeifen darzustellen vermag, und verhältnismäßig gute Übereinstimmung erzielt durch den Ansatz:

$$N = N_0\{1 \pm \varrho\}^{\lambda},$$

wo

$$\lambda = \frac{(L_l - L/2)(L_k \mp x)}{(L/4)^2}; \quad \varrho = \left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{D_e}{D_w}\right)^{4/3}.$$

Dabei bedeuten L_l und L_k die Längen des längeren und kürzeren Teiles, wenn der längere Teil auch der weitere ist, dann gelten die oberen Vorzeichen, sonst die unteren. Für die Größe x, die die Korrektion wegen der Unsymmetrie der Kurve ergeben soll, ist wieder wie bei den gedeckten Pfeifen der Zahlenwert 0,15 gesetzt. Die in der Tab. 3 angegebene reduzierte Länge ist nur zur Berechnung von N_0 benutzt worden, die übrigen Längengrößen, die im Exponenten λ auftreten, sind ohne die Wertheimsche Endkorrektion gerechnet. Die Größe λ und der berechnete Wert von N sind in die Tabelle eingetragen. Die Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ist im allgemeinen recht gut; am schlechtesten ist sie wieder bei Pfeife 20, bei ihr, die für ihre Länge schon sehr weit ist, versagt vielleicht die Gültigkeit der Gleichung schon, vielleicht ist aber auch die hier so einfach angenommene Wertheimsche Endkorrektion nicht mehr zulässig.

Jedenfalls aber ist mit diesen Beobachtungen festgestellt, wie die Resonanztonhöhe eines beiderseits offenen Rohres, das eine Querschnittsänderung aufweist, sich ändert und wie die verschiedenartigsten Werte, die sie annehmen kann, durch die Lage und die Größe der Querschnittsänderung bestimmt sind.

---

offenen Pfeife mit Querschnittsänderung durch Anwendung der oben gewonnenen Ausdrücke für die geschlossenen Pfeifen darzustellen gestattet. Die Berechnung wird freilich etwas kompliziert durch die in den Ausdrücken für λ auftretenden Korrektionsglieder. Deshalb und weil ich sie durch Versuche zunächst nicht belegen kann, möchte ich die Durchrechnung hier nicht ausführen; ich hoffe aber mit der von W. Steinhausen (Dissertation, Gießen 1914) ausgearbeiteten Methode feststellen zu können, wie sich die Lage dieser Knotenebene mit der Querschnittsänderung verschiebt und ob sie außer der Verschiebung auch eine Deformation erfährt.

Frühere ähnliche Untersuchungen und Beobachtungen. Es ist nun durchaus nicht das erste Mal, daß das Problem der Pfeifen mit Querschnittsänderungen hier angeschnitten wird. Oft schon mag die Erfahrung gemacht worden sein, daß ein Lampenzylinder oder ein ähnlich gestaltetes Rohr verschiedene Töne ergibt, je nachdem, ob man es am einen oder anderen Ende anbläst. Doch sind meines Wissens noch nie allgemein die Bedingungen aufgesucht worden, von denen solche Töne abhängen. Oft sind auch schon Teile des Problems und verwandte Erscheinungen untersucht worden. Denn es gehören hierher z. B. die Rohrflöten, Pfeifenregister, die schon seit der Mitte des 16. Jahrhunderts von den Orgelbauern hergestellt wurden und die gedeckte Pfeifen darstellen, welche in ihrem Deckel ein kleines offenes Röhrchen enthalten. Gerade dieses Problem ist des öfteren angeschnitten worden, so z. B. schon von Lambert[1]) im Jahre 1775 und dann besonders ausführlich von Gerhardt[2]), der drei verschiedene beim Orgelbau übliche Pfeifen mit allen möglichen Ansatzröhrchen versah und ausmaß. Die Beobachtungen Gerhardts lassen sich mit den von mir gefundenen gut in Einklang bringen, doch erfahren sie dort, da Gerhardt eben von ganz anderen Gesichtspunkten ausging, eine andere Deutung. Ohne Gerhardts Ergebnisse hier genau durchrechnen zu wollen, will ich wenigstens an einem Beispiel diesen Einklang zeigen. In seiner Tab. A 2[3]) gibt er die Tonhöhen einer Pfeife von $L = 28{,}5$ und $D = 3{,}6$, in deren Deckel er verschieden lange Röhrchen von gleichem Querschnitt ($D = 1{,}8$) eingefügt hat (und zwar so, daß sie nicht in die Pfeife hinein, sondern aus ihr herausragen). Er erhält dann, wenn die Länge des Röhrchens ist:

0	7,45	14,9	22,35	29,8,

die Tonhöhen

250	324	283	271	261

und faßt das Ergebnis in den Satz: daß ein offenes Ansatzröhrchen eine Tonerhöhung bewirke, die aber durch Verlängerung des Röhrchens bei konstantem Querschnitt vermindert

1) Lambert, Nouveaux mémoires de l'academie royale. Berlin 1775.
2) R. Gerhardt, Wied. Ann. 26. p. 281. 1886.
3) Ebenda, p. 283, unten.

werde. Und auf Grund weiterer, hier nicht angeführter Tabellen, bei denen auch geschlossene Ansatzröhrchen behandelt werden, kommt er zum Schlusse, daß die Änderung der Tonhöhen weder mit der Änderung der Längen, noch mit derjenigen der Querschnitte in einem einfachen Verhältnis stehe. — Nach meinen oben wiedergegebenen Erfahrungen ist aber das Problem ganz anders anzufassen. Durch das Einfügen des offenen Ansatzröhrchens wird die gedeckte Pfeife in eine offene verwandelt, die eine Querschnittsänderung erhält. Bei dieser offenen Pfeife ist der weitere Teil der längere, also haben wir nach Fig. 5 zu erwarten, daß die Tonhöhe der gleichlangen offenen Pfeife ohne Querschnittsänderung eine Erniedrigung erfahre, und das findet Gerhardt auch. Denn für eine offene Pfeife der Länge (28,5 + 7,45) ergäbe sich mit seinem Werte für die Schallgeschwindigkeit berechnet ein N_0 von ungefähr 390 Schwingungen. Man sieht, ohne die Rechnung weiter auszuführen, er findet einen niedrigeren Wert, sein Befund stimmt mit den oben dargestellten Gesetzmäßigkeiten überein. Und weiter: wenn wir die letzte der angeführten Tonhöhe betrachten, so ist sie die einer offenen Pfeife, deren beide Teile etwa gleich lang sind, und da diese Pfeife zufällig die doppelte Länge hat wie seine gedeckte Pfeife ohne Ansatzröhrchen, so müssen diese beiden Tonhöhen einander etwa gleich sein: 250, 261.

Hierher gehören auch alle Versuche über das teilweise Zudecken von Pfeifen. Um das zu zeigen, entnehme ich einige Zahlen einer Versuchsreihe von Melde[1]). Eine zylindrische Pappröhre von 23,6 cm Länge mit einer inneren Weite von 3,2 cm wurde oben und unten mit dünnen Bleiplatten (deren Dicke leider nicht angegeben ist) verschlossen, in deren Mitte kreisrunde Öffnungen gebohrt wurden. Folgende sind die Töne, die sie lieferte, wenn sie an einem Ende geschlossen oder ganz offen war:

Weite der oberen Öffnung .	3,24	1,75	1,10	0,43
gedeckt	170	162	146	100
offen	328	304	288	222

1) F. Melde, Akustik. Leipzig, F. A. Brockhaus 1883. p. 247. Analoge Versuchsreihen finden sich auch bei G. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 31. 385ff. 1851.

Da die Bleiplatten dünn waren, können wir einfach annehmen, daß die erste Tonreihe gedeckte Pfeifen gleicher Länge darstellt, die ein ganz kurzes Ansatzrohr verschiedener Weite tragen, und wir sehen wieder, daß mit immer größer werdender Querschnittsdifferenz der beiden Rohrteile auch die Größe der Tonvertiefung zunimmt. Ebenso haben wir in der zweiten Zeile offene Pfeifen mit kurzen Ansatzröhrchen, bei denen der weitere Teil der Röhre der längere ist; also haben wir (wieder nach Fig. 5) gegenüber N_0 eine Erniedrigung zu erwarten, die um so größer wird, je größer die Querschnittsdifferenz. Das ist vollkommen erfüllt.

Wie weit sich das Problem der Flaschentöne und Resonatoren mit Hälsen mit den hier gefundenen Gesetzmäßigkeiten und Formeln darstellen läßt, kann ich leider, ohne eigene Versuche zu machen, auf Grund der in der Literatur vorliegenden Angaben nicht ermitteln; denn die Versuchsreihen von Sondhauß[1]) und die von Rayleigh[2]) kann ich nicht nachrechnen, da bei ihnen, wie bisher immer üblich, nicht alle Dimensionen der Einzelteile, sondern nur die Volumina angegeben sind. Jedenfalls aber werden sich auch solche Fragen lösen lassen, falls die Querschnittsänderungen nicht allzugroß sind.

Erwähnt seien auch noch einige Versuche von Neyreneuf[3]), der an Röhren von Trichterform Tonerhöhungen und Vertiefungen nachweisen konnte. Für konische Röhren ist die Tonhöhe die gleiche wie für zylindrische. Das gilt aber nicht mehr für Röhren, die aus einem zylindrischen und einem konischen zusammengesetzt sind. Der plötzliche Ansatz des kegelförmigen Rohrteiles wirkt dann wohl wie bei meinen Versuchen die Querschnittsänderung. Neyreneuf bestimmte die Resonanzlängen seiner Röhren mit Stimmgabeln bekannter Schwingungszahlen und fand u. a. auch bei gedeckten Trichterröhren Tonerhöhungen und Vertiefungen, je nachdem, welches der beiden Trichterenden geschlossen war. —

---

1) G. Sondhauß, Pogg. Ann. 81. p. 235. 1850; Pogg. Ann. 140. p. 53. 217. 1870.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 40. p. 211. 1870.

3) V. Neyreneuf, Ann. chim. et phys. (7) 16. p. 562. 1899.

Die theoretische Behandlung des Problems ist schon von Lambert versucht worden, am ausführlichsten aber wohl in der schon erwähnten Abhandlung Gerhardts über die Rohrflöte durchgeführt worden.[1]) Gerhardt macht bei seinen Ableitungen die Annahmen, daß ebene Wellenbewegung vorhanden sei, daß die Dichtigkeitsänderungen am Orte der Querschnittsänderung in beiden Rohrteilen einander gleich sind und daß an diesem Orte in jedem Zeitelement die gleiche Luftmenge hindurchgehe, er fordert also Kontinuität des Druckes und der Verschiebungen. Mit Hilfe der sich ergebenden Grenzbedingungen für die Rohrenden leitet er aus den Gleichungen für die Geschwindigkeitspotentiale in den beiden Rohrteilen für die Tonhöhen der Pfeifen eine Formel ab, die lautet

$$N = N_0\left(1 \pm \frac{2\alpha}{\pi}\right),$$

und zwar würde das + als Zeichen für die offene, das − als Zeichen für die gedeckte Pfeife gelten. Die danach gerechneten N-Werte stimmen mit den gefundenen sehr gut überein, doch kommt der Formel kaum ein praktisches Interesse zu, weil die Werte für α nur für jeden Einzelfall durch graphische Lösung einer transzendenten Gleichung gewonnen werden können, in die die Querschnitts- und Längenverhältnisse der Pfeife dann eingehen. Wie die bei Gerhardt angeführten Tabellen zeigen, ist übrigens die Übereinstimmung mit dem Versuche bei dieser Formel gerade für jene Querschnittsdifferenzen am ungünstigsten, bei denen meine empirische Formel besonders gut stimmt und umgekehrt. Von den Voraussetzungen Gerhardts dürfte die, daß die Wellenbewegung immer eine ebene sei, in der Nähe der Querschnittsänderung nicht erfüllt sein. —

Es sei auch noch erwähnt, daß die naheliegende Vermutung, man könne die Vorgänge mit Hilfe der Theorie von den gekoppelten Schwingungen darstellen, zu keinen brauchbaren Ergebnissen führt.

---

1) l. c. p. 287 ff.; von ganz anderen Versuchen ausgehend, hat Stefan das Problem in fast gleicher Weise schon früher behandelt (Ber. d. K. Wiener Akademie. Abt. II. 55. p. 597. 1867).

Verallgemeinerung des Problems und sein Nachweis an anderen Schwingungserscheinungen. Zunächst sei erwähnt, daß es mir nicht geglückt ist, die Obertöne dieser Röhren exakt zu bestimmen, dazu sprechen die Pfeifen zu schlecht an; immerhin habe ich feststellen können, daß die vorhandenen Obertöne keine harmonischen waren. Daß die gleichen und ähnliche Erscheinungen auch bei ganz anderen Schwingungsvorgängen zutage treten, habe ich — zunächst nur qualitativ — in mehreren Fällen gefunden. Stellt man sich z. B. einen Messingstab durch Zusammenlöten verschieden langer und verschieden dicker Teile her und klemmt ihn an einem Ende fest ein, so kann man mit Hilfe der Staubfiguren im Kundtschen Rohre und leichter noch mit dem Gehör feststellen, daß er zwei verschiedene Töne gibt, je nachdem, ob man ihn am dünnen oder dicken Ende zu Longitudinalschwingungen erregt. Erst später fand ich in der Literatur, daß gerade dieses Problem von Stefan[1]) bereits untersucht worden ist. Er erregte an beiden Enden eingeklemmte Holzstäbe von rechteckigem Querschnitt zu Longitudinalschwingungen und verkleinerte dann den Querschnitt eines immer größeren Teiles seines Stabes. Mit der Verkleinerung des Querschnittes schritt er in Abstufungen von $^1/_{16}$ zu $^1/_{16}$ der ganzen Länge vor. Ich gebe eine der von ihm ausgeführten Versuchsreihen wieder. Die Zahlen der ersten Zeile bezeichnen, auf wieviele Sechzehntel sich die Verkleinerung des Querschnitts erstreckt, die der zweiten Reihe sind die zugehörenden Monochordlängen in cm:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
90	86	84	82	81	82	85	87	91	95	97	99	100	100	98	96	90

Der beiderseitig eingeklemmte Stab entspricht der offenen Pfeife und man sieht aus den Zahlen sofort, daß sie genau das Bild der Fig. 5 ergeben.

Weiter habe ich, um wenigstens qualitativ einen Einblick in die Verhältnisse der Oberschwingungen zu bekommen, den Meldeschen Fadenversuch mit einem in Richtung der erregenden Stimmgabelzinke ausgespannten, dicken Wollfaden ausgeführt, den ich bis zur Mitte aufdröseln konnte, so daß er aus zwei verschieden dicken ungefähr gleich langen Stücken bestand.

1) J. Stefan, Abh. d. K. Wiener Akad. Abt. II. 55. p. 597. 1867.

Die ganze Länge war 200 cm. Wenn der Faden in 2 Teilen schwang, so waren die beiden Teile 91 und 109 cm lang; bei 3 Teilen 60, 60, 80; bei 4 Teilen 36, 44, 56, 74; bei 5 Teilen 32, 35, 35, 50, 50; bei 6 Teilen 27, 29, 29, 31, 40, 51. Sieht man von einigen Unregelmäßigkeiten ab, so kann man sagen, die Knotenabstände vergrößern sich kontinuierlich; und zwar geschieht die Zunahme vom dicken nach dem dünnen Ende hin.

Schließlich habe ich am Drudeschen Wellenapparat die beiden parallelen Drähte durch solche ersetzt, bei denen der Drahtabstand eine plötzliche Vergrößerung erfuhr, und der Abstand der beiden, der Querschnittsänderung zunächst liegenden Minima sank sofort von 37 auf ca. 20 cm.[1])

Also scheinen auch bei diesen elektromagnetischen Wellen an Drähten die analogen Störungen aufzutreten. (Das kann unter Umständen von großer Wichtigkeit sein und dort, wo man Abstimmungsversuche mit Posaunenauszügen macht, zu ganz falschen Messungsergebnissen führen.)

Zusammenfassung. Die Tonhöhen von gedeckten und offenen Pfeifen mit einer oder mehreren Querschnittsänderungen werden bestimmt; die Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich diese Tonhöhen ändern, je nach Größe und Lage der Querschnittsänderungen, werden so gut wie möglich festgestellt; aus den Versuchen wird eine empirische Formel hergeleitet, die die Erscheinungen mit genügender Genauigkeit wiedergibt; Analogien aus anderen Schwingungsgebieten werden besprochen.

Gießen, Physik. Inst. d. Univ., im Juni 1917.

1) Vgl. dazu J. Wallot, Ann. d. Phys. 30. p. 495. 1909, der darüber aussagt: Abstandsänderungen haben den Nachteil, daß bei ihnen der Widerspruch zwischen Theorie und Wirklichkeit besonders groß ist. Man wüßte nicht, auch bei noch so scharf und sauber umgebogenen Drähten, wie die dabei auftretende Drahtverlängerung in Rechnung zu setzen wäre.

(Eingegangen 19. Juni 1917.)

8. *Bemerkung über das Nernstsche Wärmetheorem;* von *Paul S. Epstein.*

Von M. B. Weinstein[1]) wurde kürzlich der Versuch unternommen, die von Planck gegebene Fassung des Nernstschen Wärmetheorems in der Weise abzuändern, daß die Entropie eines kondensierten Körpers im absoluten Nullpunkt der Temperatur keine absolute Konstante, sondern vom Druck abhängig sein soll. Es scheint uns indessen, daß bei einer rein thermodynamischen Betrachtung dieser Frage die von Weinstein gemachte Annahme mit dem *zweiten* Hauptsatz unverträglich ist.

In der Tat können wir diesen Hauptsatz mit C. Carathéodory so fassen: *In der Nähe eines jeden Zustandes des betrachteten Systems gibt es beliebig viele Nachbarzustände, die durch unendlich langsame adiabatische Prozesse nicht beliebig approximiert werden können.* Dabei ist unter einem „adiabatischen Prozeß" ein solcher zu verstehen, der ohne Zuführung von Wärme (Q) erfolgt, so daß er bei unendlich langsamem Verlauf analytisch durch die Gleichung

$$dQ = 0 \tag{1}$$

ausgedrückt wird. Der Zustand des betrachteten Systems sei durch f Koordinaten $x_1, x_2 \ldots x_f$ definiert, dann drückt sich das Wärmeelement wie folgt aus

$$dQ = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_f\,dx_f, \tag{2}$$

wobei $X_1, X_2 \ldots X_f$ Funktionen der Zustandsparameter $x_1, x_2 \ldots x_f$ bedeuten.

Es läßt sich nun zeigen[2]), daß die im zweiten Hauptsatz ausgesprochene Forderung nur dann erfüllt sein kann, wenn der Pfaffsche Ausdruck (2) der Integrabilitätsbedingung ge-

1) Max B. Weinstein, Ann. d. Physik 52. p. 218. 1917.
2) C. Carathéodory, Math. Ann. 67. p. 355. 1909.

nügt, d. h. wenn er einen integrierenden Faktor $1/T(x_1, x_2 \ldots x_f)$ besitzt der ihn zum exakten Differential $dS(x_1, x_2 \ldots x_f)$ macht

$$dQ = T\,dS, \tag{3}$$

T und S haben die Bedeutung von Temperatur und Entropie, und Gleichung (1) ist offenbar befriedigt, wenn

$$S = \text{const.}, \tag{4}$$

d. h. *jeder Prozeß konstanter Entropie ist ein adiabatischer Prozeß.* Aus dem zweiten Hauptsatz fließt indessen noch eine weitere Forderung: die Gleichung (1) darf außer der Lösungsschar (4) keine weiteren Lösungen besitzen, denn diese Lösungen würden, als Flächen im Zustandsraume der $x_1, x_2 \ldots x_f$ betrachtet, die Flächen (4) schneiden oder einhüllen, und es würde möglich sein, mittels unendlich langsamer adiabatischer Prozesse von einer Entropiefläche auf eine andere von kleinerer Entropiekonstante zu gelangen. Daraus folgt, daß jede Lösung der Adiabatengleichung (1) in der Schar $S = \text{const.}$ enthalten sein muß: *Ein unendlich langsamer adiabatischer Prozeß ist stets ein Prozeß konstanter Entropie.*

Nun sehen wir aus dem Ausdruck (3), daß auch

$$T(x_1, x_2 \ldots x_f) = 0$$

eine Lösung der Adiabatengleichung (1) darstellt, und nach dem eben gesagten muß die durch diese Gleichung dargestellte Fläche eine Fläche konstanter Entropie sein. *Die Zustände absoluten Nullpunktes der Temperatur sind zugleich Zustände konstanter Entropie.*

Es könnte scheinen, daß in dieser Behauptung bereits das Nernstsche Wärmetheorem enthalten ist; das ist indessen durchaus nicht der Fall. In der Tat verlangt das Nernstsche Wärmetheorem, daß die Entropie*änderung* bei allen im absoluten Nullpunkt verlaufenden Prozessen verschwinde ($dS = 0$). Diese Forderung können wir aus dem zweiten Hauptsatz *nicht* ableiten, denn, falls den Zuständen $T = 0$ die Entropiekonstante $S_0 = -\infty$ entspricht, so sind Entropieänderungen von endlichem Betrag möglich, ohne daß S_0 aufhört eine Konstante zu sein. Dieser Fall tritt u. a. dann ein, wenn $T = 0$ zwar zur Schar $S = \text{const.}$ gehört, aber eine Asymptote aller dieser Flächen darstellt, und liegt z. B. bei den idealen Gasen vor.

Das Nernstsche Wärmetheorem ist demnach eine neue, von den beiden Hauptsätzen unabhängige Aussage. Spezieller als die Nernstsche Fassung desselben und praktisch mit der Planckschen identisch wäre die folgende Formulierung: *Bei festen und flüssigen Stoffen ist die Entropie im absoluten Nullpunkt um einen endlichen Betrag kleiner als bei Laboratoriumstemperaturen.*

Kurz zusammengefaßt ist der Sinn unserer Ausführungen der folgende. Nach der Annahme von Weinstein würde die Fläche $T = 0$ unendlich viele Flächen $S = \text{const.}$ schneiden. Es wäre daher prinzipiell möglich, auf einer dieser Flächen auf adiabatischem Wege in den absoluten Nullpunkt zu gelangen, dann bei konstanter Temperatur $T = 0$, gleichfalls adiabatisch, zu einer kleineren Entropie zu kommen und auf diese Weise den zweiten Hauptsatz (etwa als Prinzip von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art) zu durchbrechen. Gibt man dagegen unsere Argumentation zu, so ist es nicht möglich, mittels eines adiabatischen Prozesses den absoluten Nullpunkt zu erreichen. Mehr als das: es ist überhaupt nicht möglich, ihn zu erreichen. Denn das einzige Mittel über welches wir verfügen, um ihm näher zu kommen, ist schematisiert das folgende: zuerst ein System, soweit experimentell möglich, adiabatisch abzukühlen (etwa bis zur Temperatur T_1), mit Hilfe dieses Systems ein zweites von verhältnismäßig geringer Kapazität auf die Temperatur T_1 zu bringen, welches man wiederum adiabatisch auf die Temperatur $T_2 (< T_1)$ abkühlt usw. Es ist also ein Approximationsverfahren, mittels dessen man nur dem Nullpunkt nahe kommen, nicht aber ihn erreichen kann.

München, Juni 1917.

(Eingegangen 20. Juni 1917.)

9. *Über ein stabiles Kristallgitter;* *von R. Schachenmeier.*

Die Gravitationstheorien von Abraham[1]), Mie[2]), Einstein[3]) führen notwendig dahin, die Existenz von Gravitationswellen zu postulieren. Die beiden letztgenannten Forscher machen es wahrscheinlich, daß dieselben niemals wahrnehmbar sein werden. Doch dürfte es nicht überflüssig sein zu untersuchen, welcherlei Wirkungen ihnen gegebenenfalls zukommen könnten, falls sie wirklich in der erforderlichen Stärke auftreten. Diesem Zweck sollen im folgenden einige Überlegungen an Kristallgittern dienen.

Während die Gitterstruktur der Kristalle durch die Laueschen Diagramme als experimentell sichergestellt gelten kann, ist die Frage nach der Stabilität eines solchen Kristallgitters noch völlig ungeklärt. Mit Hilfe der Gravitationswellen wird ein stabiles Kristallgitter angegeben. An demselben läßt sich ungezwungen das elastische Verhalten der betreffenden Kristalle (namentlich auch gegen Schiebung) sowie die Eigenschaft der thermischen Ausdehnung nachweisen, was wohl als eine, wenn auch nur mittelbare, Bestätigung der Theorie an der Erfahrung angesehen werden darf.

§ 1. Aufbau eines stabilen Kristallgitters.

Ein Gravitationsfeld ist nach Einstein bestimmt durch das darin gültige Linienelement

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{(\mu,\nu)} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

also auch durch die „Gravitationspotentiale" $g_{\mu\nu}$, wobei x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten der vierdimensionalen Raum-

1) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. p. 1. 1912.

2) G. Mie, Grundlage einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys. 37. p. 511. 1912; 39. p. 1. 1912; 40. p. 1. 1913.

3) A. Einstein, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berliner Berichte XXXII. p. 688. 1916.

Zeit-Mannigfaltigkeit sind: In den für unsere Wahrnehmung in Betracht kommenden Gebieten können nach Einstein die $g_{\mu\nu}$ nahezu als Konstante betrachtet und gesetzt werden:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

wobei

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{3}$$

und die $\gamma_{\mu\mu}$ klein von erster Ordnung sind.

Wählt man das Koordinatensystem so, daß

$$g = |g_{\mu\nu}| = -1, \tag{4}$$

so genügen die $\gamma_{\mu\nu}$ bei Abwesenheit von Materie den Gleichungen[1])

$$\sum_{(a)} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu a}}{\partial x_\nu \partial x_a} + \sum_{(a)} \frac{\partial^2 \gamma_{\nu a}}{\partial x_\mu \partial x_a} - \sum_{(a)} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_a^2} = 0. \tag{5}$$

Dieselben gestatten als Lösungen ebene, in den Koordinatenrichtungen fortschreitende Wellen, z. B.

$$\gamma_{23} = a_{23} f(x_1 \pm i x_4), \quad \gamma_{\mu\nu} = 0 \ (\mu \neq 2, \ \nu \neq 3), \tag{6}$$

wo a_{23} eine willkürliche Konstante und f eine willkürliche Funktion ist. Wir betrachten im folgenden lediglich periodische Wellen, also

$$\gamma_{23} = a_{23} \cos \nu (x_1 \pm i x_4), \tag{7}$$

$$\gamma_{31} = a_{31} \cos \nu (x_2 \pm i x_4), \tag{8}$$

$$\gamma_{12} = a_{12} \cos \nu (x_3 \pm i x_4). \tag{9}$$

Bei Anwesenheit von Materie, deren Energietensor $T_{\mu\nu}$ sei, lauten die Feldgleichungen[2])

$$\begin{cases} \sum_a \frac{\partial^2 \gamma_{\mu a}}{\partial x_\nu \partial x_a} + \sum_a \frac{\partial^2 \gamma_{\nu a}}{\partial x_\mu \partial x_a} - \sum_a \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_a^2} = \\ \qquad = -2\varkappa \cdot \left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_a T_{aa}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Schwingungen des Tensors $T_{\mu\nu}$ können hiernach Gravitationswellen erzeugen[3]), und umgekehrt können Gravitationswellen

1) A. Einstein, l. c. p. 688; die Lichtgeschwindigkeit ist gleich 1 gesetzt.

2) A. Einstein, l. c. p. 689. Gleich. (2). Die Konstante $\varkappa$ ist gleich $1{,}87 \cdot 10^{-27}$.

3) Vgl. das folgende, Formel (16).

die auf ein schwingungsfähiges Gebilde mit gleicher Frequenz treffen, den Tensor $T_{\mu\nu}$ zu Schwingungen anregen. Seien die freien Schwingungen eines materiellen Teilchens durch die Komponente T_{23} beschrieben und $t_{\mu\nu}$ der Energietensor der auffallenden Gravitationswellen. Dann berechnet sich T_{23} vermittels des Impulsenergiesatzes aus

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \sum_\alpha \frac{\partial t_{3\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \sum_\alpha \frac{\partial t_{3\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{12}$$

Wir nehmen an, daß durch Resonanz die ganze einfallende Gravitationsenergie in die materielle Energie des durch T_{23} definierten Schwingungsvorganges verwandelt wird. Alsdann ist der Energietensor $t_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes am Ort des Teilchens verschwindend klein gegen $T_{\mu\nu}$.

Nach Einstein[1]) ist

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4\varkappa}\left[\sum_{(\alpha,\beta)} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \sum_{(\alpha,\beta,\tau)} \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\tau}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Fällt also irgendeine Gravitationswelle, z. B. γ_{23}, auf, so muß am Ort des Teilchens

$$\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \sum_{(\tau)} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_\tau}\right)^2 = 0 \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{14}$$

sein, woraus folgt, daß

$$\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_\tau} = 0 \quad (\tau = 1,2,3,4). \tag{15}$$

Infolge der Wellennatur der Funktion γ_{23} ist das nur möglich, wenn γ_{23} im Innern des materiellen Teilchens verschwindet. Dasselbe läßt sich für γ_{31} und γ_{12} beweisen, ebenso wenn mehrere Gravitationswellen zugleich auftreten. Die Schwingungen von T_{23} bewirken aber nach den bei Anwesenheit von Materie gültigen Feldgleichungen (10) selbst wieder Ausstrahlung von Gravitationswellen[2])

$$\gamma_{23} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T_{23}(x_0\, y_0\, z_0\, t-r)}{r}\, dV_0, \tag{16}$$

1) l. c. p. 691. Gleichung (11).
2) A. Einstein, l. c. p. 689.

wobei x, y, z, t die reellen Koordinaten x_1, x_2, x_3, $1/i \cdot x_4$ bezeichnen und zwar mit Index 0 diejenigen des Integrationselementes, ohne Index 0 diejenigen des Aufpunktes.

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

dV_0 ist ein Volumelement des materiellen Teilchens.

Wenn also eine Gravitationswelle auf ein materielles Teichen fällt, so wird die eingestrahlte Energie wieder ausgestrahlt derart, daß am Ort des Teilchens die „Gravitationspotentiale" $\gamma_{\mu\nu}$ dauernd gleich Null sind. Ist eine Ebene mit Masseteilchen genügend dicht besetzt, so wird sie sich einer einfallenden Welle gegenüber so verhalten, als ob die Gravitationspotentiale $\gamma_{\mu\nu}$ auf ihr verschwinden.

Fällt eine Gravitationswelle, z. B. γ_{23}, senkrecht auf eine solche materielle Ebene, so wird sie senkrecht reflektiert und es bildet sich eine stehende Welle aus von der Form

$$\gamma_{23} = 2\, a_{23} \cos \nu x_1 \cos \nu i x_4 \tag{17}$$

(wenn die materielle Ebene in einem der Punkte

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{2\nu} \cdot \quad \pm 3 \frac{\pi}{2\nu}, \ \ldots$$

senkrecht auf der x_1-Achse steht). Da die Welle die Bewegungsgröße

$$\frac{1}{i} t_{41} = \frac{1}{4\varkappa} a_{23}^2 \nu^2 \sin^2 \nu (x_1 - i x_4) \tag{18}$$

mit sich führt, welche auf der Ebene vernichtet und in entgegengesetzter Richtung der reflektierten Welle mitgeteilt wird, so erfährt die Ebene pro Flächeneinheit einen Druck:

$$p = 2E, \tag{19}$$

wo E die mittlere Energiedichte der einfallenden Strahlung

$$E = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} t_{44}\, dx_1 = \frac{\nu^2 a_{23}^2}{8\pi\varkappa} \int_0^{2\pi/\nu} \sin^2 \nu x_1\, dx_1 = \frac{\nu^2 a_{23}^2}{8\varkappa} \tag{20}$$

ist. Befinden sich auf der Flächeneinheit N^2 Partikel, so erfährt das einzelne die Kraft

$$p_1 = \frac{2E}{N^2} = \frac{\nu^2 a_{23}^2}{4\varkappa N^2} \cdot \tag{21}$$

Der Vorgang am einzelnen Teilchen kann also angenähert auch so aufgefaßt werden, als reflektiere es die auffallende

Strahlung vom Querschnitt $1/N^2$. Ist der Raum zu beiden Seiten einer materiellen Ebene A von stehenden, zu ihr parallelen, Wellen durchsetzt, so erleiden die Teilchen von beiden Seiten entgegengesetzt gleiche Drucke. Die stehende Strahlung sei in einen parallelepipedischen Raum mit reflektierenden Wänden eingeschlossen, von denen zwei zu A parallel sind. Wird alsdann A senkrecht zu sich selbst relativ zum Parallelepiped um eine kleine Strecke verschoben, so wachsen auf der einen Seite Strahlungsdichte und -Druck proportional der Verschiebung, während sie auf der anderen Seite im selben Verhältnis abnehmen: Die materiellen Teilchen der Ebene sind durch quasielastische Kräfte an eine Gleichgewichtslage gebunden.

Die Knotenebenen der stehenden Welle (17) sind also stabile Gleichgewichtslagen für materielle Teilchen. Verlaufen in den beiden anderen Koordinatenrichtungen ebenfalls stehende Wellen, die sich aus (8) und (9) ergeben, zu

$$\gamma_{31} = 2a_{31} \cos \nu x_2 \cos \nu i x_4, \tag{22}$$

$$\gamma_{12} = 2a_{12} \cos \nu x_3 \cos \nu i x_4, \tag{23}$$

so sind stabile Gleichgewichtslagen die Schnittpunkte der drei Scharen von Knotenflächen:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right), \\ x_2 &= \lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{n'}{2}\right), \\ x_3 &= \lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{n''}{2}\right), \end{aligned}\right. \quad (n, n', n'' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{24}$$

also die Ecken eines kubischen Raumgitters, dessen Gitterkonstante $= \lambda/2$, wo

$$\lambda = \frac{2\pi}{\nu}, \tag{25}$$

ist.

§ 2. Die elastischen Eigenschaften des Kristallgitters.

Da bei dem in § 1 konstruierten Kristallgitter jedes Atom durch eine quasielastische Kraft an seine Gleichgewichtslage gebunden ist, so reagiert auch das Gitter als ganzes gegen lineare Dilatationen nach dem Hookeschen Gesetz. Es bleibt

nun noch zu beweisen, daß dasselbe auch gegen scherende Deformationen elastisch reagiert.

Wir denken uns zu dem Zweck das Gitter einer infinitesionalen Schiebung parallel der x_1-Achse unterworfen, so daß ein Punkt (x_1, x_2, x_3) übergeht in $(x_1 + \varepsilon x_3, x_2, x_3)$. *Dasselbe* wird erreicht, wenn man das Gitter nicht deformiert, sondern in einen anderen Raum versetzt, dessen Koordinaten x_α' mit den ursprünglichen, x_α, zusammenhängen gemäß

$$(27) \qquad x_1 = x_1' - \varepsilon x_3', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4'.$$

Die Metrik in diesem Raum II muß durch den Tensor $g_{\mu\nu}'(x')$ gegeben sein, der aus dem im Raum I gültigen Fundamentaltensor

$$(28) \qquad \begin{cases} g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1, \quad g_{44} = -1, \\ g_{23} = \gamma_{23} = 2\,a_{23} \cos \nu x_1 \cos \nu i x_4, \\ g_{31} = \gamma_{31} = 2\,a_{31} \cos \nu x_2 \cos \nu i x_4, \\ g_{12} = \gamma_{12} = 2\,a_{12} \cos \nu x_3 \cos \nu i x_4, \end{cases}$$

hervorgeht vermöge (27). Setzt man in die so entstandenen $g_{\mu\nu}'(x')$ statt der x_α' die Koordinaten x_α des ursprünglichen Raumes I ein, so bestimmt dieser Tensor das Gravitationsfeld im deformierten Gitter:

$$(29) \qquad \begin{cases} g_{11}'(x) = -1, \quad g_{22}'(x) = -1, \quad g_{33}'(x) = -1 \\ \qquad\qquad - 4\varepsilon\, a_{13} \cos \nu x_2 \cos \nu i x_4 = -1 - \gamma_{33}'(x), \\ g_{23}'(x) = 2\,a_{23} \cos \nu x_1 \cos \nu i x_4 + 2\varepsilon a_{23} \nu x_3 \sin \nu x_1 \cos \nu i x_4 \\ \qquad\qquad - 2\,\varepsilon\, a_{12} \cos \nu x_3 \cos \nu i x_4 = \gamma_{23}'(x), \\ g_{31}'(x) = \varepsilon + 2\,a_{31} \cos \nu x_2 \cos \nu i x_4 = \gamma_{31}'(x), \\ g_{12}'(x) = 2\,a_{12} \cos \nu x_3 \cos \nu i x_4 = \gamma_{12}'(x). \end{cases}$$

Zu dem im Raum II durch $g_{\mu\nu}'(x')$ definierten Fundamentaltensor gehört ein Energietensor $t_{\mu\nu}(x')$, der sich aus (29) und der Formel[1])

$$(30) \qquad t_{\mu\nu}(x') = \frac{1}{4\varkappa} \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}'(x')}{\partial x_\mu'} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}'(x')}{\partial x_\nu'} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta\tau} \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}'(x')}{\partial x_\tau'} \right)^2 \right]$$

berechnet. $t_{\mu\nu}(x)$ ist alsdann der zum Gravitationsfeld (29) gehörige Energietensor im deformierten Gitter. Insbesondere

1) Vgl. § 1, Formel (13).

sind $t_{41}(x)$, $t_{42}(x)$, $t_{43}(x)$ die Komponenten des Energiestromes parallel den Kanten des deformierten Gitters. Die Komponenten $\bar{t}_{4\alpha}$ des Energiestromes im rechtwinkligen Koordinatensystem werden mittels der Umkehrung von (27)

(31) $\quad x_1' = x_1 + \varepsilon x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4$

gefunden zu

(32) $\quad \bar{t}_{41}(x) = t_{41}(x), \; \bar{t}_{42}(x) = t_{42}(x), \; \bar{t}_{43}(x) = t_{43}(x) + \varepsilon t_{41}(x);$

ferner

$$\bar{t}_{44}(x) = t_{44}(x).$$

Ausrechnen ergibt:

(33) $\quad \bar{t}_{41} = t_{41}' + t_{41}'' + t_{41}''',$

wobei

(34) $\quad \frac{\varkappa}{i} t_{41}' = \nu^2 a_{23}^2 \sin \nu x_1 \cos \nu x_1 \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4,$

(35) $\quad \frac{\varkappa}{i} t_{41}'' = -\varepsilon \nu^3 a_{23}^2 x_3 (2\cos^2 \nu x_1 - 1) \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4,$

(36) $\quad \frac{\varkappa}{i} t_{41}''' = \varepsilon \nu^2 a_{12} a_{23} \sin \nu x_1 \cos \nu x_3 \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4;$

(37) $\quad \frac{\varkappa}{i} \bar{t}_{42} = \nu^2 a_{13}^2 \sin \nu x_2 \cos \nu x_2 \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4;$

(38) $\quad \bar{t}_{43} = t_{43}' + t_{43}'',$

wobei

(39) $\quad \frac{\varkappa}{i} t_{43}' = \nu^2 a_{23}^2 \sin \nu x_3 \cos \nu x_3 \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4,$

(40) $\quad \frac{\varkappa}{i} t_{43}'' = -\varepsilon \nu^2 a_{12}^2 \cos \nu x_1 \sin \nu x_3 \sin \nu i x_4 \cos \nu i x_4;$

(41) $\quad \bar{t}_{44} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_1',$

wobei

(42) $\quad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa t_1 = -\frac{1}{2} \nu^2 a_{23}^2 (\cos^2 \nu x_1 \sin^2 \nu i x_4 \\ \qquad\qquad + \sin^2 \nu x_1 \cos^2 \nu i x_4), \end{array} \right.$

(43) $\quad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa t_2 = -\frac{1}{2} \nu^2 a_{13}^2 (\sin^2 \nu x_2 \cos^2 \nu i x_4 \\ \qquad\qquad + \cos^2 \nu x_2 \sin^2 \nu i x_4), \end{array} \right.$

(44) $\quad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa t_3 = -\frac{1}{2} \nu^2 a_{12}^2 (\sin^2 \nu x_3 \cos^2 \nu i x_4 \\ \qquad\qquad + \cos^2 \nu x_3 \sin^2 \nu i x_4), \end{array} \right.$

(45) $\quad \varkappa t_4 = \varepsilon \nu^2 a_{12} a_{23} \cos \nu x_1 \cos \nu x_3 \sin^2 \nu i x_4,$

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} \varkappa t_1' = -\varepsilon \nu^3 a_{23}^2 x_3 \sin \nu x_1 \cos \nu x_1 (\sin^2 \nu i x_4 \\ \qquad - \cos^2 \nu i x_4). \end{array}\right.$$

Man verifiziert leicht, daß

$$(47)\quad \frac{\partial t_{41}'}{\partial x_1} + \frac{\partial t_1}{\partial x_4} = 0,$$

$$(48)\quad \frac{\partial t_{42}'}{\partial x_2} + \frac{\partial t_2}{\partial x_4} = 0.$$

$$(49)\quad \frac{\partial t_{43}'}{\partial x_3} + \frac{\partial t_3}{\partial x_4} = 0.$$

Die den ungestörten Wellen entsprechenden Strahlungen t_{41}', t_{42}', t_{43}' genügen also für sich allein einzeln dem Impulsenergiesatz.

Ferner ist (falls $a_{12} = a_{23}$)

$$(50)\quad \frac{\partial t_{41}''}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{43}''}{\partial x_3} + \frac{\partial t_4}{\partial x_4} = 0,$$

wonach der Impulsenergiesatz in jedem Volumelement die Umsetzung der beiden Strahlungsarten t_{41}'', t_{43}'' ineinander regelt. Schließlich ist auch

$$(51)\quad \frac{\partial t_{41}''}{\partial x_1} + \frac{\partial t_1'}{\partial x_4} = 0,$$

also wegen (47)

$$(52)\quad \frac{\partial (t_{41}' + t_{41}'')}{\partial x_1} + \frac{\partial (t_1 + t_1')}{\partial x_4} = 0.$$

Der Strahl $t_{41}' + t_{41}''$ bewirkt nun die gesuchte elastische Reaktion des Gitters gegen die Schiebung, wie genauere Untersuchung lehrt:

Irgend ein materielles Teilchen des deformierten Gitters hat die Koordinate x_1:

$$(53)\quad x_1 = n\frac{\pi}{\nu} + \varepsilon x_3 + \frac{\pi}{2\nu} = a \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

und es ist

$$(54)\quad \sin \nu \left(n\frac{\pi}{\nu} + \varepsilon x_3 + \frac{\pi}{2\nu}\right) = 1, \quad \cos \nu \left(n\frac{\pi}{\nu} + \varepsilon x_3 + \frac{\pi}{2\nu}\right) = -\varepsilon x_3,$$

also ist am Orte eines Teilchens:

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\varkappa}{i}(t_{41}' + t_{41}'') = \nu^2 a_{23}^2 \sin \nu i x_4 \cdot \cos \nu i x_4 [-1 \cdot \varepsilon x_3 - \varepsilon x_3 \\ \qquad (\varepsilon^2 x_3^2 - 1)] = 0. \end{array}\right.$$

Man kann daher die stehende Strahlung $t_{41}' + t_{41}''$ zu beiden Seiten des betrachteten Teilchens so entstanden denken, daß je eine fortschreitende Strahlung an demselben reflektiert wird. Hierbei bewirkt sie einen Strahlungsdruck, der sich aus der im Mittel auffallenden Energie berechnet. Letztere ist (pro Flächeneinheit):

$$(56)\qquad E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \int_0^{-i\pi/2\nu} i\,dx_4 \int_a^{a+\pi/2\nu} (t_1 + t_1')\,dx_1 \quad (\text{für } x_1 = a+0),$$

$$(57)\qquad E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \int_0^{-i\pi/2\nu} i\,dx_4 \int_a^{a+\pi/2\nu} (t_1 + t_1')\,dx_1 \quad (\text{für } x_1 = a-0).$$

Mit Hilfe von (42) und (46) ergibt sich hieraus:

$$(58)\qquad 4\varkappa E_1 = -\frac{2}{\pi}\nu^3 \alpha_{23}^2 \int_a^{a+\pi/2\nu} \left(\frac{1}{2}\cos^2 \nu x_1 + \varepsilon \nu x_3 \sin \nu x_1 \cos \nu x_1\right) dx_1$$

$$(59)\qquad = -\frac{2}{\pi}\nu^3 \alpha_{23}^2 \left\{\frac{1}{2\nu}\sin \nu a \cdot \cos \nu a + \frac{1}{2}\varepsilon x_3\right\};$$

$$(60)\qquad 4\varkappa E_2 = -\frac{2}{\pi}\nu^3 \alpha_{23}^2 \int_a^{a+\pi/2\nu} \left(\frac{1}{2}\cos^2 \nu x_1 - \varepsilon \nu x_3 \sin \nu x_1 \cdot \cos \nu x_1\right) dx_1$$

$$(61)\qquad = -\frac{2}{\pi}\nu^3 \alpha_{23}^2 \left\{\frac{1}{2\nu}\sin \nu a \cdot \cos \nu a - \frac{1}{2}\varepsilon x_3\right\}.$$

Wäre nur *eine* Ebene $x_1 = \text{const.}$ mit Masseteilchen besetzt, so würden sich hieraus die Strahlungsdrucke auf ein Teilchen nach (19) und (21) berechnen zu

$$(62)\qquad p_1 = \frac{2E_1}{N^2},$$

$$(63)\qquad p_2 = \frac{2E_2}{N^2}.$$

Da nun N solcher materieller Ebenen hintereinander gereiht sind und jeweils die Differenz der Drucke p_1, p_2 in Betracht kommt, so wirkt auf ein Teilchen die resultierende Kraft:

$$(64)\qquad p = \frac{p_2 - p_1}{N} = \frac{\nu^3 \alpha_{23}^2}{\pi \varkappa N^3} \cdot \varepsilon x_3.$$

In der Flächeneinheit der Ebene $x_3 = \text{konst.}$ befinden sich N^2 Partikel. Insgesamt wirkt daher auf die Flächeneinheit die Kraft

$$(65)\qquad P = \frac{\nu^3 \alpha_{23}^2}{\pi \varkappa N} \cdot \varepsilon x_3 = F \cdot \varepsilon x_3.$$

Denkt man sich also aus dem Gitter eine parallelepipedische Platte geschnitten, die Grundfläche $x_3 = 0$ festgehalten und die gegenüberliegende Fläche $x_3 = \text{const.}$ in sich verschoben, so wirkt dem in dieser Ebene pro Flächeneinheit eine Kraft entgegen, die proportional ist der Schiebung und dem Abstand der beiden Ebenen, in Übereinstimmung mit den Gesetzen der Torsionselastizität. Die Größe F der Formel (65) ist identisch mit dem Torsionsmodul, der sich hiernach aus Wellenlänge λ und „Amplitude" des Gravitationsfeldes berechnet.[1])

$$F = \frac{8\pi^2 a_{23}^2}{\varkappa \lambda^2} . \tag{66}$$

Das elastische Verhalten des Gitters gegen Schiebung folgt notwendig aus den Gleichungen der Gravitationswellen, aber auch nur aus diesen. Diese Eigenschaft würde sich nicht etwa für ein System von drei Scharen elektromagnetischer Wellenzüge ableiten lassen. Daß die somit aufgefundene besondere Eigentümlichkeit der Gravitationswellen gerade einer tatsächlich beobachteten Eigenschaft der Materie entspricht, ist immerhin auffällig.

§ 8. Beziehungen zu experimentell bekannten physikalischen Konstanten.

Wie § 1 und § 2 lehren, ist für die elastischen Konstanten maßgebend die im Kristall enthaltene Gravitationsenergie. Die in der x_1-Richtung fortschreitende Welle

$$\gamma_{23} = a_{23} \cos \nu (x_1 - i x_4) \tag{67}$$

führt nach § 1 (20) die mittlere Energiedichte

$$E = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} t_{44} \, dx_1 = \frac{\nu^2 a_{23}^2}{8\varkappa} \tag{68}$$

mit sich. Also enthält ein aus dem Kristall geschnittener Würfel, dessen Konstantenlänge l ist, von dieser Welle (67) die Energie

$$E l^3 . \tag{69}$$

Die zurücklaufende Welle

$$\gamma_{23} = a_{23} \cos \nu (x_1 + i x_4) \tag{70}$$

1) Eine empirische Bestätigung dieser Formel an experimentell bekannten Konstanten findet sich in § 3, p. 91.

liefert denselben Betrag. Somit enthält der Kristallwürfel, von der x_1-Richtung herrührend, die Energie

$$E_1 = 2El^3. \tag{71}$$

Die im Kristall enthaltene (zur x_1-Richtung gehörige) Energie hat mithin die Dichte

$$H = \frac{E_1}{l^3} = 2E. \tag{72}$$

Werden die drei Kanten des Würfels um dasselbe Stück dl geändert, so vermögen die in Richtung x_2 und x_3 fallenden die Energiedichte der in der x_1-Richtung fortschreitenden Wellen nicht zu beeinflussen, sondern lediglich die in Richtung x_1 fallende Kante; und zwar ist:

$$dH = -H\frac{dl}{l} = -\frac{2E}{l}dl. \tag{73}$$

Der von der Welle (70) bei ihrer Reflexion ausgeübte Druck ist nach § 1 (19)

$$p = 2E. \tag{74}$$

Folglich ist für die Änderung der Kanten um dl in der x_1-Richtung die Kraft nötig:

$$dp = 2dE = dH = -\frac{2E}{l}dl = -\frac{H}{l}dl. \tag{75}$$

Um an einem Würfel die 3 Dimensionen um dasselbe Stück dl zu ändern, sind nach der Elastizitätstheorie in den drei Kantenrichtungen die (einander gleichen) Drucke nötig:

$$dp = \frac{FG}{3F - 2G}\frac{dl}{l}, \tag{76}$$

worin G den Elastizitätsmodul und F den Torsionsmodul bezeichnen.

Aus (76) und (75) folgt daher

$$-H = \frac{FG}{3F - 2G}. \tag{77}$$

Eine zweite Überlegung drückt diese Energie H in chemischen Konstanten aus, da nach den neueren Experimenten, insbesondere den Laue-Diagrammen, im Molekül einer Substanz keine anderen Kräfte wirken als im Raumgitter. Wendet man diese Anschauung auf das Steinsalz an, so wird das Molekül NaCl im kristallisierten Zustand zu-

sammengehalten durch die in einer der drei Koordinatenrichtungen strömende Gravitationsenergie. In den Aggregatzuständen, wo das Molekül isoliert besteht (Schmelze), hätte das Gravitationsfeld nur eine andere Gestalt angenommen, etwa derart, daß die beiden Atome Na und Cl umeinander wie gravitierende Massen rotieren. Die Gravitationsenergie H muß sich daher durch die Bildungswärme des Moleküls ausdrücken.

Ist B die Bildungswärme in Grammkalorien pro Gramm-Mol, J das mechanische Wärmeäquivalent, M das Molekulargewicht, d die Dichte der festen Substanz, so muß (da H auf die Volumeinheit bezogen und in mechanischem Maß gegeben ist)

$$H = B \frac{d}{M} J \tag{78}$$

sein. (78) und (77) zusammen ergeben

$$\frac{F G}{2G - 3F} = B \frac{d}{M} J. \tag{79}$$

Für Steinsalz ist:

$$\begin{cases} G = 4770 \cdot 980{,}6 \cdot 10^5 \text{ Dynen pro qcm}, \\ F = 1294 \cdot 980{,}6 \cdot 10^5 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}, \end{cases} \tag{80}$$

also nach (77):

$$H = \frac{4770 \cdot 1294 \cdot 980{,}6 \cdot 10^5}{2 \cdot 4770 - 3 \cdot 1294} = 1079 \cdot 10^8 \sim 11 \cdot 10^{10} \text{ Erg}. \tag{81}$$

Ferner ist

$$\begin{cases} B = 97{,}7 \cdot 10^3 \text{ g-Kalorien pro g-Mol.}, \\ M = 58{,}5, \\ d = 2{,}17, \\ J = 4{,}19 \cdot 10^5, \end{cases} \tag{82}$$

also nach (78)

$$H = 1466 \cdot 10^8 \sim 14 \cdot 10^{10} \text{ Erg}. \tag{83}$$

(83) und (81) lehren, daß die Beziehung (79) in der Größenordnung erfüllt ist.

Für Sylvin gelten dieselben Überlegungen wie für Steinsalz. Die Konstanten sind:

$$\begin{cases} G = 3750 \cdot 980{,}5 \cdot 10^5, \\ F = 655 \cdot 980{,}5 \cdot 10^5, \end{cases} \tag{84}$$

also nach (77)

$$H = \frac{3750 \cdot 655 \cdot 980{,}5 \cdot 10^8}{2 \cdot 3720 - 3 \cdot 655} \sim 4{,}5 \cdot 10^{10}; \tag{85}$$

ferner

$$\begin{cases} B = 105{,}6 \cdot 10^3, \\ M = 74{,}6, \\ d = 1{,}98, \end{cases} \tag{86}$$

woraus nach (78)

$$H = 1143 \cdot 10^8 \sim 11 \cdot 10^{10}. \tag{87}$$

Nach (87) und (85) erfüllt also Sylvin ebenfalls die Gleichung (79) in der Größenordnung.

Prüfung an experimentellen Zahlenmaterial ermöglicht auch die Formel (66) § 2 für den Torsionsmodul. Nach (83) und (72), (68) folgt a_{23}^2 für Steinsalz aus thermochemischen Messungen zu

$$a_{23}^2 = \frac{4\varkappa}{\nu^3} \cdot 14 \cdot 10^{10} \qquad \text{(c. g. s.)} \tag{88}$$

$$= \frac{\varkappa \lambda^3}{\pi^3} \cdot 14 \cdot 10^{10}. \tag{89}$$

Es ist

$$\varkappa = 1{,}87 \cdot 10^{-27} \tag{90}$$

und für Steinsalz

$$\lambda = 3{,}5 \cdot 10^{-8}, \tag{91}$$

also

$$a_{23}^2 = \frac{1{,}87 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 14}{3{,}14 \cdot 3{,}14} \cdot 10^{-33} \sim 3 \cdot 10^{-32}. \tag{92}$$

Der Torsionsmodul F berechnet sich nach § 2 (66) mit Hilfe von (89) zu

$$F = 8 \cdot 14 \cdot 10^{10} \sim 11 \cdot 10^{11}. \qquad \text{(c. g. s.)} \tag{93}$$

Der experimentelle Wert des Torsionsmoduls ist

$$F \sim 12 \cdot 10^{10}, \qquad \text{(c. g. s.)} \tag{94}$$

weicht also von dem auf Grund ganz andersartiger Messungen berechneten (93) nur um eine Dezimale ab.

Eine weitere Stütze der Theorie dürfte schließlich die einfache Tatsache sein, daß die sogenannten Hochfrequenzspektra der Elemente Linien enthalten, welche zur Gitter-

konstanten des betreffenden Kristalls in naher Beziehung stehen. Z. B. enthält das Spektrum des Kupfers die Linien[1]):

(95) $\lambda_1 = 1{,}538 \cdot 10^{-8}$ cm,

(96) $\lambda_2 = 1{,}543 \cdot 10^{-8}$ „

Im Cu-Kristall sitzen die Atome nach den Laueschen Diagrammen in den Ecken und Flächenmitten von Würfeln, deren Kantenlänge $3{,}6 \cdot 10^{-8}$ cm ist. Man kann dieses oktaedrische Raumgitter durch das bisher betrachtete kubische ersetzen, wenn man die zugehörige Wellenlänge $= 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm annimmt. (Die von Atomen freien Ecken wären vielleicht mit Elektronen besetzt zu denken.) Dieselbe stimmt dann sehr nahe mit den Linien λ_1 und λ_2 im Hochfrequenzspektrum überein.

Nach den zugrunde gelegten Vorstellungen finden im Atom irgendwelche materielle periodische Vorgänge statt, die durch einen Tensor $T_{\mu\nu}$ beschrieben werden können. Dabei ist nicht erforderlich, daß sie identisch sind mit den Atomschwingungen, welche die elektromagnetischen (*Röntgen-*)Impulse erzeugen. Vielmehr wären die Schwingungen des Tensors $T_{\mu\nu}$, wenn das Atom nur Gravitationswellen aussendet, so zu denken, daß dabei das elektrische Moment ungeändert bleibt. Natürlich können auch Schwingungen des elektrischen Moments nebenhergehen, und es ist plausibel, daß deren Frequenz gleich der des Tensors $T_{\mu\nu}$ ist. Es werden dann die ausgesandten elektromagnetischen Wellen von Gravitationswellen begleitet. In dem von Mie[2]) behandelten Falle, wo allein das elektrische Moment oszilliert, verschwindet die Energie der Gravitationswellen praktisch gegenüber der der elektromagnetischen. Nach der eben dargelegten Vorstellung, die durchaus im Einklang stehen dürfte mit Mies Untersuchungen über den inneren Bau der Masseteilchen[3]), kann die Energie der Gravitationswellen die der begleitenden elektromagnetischen beliebig überwiegen. Die Frequenz der Schwingungen des Tensors $T_{\mu\nu}$ ist in dem angeführten Falle des Kupfers gleich der Frequenz der stehenden Gravitationswellen, eine Bestätigung der in § 1, p. 81 gemachten Annahme.

---

1) M. Siegbahn u. W. Stenström, Physik. Zeitschr. 1916. p. 49.
2) G. Mie, Ann. d. Phys. 40. p. 59ff. 1913.
3) G. Mie, „Grundlagen". l. c. Kapitel 2 u. 3.

§ 4. Thermische Ausdehnung.

Die Gravitationswellen genügen nach § 1 formal denselben Gleichungen wie elektromagnetische. Ebenso bestehen formal dieselben Beziehungen zwischen strahlendem Oszillator und ausgesandten Wellen. Es steht also a priori nichts entgegen, versuchsweise auf die Gravitationswellen dieselben thermodynamischen und statistischen Prinzipien anzuwenden wie in der Theorie der Wärmestrahlung auf elektromagnetische, woraus folgen würde, daß die Starhlungsgesetze auch für Gravitationsstrahlung gelten.

Wir schreiben dementsprechend den drei stehenden Gravitationswellen (17), (22), (23) eine Temperatur T zu, welche gleich ist der Temperatur der mit ihnen im Gleichgewicht stehenden inneren Schwingungen der Atome. Letztere ist wieder gleichzusetzen der Temperatur, welche den Translationsschwingungen der Atome zukommt, also der Temperatur des Kristalls schlechthin.

Wir betrachten wieder die zur x_1-Richtung gehörige stehende Strahlung (17). Erhöht man die Temperatur des Kristalls um dT, so erhöht sich ihre Energiedichte H um dH nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz:

$$\frac{dH}{H} = 4\frac{dT}{T}. \tag{97}$$

Da ihr Strahlungsdruck derselbe bleiben soll, so muß wegen (19) auch ihre Dichte dieselbe bleiben. Dies ist nur möglich, wenn sich auch das Volum der Strahlung oder nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz die Wellenlänge λ vergrößert und infolgedessen die Energiedichte um dH wieder abnimmt. Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz muß

$$-4\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{(-dH)}{H} \tag{98}$$

sein. (98) und (97) zusammen ergeben

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dT}{T}. \tag{99}$$

Also ist, wenn $\bar{N}$ Wellenlängen λ auf die Länge l gehen, $l = \bar{N} \cdot \lambda$,

$$\frac{dl}{l} = \frac{dT}{T} \tag{100}$$

und integriert:

$$l = C \cdot T . \tag{101}$$

Setzt man

$$T - T_0 = t , \tag{102}$$

so wird

$$l = l_{t=0}(a\,t + 1) \tag{103}$$

das Gesetz der linearen thermischen Ausdehnung.

Um über den Wert des Ausdehnungskoeffizienten a selbst Aufschluß zu bekommen, muß die Dichte der im Kristall enthaltenen Gravitationsenergie als Funktion von Temperatur und Wellenlänge bekannt sein. Wir setzen für die in den Bereich λ bis $\lambda + d\lambda$ fallenden Wellen die Energiedichte gemäß der Strahlungstheorie gleich

$$\frac{h c^2}{\lambda^5 \left\{ e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \right\}} d\lambda , \tag{104}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit, k die Boltzmannsche Entropiekonstante, h die Plancksche Strahlungskonstante sind. Da sich (104) auf alle drei Koordinatenrichtungen verteilt, so ist die Dichte der in der x_1-Richtung strömenden Energie

$$e_\lambda d\lambda = \frac{h c^2}{3 \lambda^5 \left\{ e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \right\}} d\lambda . \tag{105}$$

Wenn $\lambda = \Delta_1$ bis $\lambda = \Delta_2$ der Bereich der tatsächlich vorhandenen Wellen ist, so ist mithin

$$H = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e_\lambda d\lambda = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{h c^2}{3 \lambda^5 \left\{ e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \right\}} d\lambda . \tag{106}$$

Da der Bereich $\Delta_1 \ldots \Delta_2$ unbekannt ist, so ist auch H noch nicht berechenbar. Nun fällt aber bei niederen Temperaturen T das Maximum der Funktion e_λ gerade auf die kurzen Wellen von der Größenordnung 10^{-8}, wie sie nach der Theorie hier in Frage kommen. Wenn dann in (106) die Integration auf das Intervall 0 bis ∞ ausgedehnt wird, so ist der be-

gangene Fehler bei der hier erstrebten Genauigkeit zu vernachlässigen.

Dann ist aber der Wert des Integrals (106) bekannt, nämlich[1])

$$H = \frac{1{,}08 \cdot 48 \cdot \pi \cdot k^4 T^4}{3 c^3 h^3} = \frac{54{,}43\, k^4 T^4}{c^3 h^3}. \tag{107}$$

Wird die Temperatur des Kristalls um dT erhöht, so nimmt nach dem eingangs dieses § 4 gesagten die Länge l um dl zu, wobei, falls p der Druck ist, die Arbeit geleistet wird.

$$p\, dl = dA. \tag{108}$$

Die Gravitationsenergie nimmt zu nach (107)

$$dH = \frac{4 \cdot 54{,}43 \cdot k^4 T^3}{c^3 h^3} dT. \tag{109}$$

Es muß

$$dA = l\, dH, \tag{110}$$

also, wenn $p = 1$ und $l = 1$, nach (109) und (108)

$$\left[\frac{dl}{dT}\right]_{l=1} = 4 \cdot 54{,}43 \cdot \frac{k^4 T^3}{c^3 h^3}. \tag{111}$$

$$\left[\frac{dl}{dT}\right]_{l=1} = \alpha \tag{112}$$

ist der bereits in (108) eingeführte Ausdehnungskoeffizient. Berücksichtigt man, daß

$$\begin{cases} k = 1{,}347 \cdot 10^{-16}, \\ h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}, \\ c \sim 10^{10}, \\ T \sim 10^{2}, \end{cases} \tag{113}$$

so wird die Größenordnung von (112):

$$\alpha \sim 10^{-5}, \tag{114}$$

---

1) Vgl. z. B. Enz. d. math. Wiss. V. 23: W. Wien, Theorie der Strahlung, p. 308.

was mit den experimentellen Werten der meisten regulär kristallisierenden Substanzen, insbesondere der Metalle, übereinstimmt. Dieses Resultat darf wohl neben die in § 3 aufgefundenen empirisch-numerischen Bestätigungen gestellt werden.

Ferner nimmt der Ausdehnungskoeffizient gemäß (111) mit T^3 nach 0 ab, ebenfalls in Übereinstimmung mit dem bis jetzt vorhandenen experimentellen Material.

Die qualitative und quantitative Übereinstimmung der vorgetragenen Ergebnisse mit der Erfahrung scheint die zugrunde liegende Theorie zu bestätigen und legt Erweiterungen nahe. Andererseits aber eröffnet sich dadurch die Aussicht auf eine Prüfung der Gravitationslehre selbst nicht nur, wie bisher, an astronomischen Erscheinungen, sondern an den inneren Vorgängen der Materie.

Im Felde, Anfang Juni 1917.

(Eingegangen 18. Juni 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 10.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Widerstand, Peltierwärme und elektrische Nachwirkung außerhalb und in einem Magnetfelde, besonders in kristallinischem Wismut;* von *G. Borelius* und *A. E. Lindh.*

Inhalt.

I. Einleitung. Das Wismutmaterial. — § 1. Einleitung. — § 2. Herstellung und Bezeichnung des Wismutmaterials.

II. Messung von Widerstand, Peltierwärme und Thermokraft. — § 3. Experimentelle Anordnung. — § 4. Bestimmung einer Apparatkonstanten. — § 5. Widerstand im Wismutkristall und seine Änderung im Magnetfelde. — § 6. Longitudinaler Peltiereffekt im Wismutkristall und seine Änderung im Magnetfelde. — § 7. Nachweis eines von Lord Kelvin vorausgesagten transversalen Peltiereffektes in Wismut. — § 8. Messung von Thermokräften im Wismutkristall. — § 9. Messungen an elektrolytischem und gepreßtem Wismut.

III. Messung der elektrischen Nachwirkung. — § 10. Der Pendelunterbrecher. — § 11. Die Meßanordnung. — § 12. Nachwirkung ohne Magnetfeld. — § 13. Nachwirkung in einem Magnetfeld.

IV. Übersichtliche Zusammenfassung der Resultate und Prüfung theoretischer Beziehungen. — § 14. Die Resultate der Widerstandsmessungen. — § 15. Die Resultate der Messungen von Peltierwärme und Thermokraft. — § 16. Die elektrische Nachwirkung.

I. Einleitung. Das Wismutmaterial.

§ 1. Einleitung.

In einer neulichst veröffentlichten Schrift[1]) haben die Verfasser den elektrischen Widerstand und die Thermokraft im Wismutkristall in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur zwischen derjenigen der flüssigen Luft und dem Schmelzpunkte des Wismuts untersucht. Aus den Messungen ging unter anderem hervor, daß unser Material gut gereinigt gewesen ist. Wir haben daher jetzt an ähnlich erhaltenem Material die Messungen nach anderen Seiten hin fortgesetzt.

1) G. Borelius u. A. E. Lindh, Ann. d. Phys. 51. p. 607. 1916.

Für den Widerstand haben wir besonders den Einfluß verschieden orientierter Magnetfelder untersucht. Wir vervollständigen hierbei eine Untersuchung von van Everdingen[1]), die aber an ziemlich unreinem Material ausgeführt zu sein scheint.

Die Messung der Peltierwärme an den kleinen Kristallstäben wird durch eine von Borelius[2]) neulichst beschriebene Methode ermöglicht. Wir suchen hier die quantitativen Beziehungen der longitudinalen Effekte verschiedener Richtungen miteinander und mit den Transversalen nachzuweisen. Die Transversaleffekte sind, soweit uns bekannt, früher nicht Gegenstand der Untersuchung gewesen.

Die Messungen der Peltierwärme stehen übrigens in nahem Zusammenhang mit den Messungen der elektrischen Nachwirkung. Diese sind zunächst durch eine theoretische Arbeit von T. Heurlinger[3]) veranlaßt, in der er die elektrische Nachwirkung auf Temperaturdifferenzen im Material zurückführt. Er behandelt zunächst die Nachwirkung eines in einem Magnetfelde sich befindenden zylindrischen Drahtes, wo die Temperaturdifferenzen durch galvanomagnetische Effekte verursacht werden. Es war zuerst unsere Absicht, auch die direkten Folgerungen dieser Arbeit von Heurlinger zu prüfen, und es wurde schon dort von ihm angekündigt, daß solche Messungen in Vorbereitung waren. Unterdessen hat aber Geipel[4]) ältere Versuchsresultate veröffentlicht, die die Theorie so gut bestätigen, daß weitere Belege dieser Art nicht sehr notwendig zu sein scheinen. Wir haben uns daher hauptsächlich den Nachwirkungsphänomenen im Wismutkristall zugewandt und können durch Vergleich mit den Messungen über die Peltiereffekte die Grundannahme von Heurlinger gut bestätigen.

Alle die thermoelektrischen Phänomene in unserem Kristall zeigten sich zwar zuerst unerwartet kompliziert. Es gelang uns jedoch durch die Annahme, daß die Richtungen der thermoelektrischen Achsen durch Spannungen im Material

1) E. van Everdingen, Leiden, Comm. Nr. 61. 1900. Arch. sc. phys. et nat. 11. p. 433. 1901.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 52. p. 398. 1917.

3) T. Heurlinger, Physik. Zeitschr. 17. p. 221. 1916.

4) J. Geipel, Ann. d. Phys. 51. p. 503. 1916.

verrückt waren, die Komplikationen rechnerisch zu beherrschen und die Erfüllung der theoretischen Forderungen nachzuweisen. Nur für die Peltier- und Nachwirkungseffekte im Magnetfelde werden die Verhältnisse durch die genannte Ursache allzu kompliziert. Unsere Messungen an diesen Größen können daher zunächst nur als qualitativ von Interesse sein.

Wir geben im zweiten und dritten Abschnitt die Versuche und ihre direkten Resultate an. Die Einteilung wird hier durch die verschiedenen Versuchsanordnungen bedingt. In dem vierten Abschnitt haben wir die Resultate mehr nach theoretischen Gesichtspunkten zusammengestellt. Die mathematische Diskussion ist dabei von Borelius durchgeführt.

§ 2. Herstellung und Bezeichnung des Wismutmaterials.

Das bei unseren Untersuchungen benutzte Material bestand vor allem aus kristallinischem Wismut; dazu haben wir auch zum Vergleich ein Blatt aus elektrolytischem Wismut sowie gepreßte Drähte von Hartmann & Braun untersucht.

Das kristallinische Wismut wurde in der Form kleiner Stäbchen untersucht. Diese Stäbchen waren aus ein und demselben, am 20. Dezember 1916 hergestellten Schmelzstück, das nach vorher beschriebener Methode[1]) erhalten war, ausgesägt, und zwar teils parallel zur Kristallachse (senkrecht zu den Spaltebenen und mit || bezeichnet), teils senkrecht der Kristallachse (parallel zu den Spaltebenen [⊥]), teils auch so, daß die Kristallachse einen Winkel von 45° mit der Längsrichtung bildete (∠). Die Länge und Querschnitte der Stäbchen werden in den die Versuchsresultate enthaltenden Tabellen ersichtlich.

Um bei den Messungen von der Nachwirkung im Magnetfelde homogene Felder zu erhalten, benutzten wir zylindrische Polschuhe mit einem Diameter von 5,5 cm. Die Länge der untersuchten Präparate durfte dann diesen Wert nicht überschreiten. Die Stäbchen wie auch die Drähte waren mit Schellack auf einer Glimmerscheibe befestigt und dann an den Enden mit Woods Metall zusammengelötet, so daß sie einen zusammenhängenden Leiter bildeten. Die beiden äußeren Enden waren an zwei Kupferbleche gelötet, zu welchen die Leitungsdrähte führten.

1) G. Borelius u. A. E. Lindh, l. c.

In der Tab. 1 haben wir eine Übersicht der untersuchten Kristallstäbchen, der Art und des Datums der Untersuchung geliefert. Da die sämtlichen Präparate mit Woods Metall gelötet und darum für eine Erwärmung ausgesetzt worden sind, haben wir, um dies anzudeuten, die kleinen Buchstaben beigefügt; *a* bezeichnet, daß das Präparat zum erstenmal erwärmt ist, *b* zum zweitenmal. Alle diese Angaben sind von gewisser Bedeutung, da es sich hier wie auch bei früheren Untersuchungen erwiesen hat, daß die Eigenschaften des Wismuts von seiner thermischen Vorgeschichte und seinem Alter sehr abhängig sind.

Tabelle 1.

Bezeichnung	Bemerkungen	Nachwirkung ohne Feld	Nachwirkung im Felde	
$A \perp a$	Aus je acht Stäbchen zusammengesetzt	13. Februar	15. Februar	
$B \parallel a$		13. „	20. „	
$C \angle a$		12. „	17. „	
		Peltierwärme	Widerstand	Thermokraft
$D \perp a$		1. März	—	—
$D \perp b$		4. „	3. März	5. März
$E \parallel a$		8. „	8. „	—
$E \parallel b$	Ein wenig kürzer als $E \parallel a$	—	—	26. März
$F \parallel a$	In der Achsenrichtung gepreßt	9. März	9. März	—
$G \angle a$		10.—13. März	10. u. 13. März	—
$G \angle b$		14.—25. „	21. März	26. März
$H \perp a$		—	16. April	—
$J \perp a$		—	17. „	—

Das elektrolytische Wismut wurde nach der Methode von Righi[1]) hergestellt. Das Wismut (von Kahlbaum) wurde in chlorfreier Salpetersäure gelöst; zur Lösung wurde Wasser zugesetzt, wonach filtriert wurde. Das Wismut wurde dann an einem als Kathode dienenden Platinblech (10×22 mm) ausgefällt; als Anode diente eine Bi-Platte von derselben Länge und Breite wie die Kathode. Nachdem die Wismutschicht eine hinreichende Dicke erhalten hatte, wurde die Elektrolyse unterbrochen und das Platinblech sodann vorsichtig

1) A. Righi, Acad. dei Linc. (3) 19, im Separatabdruck p. 23ff. 1884.

abgezogen. Die Dicke des so erhaltenen Streifens betrug 0,8 mm. Um den Streifen zur Nachwirkungsmessung verwenden zu können, wurde mittels einer Säge mit Schnitten senkrecht der Längsrichtung versehen, so daß die Form des Präparates der obigen des kristallinischen Wismuts gleich wurde.

II. Messung von Widerstand, Peltierwärme und Thermokraft.

§ 3. Experimentelle Anordnung.

Widerstand und Peltierwärme sowie in einigen Fällen auch Thermokraft sind in demselben Apparate gemessen. Der Apparat sowie seine Benutzung zu kombinierten Messungen von Peltierwärme und Wärmeleitvermögen ist neulichst in dieser Zeitschrift ausführlich beschrieben worden.[1]) Wir wollen uns daher jetzt auf eine ziemlich kurze Darstellung beschränken und geben in diesem Paragraphen zunächst die Konstruktion des Apparates (Fig. 1), dessen verschiedene Anwendungen in den späteren folgen werden.

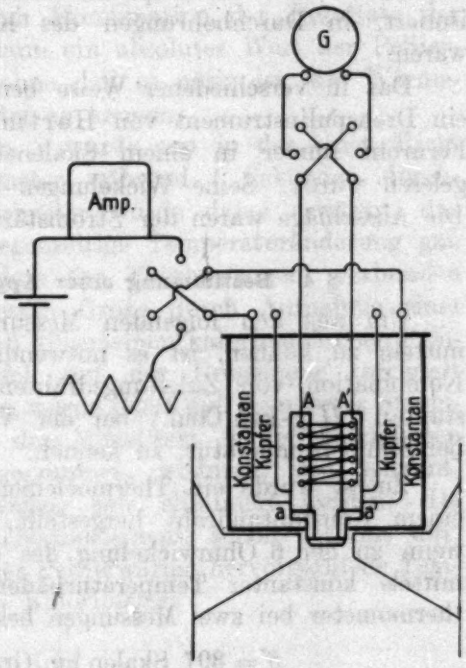


Fig. 1.

Geschützt in einem Messinggefäße befinden sich die isoliert befestigten kupfernen „Kalorimeter" A und A'. Drahtstücke und Stäbe, die wenigstens eine Länge von 18 mm hatten und nur außerhalb des Feldes zu messen waren, wurden zwischen diesen Kalorimetern bei $a - a'$ festgeklemmt. Sonst wurden dort zwei winkelgebogene, dicke Kupferstücke an-

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 52. p. 398. 1917.

gebracht, an deren durch ein Loch im Gefäßboden herausragenden Enden, die sich in einem Abstand von ca. 9 mm befanden, die kleinen Kristallstäbe mit Woodschem Metall angelötet wurden. Das gut umkleidete Gefäß wurde dann an den meißelförmigen Polschuhen eines Elektromagnets placiert, wodurch der Meßstab in ein ziemlich homogenes Magnetfeld gebracht wurde.

In jedem Kalorimeter waren weiter ein Konstantan- und ein Kupferdraht befestigt. Die Temperaturdifferenz des Kalorimeters wurde durch sechs hintereinander gekoppelte Thermopaare aus Kupfer-Konstantan in Verbindung mit einem empfindlichen Galvanometer gemessen. Die dünnen Thermoelemente wurden an Kupferdrahtstücke angelötet, die, dünn isoliert, in Durchbohrungen des Kalorimeters eingestochen waren.

Das in verschiedener Weise benutzte Galvanometer war ein Drehspulinstrument von Hartmann & Braun, das mit Fernrohr immer in einem Skalenabstand von 245 cm abgelesen wurde. Seine Wickelungen hatten 6 und 100 Ohm. Die Ausschläge waren der Stromstärke gut proportional.

§ 4. Bestimmung einer Apparatkonstanten.

Um aus den folgenden Messungen absolute Werte ermitteln zu können, ist es notwendig, die Peltierwärme der Kombination von Zuleitungsdrähten aus Kupfer und Konstantan (Π g-kal./Coul.) bei der Versuchstemperatur, d. h. bei Zimmertemperatur, zu kennen.

Zuerst wurde ein Thermoelement aus zwei Kupfer- und einem Konstantandraht hergestellt, dessen Empfindlichkeit, wenn zu der 6 Ohmwickelung des Galvanometers gekoppelt, mittels konstanter Temperaturbäder und einem Beckmannthermometer bei zwei Messungen bestimmt wurde zu

$$\beta = 397 \text{ Skalen cm/Grad um } 14{,}5^0$$

und

$$\beta = 410 \text{ Skalen cm/Grad um } 19{,}5^0.$$

Das so kalibrierte Thermoelement wurde dann bei der Messung der Peltierwärme der Kupfer-Konstantandrähte benutzt. Die gemessenen Drähte waren von denselben Rollen entnommen wie die im Apparate eingesetzten. Die Messung

geschah in der Hauptsache nach der von Batelli angegebenen Methode mit zwei Kalorimetern, wo in dem einen eine Wärmeentwickelung, in dem anderen eine Absorption infolge des Peltiereffekts auftreten.

Die zwei aus Kupfer verfertigten, auswendig vernickelten Kalorimeter hatten dicke äußere Wände, und dazu innere Scheidewände, um eine schnelle Temperaturausgleichung zu bewirken, auch wenn z. B. Wasser in den Kalorimetern enthalten war. Die Drähte waren an den Seiten der Kalorimeter festgeschraubt, das Thermoelement an zwei konischen, im Deckel dünn isoliert eingesetzten Zäpfen befestigt.

Die Kalorimeter wogen 127,3 bzw. 127,5 g. Sie wurden teils leer, teils mit 6,135 bzw. 6,160 g Wasser gefüllt zur Messung verwendet. Durch Kombination der Resultate der beiden Messungen kann dann ein absoluter Wert der Peltierwärme erhalten werden, ohne daß es nötig ist, die Wärmekapazitäten der Kalorimeter zu kennen.

Ein konstanter Strom S wurde erst in der einen Richtung der beiden Kalorimeter während t Sekunden durchgesandt. Das eine Kalorimeter wurde dabei erwärmt, das andere abgekühlt. Die gegenseitige Temperaturänderung gab am Galvanometer, mit dem das Thermoelement verbunden war, einen Ausschlag, dessen Größe durch Aufnahme einer Vor- und Nachperiode nach allgemeinen kalorimetrischen Prinzipien für Wärmeaustausch mit der Umgebung korrigiert wurde. Dasselbe Verfahren wurde dann mit geänderter Stromrichtung wiederholt und der Mittelwert Δ der korrigierten Galvanometerausschläge genommen, wodurch, wie bekannt, Einflüsse von der Joulewärme usw. eliminiert werden. Da die Empfindlichkeit des Thermoelements schon bekannt war, konnte hieraus die von der Peltierwärme hervorgerufene Temperaturänderung des einen Kalorimeters

$$\frac{\Delta}{2\beta}$$

bestimmt werden.

Bezeichnet Π den Peltierkoeffizienten, S die Stromstärke in Ampere, t die Dauer des Stromschlusses in Sekunden und K die Wärmekapazität des Kalorimeters in g-kal./Grad, so haben wir

$$\Pi \cdot S_1 t_1 = K \cdot \frac{\Delta_1}{2\beta},$$

wo sich Index 1 auf die Messung mit leerem Kalorimeter bezieht. Wenn die Kalorimeter dann mit im Mittel 6,08 g Wasser gefüllt gemessen wurden, war

$$\Pi \cdot S_2 t_2 = (K + 6{,}14) \frac{\Delta_2}{2\beta_2},$$

wenn wir für diesen Fall Index 2 benutzen.

Unsere Messungen wurden alle nahe bei 20° ausgeführt. Die Elimination von K gibt dann aus den obigen Ausdrücken

$$\Pi_{20°} = \frac{6{,}14}{2\beta} \cdot \frac{1}{\frac{S_2 t_2}{\Delta_2} - \frac{S_1 t_1}{\Delta_1}}.$$

Für

$$\frac{S_2 t_2}{\Delta_2} - \frac{S_1 t_1}{\Delta_1}$$

ergaben zwei verschiedene Messungen, die mit Stromstärken von ca. 3,3 bzw. 1,6 Amp. ausgeführt wurden, mit guter Übereinstimmung 0,251 und 0,252 Amp. sec/Skalen cm. Da weiter bei 20°

$$\beta = 411$$

zu setzen ist, bekommen wir

$$\Pi = 3{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ g-kal./Coul.}$$

als Wert des Peltierkoeffizienten der benutzten Kupfer- und Konstantandrähte bei 20°.

§ 5. Widerstand im Wismutkristall und seine Änderung im Magnetfelde.

Die Widerstandsmessungen wurden mit dem Apparate in Fig. 1 einfach so ausgeführt, daß zu den Konstantandrähten ein Stromkreis mit Amperemeter, zu den Kupferdrähten das Galvanometer (100 Ohmwickelung) über einem großen Widerstande (3000 Ohm) angeschlossen wurde. Die Empfindlichkeit des Galvanometers, in dieser Weise als Millivoltmeter benutzt, war zu $53{,}0 \cdot 10^{-6}$ Volt bestimmt.

Die Meßresultate sind in der Tab. 2 zusammengestellt. Die erste Spalte enthält die Bezeichnungen und die Dimensionen der Stäbe. Die Wismutstäbe waren an den Enden der winkelgebogenen Kupferstücke mit Woodschem Metall angelötet, die sich in einem Abstande von 8,7 mm befanden. Die effektiven Längen der Stäbe müssen aber etwas höher

geschätzt werden. Wir haben sie überall zu 9,5 mm gesetzt. Hierin liegt zwar eine bedeutende Unsicherheit, die dadurch noch größer wird, daß der Strom hier am Ende des Stabes nicht dieselbe Orientierung zur Kristallachse hat wie in seinen anderen Teilen.

Die zweite Spalte enthält die Feldstärke in Gauss sowie die Richtung der Kraftlinien. Da wir unsere Messungen nur in gewissen einfachsten Hauptlagen ausgeführt haben, genügen hierfür die folgenden Bezeichnungen:

n = Feld normal auf Strom-Kristallachsenebene;
p = Feld in $S-K$-Ebene parallel der Achse;
s = Feld in $S-K$-Ebene senkrecht der Achse;
l = Feld in $S-K$-Ebene longitudinal zum Strom;
t = Feld in $S-K$-Ebene transversal zum Strom.

Tabelle 2.

Stab	Feld in Gauss	Amp.	53.10^{-6} Volt	Spez. Widerstand bzw. seine Zunahme	Temp.
$D \perp b$	—	0,125	19,7	1,24	18,0°
9,5 × 1,42 × 0,98	2300 p t		0,415	0,026	
$J \perp a$	—	0,1075	16,2	1,26	18,0°
9,5 × 1,43 × 1,12	2300 p t		0,303	0,025	
	„ s l		0,666	0,056	
$H \perp a$	—	0,147	16,1	1,22	16,0°
9,5 × 1,45 × 1,37	2300 n		1,039	0,079	
	„ s l		0,690	0,052	
$E \parallel a$	—	0,276	22,7	1,92	20,1°
9,5 × 2,56 × 1,63	2300 n s t		1,347	0,114	
	„ p l		0,575	0,049	
$F \parallel$ gepreßt	—	0,288	20,2	1,51	20,0°
9,5 × 2,47 × 1,56	2300 n s t		1,068	0,080	
	„ p l		0,564	0,042	
$G \angle a$	—	0,299	17,8	1,36	18,2°
9,5 × 2,64 × 1,55	2300 n		1,18	0,090	
	„ l		0,79	0,060	
$G \angle b$	—	0,305	19,50	1,46	21,0°
9,5 × 2,64 × 1,55	2300 p		0,303	0,023	
	„ s		1,248	0,093	
	„ l		0,817	0,061	
	„ t		0,854	0,064	
$G \llcorner a$	—	0,334	20,9	1,42	21,0°
9,5 × 2,64 × 1,55	900 n		0,155	0,011	
	1500 n		0,576	0,039	
	2300 n		1,363	0,093	

Bei $H \perp a$, $E \parallel a$, $F \parallel$ gepreßt und $E \parallel a$ lag die Kristallachse in der Zeichnungsebene der Fig. 1. Bei $D \perp b$ und $J \perp a$ war sie gegen diese Ebene senkrecht bei $G < b$ unter 45^0 geneigt

Die nächsten Kolumnen enthalten Stromstärke und Spannung. Die Spannung ist in Skalenzentimeter angegeben, und zwar ist teils der Ausschlag, der beim Schließen der Stromes ohne Feld observiert wurde, teils der Ausschlag, des beim Anlegen des Feldes hinzukommt, angeführt worden. Das letztere ist ein Mittel aus mehreren nacheinander gemachten Beobachtungen.

Aus diesen Angaben sind dann die spezifischen Widerstände und deren absoluten Zunahmen in dem Magnetfelde berechnet.

§ 6. Longitudinaler Peltiereffekt im Wismutkristall und seine Änderung im Magnetfelde.

Wird ein konstanter Strom über den kupfernen Zuleitungsdrähten des Apparates (Fig. 1) durch den Wismutstab geschickt, so bekommt das Galvanometer nach t Sekunden einen Ausschlag, der auf Einheit der Stromstärke reduziert und, wenn wir, um etwaige Joulewirkungen zu eliminieren, zwei Ausschläge bei verschiedenen Stromrichtungen addieren, geschrieben werden kann

$$\Theta_1 = \Pi_1 . F(t) ,$$

wo Π_1 der Peltierkoeffizient Wismut-Kupfer und $F(t)$ eine Funktion ist, die außer von der Zeit t noch von Wärmeleitungs- und Kapazitätsverhältnissen im Apparate sowie von der Empfindlichkeit des Galvanometerkreises abhängt. Ebenso bekommen wir für einen Strom über den Konstantandrähten

$$\Theta_2 = \Pi_2 F(t) ,$$

wo Π_2 der Peltierkoeffizient Wismut-Konstantan ist. Da die Zeitfunktion in beiden Fällen dieselbe ist und weiter

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \Pi$$

der Peltierkoeffizient Konstantan-Kupfer ist, bekommen wir

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_2} . \tag{1}$$

Daß die obigen Relationen auch wirklich gelten, ist von Borelius[1]) neulichst theoretisch und experimentell nachgewiesen worden.

Die Peltierkoeffizienten sind im allgemeinen den absoluten Temperaturen einigermaßen proportional, und das Verhältnis Π_1/Π ist daher in dem kleinen Temperaturbereiche, wo unsere Messungen ausgeführt sind, angenähert von der Temperatur unabhängig. Da wir Π (vgl. § 4) bei 20° zu $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ kal./Coul. bestimmt haben, bekommen wir daher auch den Peltierkoeffizienten Wismut–Kupfer bei 20° aus

$$\Pi_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_2} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ g-kal./Coul.} \tag{2}$$

mit einer für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit.

Die Messungen, deren Resultate wir in den Tabb. 3—8 zusammengestellt haben, sind nun in folgender Weise ausgeführt. Der Strom wurde zuerst in der einen Richtung, z. B. durch die Kupferdrähte, geschlossen und das Galvanometer nach 3, 4, 5 und 6 Minuten abgelesen. Mit geeigneten Stromstößen wurde dann eine schnelle Wiederkehr zur Nullage erreicht und einige Minuten gewartet, bis daß die thermischen Störungen verschwunden waren. Der Strom wurde dann in entgegengesetzter Richtung geschlossen und das Galvanometer mit denselben Zeitintervallen wie früher beobachtet. Die Differenzen der in den beiden Fällen zu entsprechenden Zeiten ausgeführten Ablesungen sind die in den Tabellen eingeführten Θ_1-Werte. Wenn dann der Strom über den Konstantandrähten zugeleitet wird, werden in ähnlicher Weise die Θ_2-Werte erhalten. Aus Θ_1 und Θ_2 wird für jede Zeit der Peltierkoeffizient Π_1 der Wismutstäbe gegen Kupfer relativ zur Peltierwärme Konstantan–Kupfer gemäß (1) berechnet und aus dem in der vorletzten Kolumne enthaltenen Mittel gemäß (2) der absolute Peltierkoeffizient berechnet und in die letzte Kolumne eingetragen.

Wir rechnen das Wismut sowie das Konstantan thermoelektrisch negativ gegenüber Kupfer. Die Wismutstäbe waren alle mehr negativ als das Konstantan. Die Anlegung eines Magnetfeldes macht das Wismut immer noch mehr negativ. Da das Wismut dem Konstantan am nächsten liegt, ist es

1) G. Borelius, l. c.

vorteilhaft, die Einwirkung der Magnetfelder durch die Änderung in den Θ_2-Werten zu messen, da in diesem Falle größere Stromstärke verwendet und damit größere Genauigkeit bekommen werden kann. Wir bezeichnen die Zuschläge der Θ_2-Werte mit $\Delta\Theta_2$. Beobachtet wird im Felde also die Größe $\Theta_2 + \Delta\Theta_2$. Da die Wärmeleitung über den Wismutstäben klein ist gegenüber der Leitung nach anderen Wegen im Apparate, können wir die wahrscheinlich stattfindenden Änderungen der Wärmeleitfähigkeit des Wismuts im Felde vernachlässigen und berechnen die Änderung in der Peltierwärme zu

$$\Delta\Pi = \frac{\Delta\Theta_2}{\Theta_1 - \Theta_2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ g-kal./Coul.} \qquad (3)$$

Tabelle 3.

Peltierwärme, Stab $D \perp a$.

$s_1 = 0{,}15$ Amp., $s_2 = 0{,}84$ Amp. 20°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		1	59,6	76,0	91,5	103,2		
Θ_2		3	4,7	6,6	8,1	9,5		
Π			1,09	1,10	1,10	1,10	1,10	3,30
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 n	1	7,2	9,7	11,8	13,6		
$\Delta\Pi$			0,045	0,045	0,044	0,044	0,045	0,135
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 sl	1	5,5	7,5	9,3	10,8		
$\Delta\Pi$			0,014	0,014	0,015	0,014	0,014	0,042

Tabelle 4.

Peltierwärme, Stab $D \perp b$.

$s_1 = 0{,}15$ Amp., $s_2 = 0{,}85$ Amp. 19,5°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		2	62,9	79,5	94,3	107,3		
Θ_2		4	7,1	9,3	11,2	12,7		
Π			1,147	1,13	1,13	1,14	1,13	3,39
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 pl	2	9,0	11,7	14,0	15,8		
$\Delta\Pi$			0,035	0,035	0,034	0,033	0,034	0,102
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	900 sl	1	7,5	9,6	11,5	13,2		
$\Delta\Pi$			0,006	0,004	0,003	0,004	0,004	0,012
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	1500 sl	1	7,9	10,2	12,2	14,0		
$\Delta\Pi$			0,013	0,014	0,012	0,013	0,013	0,039
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 sl	1	8,7	11,3	13,6	15,5		
$\Delta\Pi$			0,027	0,029	0,028	0,029	0,028	0,084

Tabelle 5.

Peltierwärme, Stab $E \parallel a$.

$s_1 = 0{,}15$ Amp., $s_2 = 0{,}52$ Amp. 20,5°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		2	90,2	113,8	133,6	150,6		
Θ_2		2	36,3	46,0	54,5	61,3		
Π			1,67	1,68	1,69	1,69	1,68	5,04
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *n st*	1	42,4	53,6	63,0	71,2		
$\Delta\Pi$			0,112	0,112	0,108	0,110	0,111	0,333
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *p l*	1	37,2	47,2	55,8	63,1		
$\Delta\Pi$			0,016	0,018	0,016	0,021	0,018	0,054

Tabelle 6.

Peltierwärme, Stab $F \parallel$ gepreßt.

$s_1 = 0{,}15$ Amp., $s_2 = 0{,}52$ Amp. 20,5°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		1	82,1	103,3	121,6	137,0		
Θ_2		2	27,6	34,9	41,3	46,7		
Π			1,51	1,51	1,51	1,52	1,51	4,53
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *n st*	1	31,2	39,5	46,6	52,6		
$\Delta\Pi$			0,067	0,067	0,067	0,065	0,066	0,198
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *p l*	1	28,9	36,3	43,2	48,8		
$\Delta\Pi$			0,024	0,021	0,024	0,023	0,023	0,069

Tabelle 7.

Peltierwärme, Stab $G \angle a$.

$s_1 = 0{,}15$ Amp., $s_2 = 0{,}36$ Amp. 19°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		1	102,9	129,6	152,6	171,9		
Θ_2		2	48,8	61,9	72,7	82,2		
Π			1,90	1,91	1,91	1,92	1,91	5,73
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *n*	1	59,8	75,7	89,1	100,6		
$\Delta\Pi$			0,202	0,204	0,205	0,205	0,204	0,612
Θ_2		2	48,3	61,3	71,8	81,4		
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 *l*	2	51,8	65,4	76,9	86,9		
$\Delta\Pi$			0,063	0,060	0,063	0,060	0,062	0,186

Tabelle 8.

Peltierwärme, Stab $G \angle b$.

$s_1 = 0{,}14$ Amp., $s_2 = 0{,}43$ Amp. 20°

	Gauss	Zahl der Reihen	Minuten nach dem Stromschluß 3	4	5	6	Mittel	10^{-3} kal./Coul.
Θ_1		2	100,8	126,8	142,6	168,0		
Θ_2		8	44,7	56,4	66,7	75,1		
Π			1,80	1,80	1,81	1,81	1,80	5,40
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 p	1	45,3	57,2	67,5	76,1		
$\Delta\Pi$			0,010	0,011	0,010	0,010	0,010	0,030
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 s	1	50,3	63,9	75,0	84,8		
$\Delta\Pi$			0,100	0,105	0,100	0,104	0,102	0,306
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 l	2	47,8	60,6	71,4	80,8		
$\Delta\Pi$			0,055	0,059	0,057	0,060	0,058	0,174
$\Theta_2 + \Delta\Theta_2$	2300 t	1	48,2	62,3	73,7	83,2		
$\Delta\Pi$			0,062	0,083	0,084	0,087	0,079	0,237

Zur Kontrolle sind im allgemeinen die Θ_1- und Θ_2-Werte mehrmals vor und nach den Messungen in den Feldern ermittelt und haben in den mitgeteilten Versuchsreihen immer gute Übereinstimmung gezeigt. In den Tabellen sind nur die Mittelwerte eingeführt.

Die Feldstärke ist in Gauss, die Feldrichtungen wie im vorigen Paragraphen (p. 105) angegeben.

§ 7. Nachweis eines von W. Thomson vorausgesagten transversalen Peltiereffektes in Wismut.

Als Lord Kelvin (damals W. Thomson) vor mehr als sechzig Jahren seine berühmte Theorie der Thermoelektrizität durchführte, die ihm unter anderem zur Voraussage des Thomsoneffektes Anlaß gab, hat er auch mit aller Schärfe eine in gewissen Kristallstäben auftretende transversale Wärmewirkung angekündigt.[1]) Die Existenz derselben ist weiter von Voigt[2]) in seiner „Kristallphysik" hervorgehoben worden. Wir haben nun den experimentellen Nachweis des Effektes, der bis jetzt ausgeblieben war, in Angriff genommen und an dem Stabe $F \angle$ auch quantitative Messungen ausgeführt.

1) W. Thomson, Math. and Phys. Papers **1.** p. 273 u. 324. 1882; Trans. Roy. Soc. Edinb. **21.** 1854; Proc. Roy. Soc. Edinb. May 1854.
2) W. Voigt, Kristallphysik 1910. p. 551.

Der Stab war unter 45° zur Kristallachse ausgeschnitten. Die Seiten, die gegen die Achse um 45° geneigt waren, hatten einen Abstand von 1,55 mm, die übrigen die Achse enthaltenden einen Abstand von 2,64 mm. Der Stab war an den winkelgebogenen Kupferstücken des Apparates in Fig. 1 befestigt, parallel mit den erstgenannten Seiten der Zeichnungsebene dieser Figur. Wenn der Stab vom Strome durchflossen wird, soll nun nach Thomson zwischen diesen Seiten eine Temperaturdifferenz auftreten. Um diese Temperaturdifferenz zu messen, setzten wir hier zwei kleine, an der Innenseite dünn lackierte Kupferscheiben an, an welchen das aus

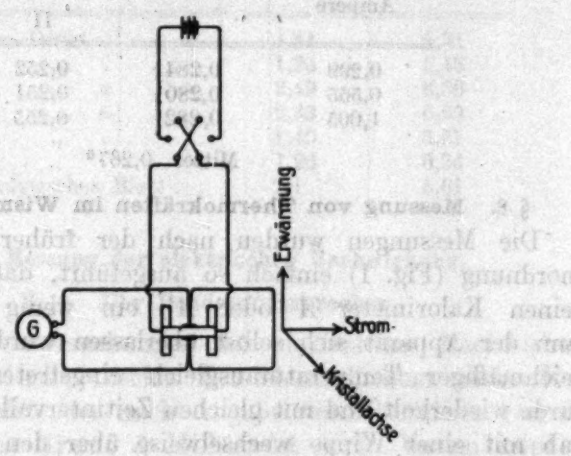


Fig. 2.

Kupfer- und Konstantandrähten bestehende Thermoelement angelötet war (Fig. 2). Das Ganze wurde von einer radial ausgeschnittenen Korkscheibe gehalten. Das Thermoelement war mit dem Galvanometer verbunden und es wurde nachträglich durch Eintauchen der Kupferscheiben in Temperaturbäder direkt geeicht und seine Empfindlichkeit gleich 0,0487° pro Skalenzentimeter gefunden. Wir führten die Messungen mit drei verschiedenen Stromstärken aus. Der Strom wurde immer mehrmals umgekehrt und die Temperaturdifferenzen, die sehr schnell ihren Endwert erreichten, nach beiden Seiten hin abgelesen. Zur Kontrolle wurde auch das Thermoelement gewandt. Die Quotienten von Temperaturdifferenzen und Stromstärken sind für jede Stellung I und II des Thermoelements gut konstant und zeigen, daß der Effekt, wie zu

erwarten war, der Stromstärke gut proportional ist. Die Umlegung des Thermoelements verursacht eine Änderung des beobachteten Effektes von ca. 10 Proz., was ausschließlich der Unvollkommenheit der Anordnung und besonders der Schwierigkeit, das Thermoelement in beiden Stellungen an eben denselben Punkten der Stabseite anzulegen, zuzuschreiben ist.

Tabelle 9.

Transversaler (Thomson-)Peltiereffekt, Stab $G \angle b$.
Abstand der ungleich temperierten Seiten 1,55 mm,
der übrigen 2,64 mm.

Ampere	Grad/Ampere	
	I	II
0,299	0,284	0,252
0,565	0,280	0,251
1,005	0,282	0,255
	Mittel 0,267°	

§ 8. **Messung von Thermokräften im Wismutkristall.**

Die Messungen wurden nach der früher beschriebenen Anordnung (Fig. 1) einfach so ausgeführt, daß das eine der kleinen Kalorimeter A oder A' ein wenig erwärmt und dann der Apparat sich selbst überlassen wurde, bis daß ein gleichmäßiger Temperaturausgleich eingetreten war. Dann wurde wiederholt und mit gleichen Zeitintervallen der Wismutstab mit einer Wippe wechselweise über den Kupferdrähten und den Konstantandrähten mit dem Galvanometer verbunden. Aus den zu gleichen Zeiten, d. h. auf gleichen Temperaturdifferenzen reduzierten Ausschlägen für die Thermokräfte Wismut–Kupfer (ψ_1) und Wismut–Konstantan (ψ_2) kann die Thermokraft Wismut–Kupfer C_1 im Verhältnis zu der von Kupfer–Konstantan C aus

$$\frac{C_1}{C} = \frac{\psi_1}{\psi_1 - \psi_2}$$

berechnet werden.

Wir fanden für die Stäbe:

$$D \perp a \quad \frac{C_1}{C} = 1{,}10,$$

$$E \parallel b \quad \frac{C_1}{C} = 1{,}54,$$

$$G \angle \quad \frac{C_1}{C} = 1{,}88.$$

Die Messung an $E \parallel b$ dürfte wegen der Kürze des (zerbrochenen) Stabes recht unsicher sein.

§ 9. Messungen an elektrolytischem und gepreßtem Wismut.

Wir stellen die Resultate der Messungen von spezifischem Widerstand (Ohm/cm . 10^{-4}) und Peltierwärme gegen Kupfer (g-kal./Coul. . 10^{-3}) an von Hartmann & Braun bezogenen gepreßten Drähten und an einem elektrolytisch hergestellten Blatt in der Tab. 10 zusammen. Der 0,5 mm-Draht zeigte sich als ganz besonders brüchig.

Tabelle 10.

Material	Widerstand	Peltierwärme
2,0 mm Draht	1,31	5,31
1,0 „ „	1,25	5,43
0,5 „ „ *a*	2,49	6,39
0,5 „ „ *b*	2,33	6,69
0,3 „ „	1,40	5,67
0,21 „ „	1,26	6,24
Elektrolytisches Blatt . .	2,4	5,61

III. Messung der elektrischen Nachwirkung.

§ 10. Der Pendelunterbrecher.

Bei den Untersuchungen der elektrischen Nachwirkung wurde ein Helmholtzscher Pendelunterbrecher neuer Konstruktion benutzt, der nach Angabe von Borelius von der Mechanikerfirma Bruno & Hill (jetzt A. B. Vetenskapliga Instrument) in Lund ausgeführt worden ist.

Das allgemeine Aussehen des Instrumentes geht aus der Fig. 3 hervor. Eine Marmorscheibe, die auf kräftigen Stellschrauben ruht, trägt zwei eiserne Böcke, auf denen der Pendel in Kugellagern ruht, eine Säule, die den Pendel in der Ausgangslage hält und einen Rahmen für die Schlitten, an denen die Stromschließer und Unterbrecher montiert sind.

Der Pendel ist eine schwere Messingplatte in der Form eines Zylinderquadranten und ist an einer stählernen Achse befestigt. Die Scheibe trägt auf der unteren Seite einen Zapfen, der von einer federnden Vorrichtung an der Säule gegriffen werden kann, um den Pendel in der Ausgangslage zu halten.

Bei unseren Messungen war dieser Zapfen in der Mitte der Pendelscheibe angebracht. Durch seine Versetzung können dem Pendel verschiedene Ausschläge und Geschwindigkeiten

gegeben werden. An der Scheibe sitzen noch eine Reihe Zapfen aus Messing mit eingefaßten Stahlscheiben, die, wenn der Pendel fällt, die Stromunterbrecher anschlagen.

An dem Rahmen sind sechs Schlitten angebracht, von denen zunächst nur vier vollständig ausgebaut waren. Diese Schlitten werden mittels Schrauben bewegt und ihre Lagen können an Millimeterskalen und an den Trommeln ermittelt werden. Die Ganghöhe der Schrauben betrug 0,5 mm und

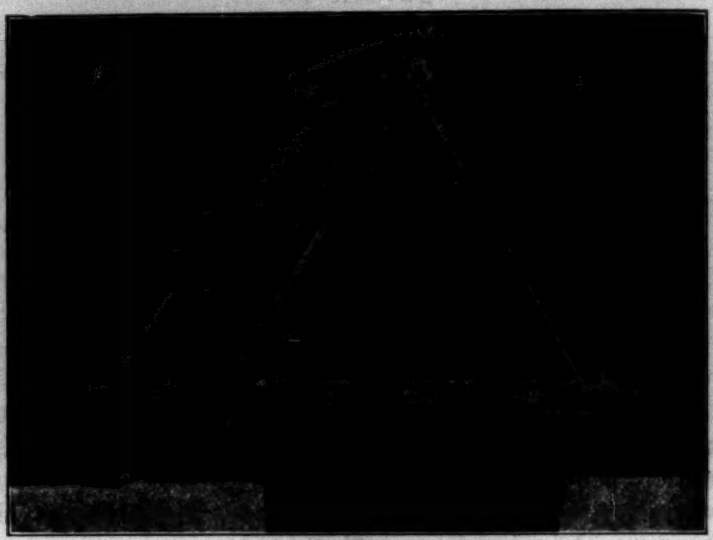


Fig. 3.

die Trommel hatte 100 Teile. Eine Verstellung um einen Trommelteil entsprach somit einer Verschiebung von $^1/_{200}$ mm und machte, daß der Stromunterbrecher $1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek. früher oder später getroffen wurde. Diese Zahl ist durch Bestimmung der Schwingungsdauer und Aufmessung der Pendellänge bestimmt.

Alle vier Schlitten sind mit ähnlichen Stromunterbrechern versehen; zwei von ihnen, die mit I und II bezeichneten, auch gleichzeitig mit Stromschließern. Fig. 4A zeigt die Anordnung am Schlitten I. Die Apparate sind auf einer Ebonitscheibe befestigt. Die kleine stählerne Scheibe des Pendelzapfens schlägt, wenn der Pendel fällt, gegen den Achatkopf eines kleinen eisernen Hammers. Dieser Hammer sitzt auf

einer Stahlachse zwischen konischen Fassungen und ist dazu durch eine Spiralfeder in gut leitender Verbindung mit zwei Klemmschrauben bei *b*. Der Hammer stützt mit einem eingefaßten Platinstück gegen die ebenfalls mit Platin versehene Spitze eines kleinen Elektromagneten und verbindet somit leitend die Schrauben bei *b* und *c*, wobei die magnetische Anziehung für genügenden Druck in der Kontaktstelle sorgt. Die Zuleitung zu der Elektromagnetenwickelung geschieht durch zwei Klemmschrauben bei *d*. Der innere, die Platinspitze tragende Teil des Eisenkernes ist verstellbar. Um einen

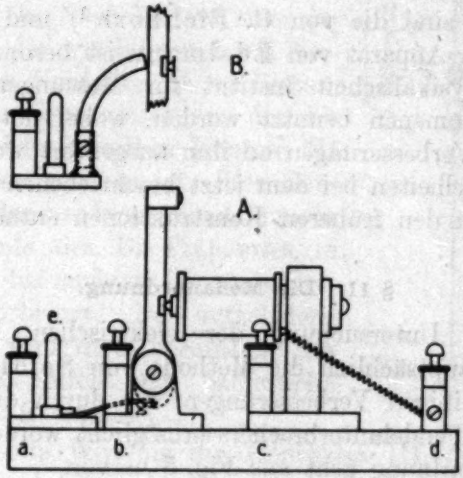


Fig. 4.

Zurückprall des Hammers zu vermeiden, wird er bei *e* von zwei Federn ergriffen. Die so beschriebene Unterbrechervorrichtung ist allen Schlitten gemeinsam.

Auf der Achse des Hammers I sitzt auch eine mit Glimmer isolierte Metallscheibe festgeklemmt, die unten einen horizontal gerichteten Stahlstift trägt. An diesem kann eine Stahlfeder angelegt werden, deren anderes Ende an derselben Messingscheibe wie die Klemmschraube *a* befestigt ist. Beim Fallen des Hammers wird die Stahlfeder losgemacht. Ein Platinstück an ihrer unteren Seite macht dabei Kontakt mit dem ebenfalls platinierten Ende einer Schraube und bringt so leitende Verbindung zwischen *a* und *b*. Dieser Stromschließer ist für stärkere konstante Ströme bestimmt.

Fig. 4B zeigt eine andere am Schlitten III zwecks Anlegung eines Kondensators ausgeführte Schließvorrichtung. Der Hammer berührt bei seinem Falle eine gebogene Feder, die mittels Schrauben unten an der Fußscheibe und seitlich an einem kleinen Säulchen in gewünschte Stellung gebracht werden kann.

Die Schließer waren, wie gesagt, bei unseren Messungen auf den Schlitten I und III placiert. Sie sind aber so ausgeführt, daß sie leicht irgendeinem der Schlitten angesetzt werden können.

Die meist benutzten früheren Konstruktionen des Pendelunterbrechers sind die von G. Eichhorn[1]) und Th. Edelmann[2]). Der Apparat von Edelmann ist besonders in dem Leipziger Physikalischen Institut für Messungen an Nachwirkungsphänomenen benutzt worden, wobei nötige Abänderungen und Verbesserungen an ihm ausgeführt worden sind.[3]) Mehrere Einzelheiten bei dem jetzt beschriebenen Instrumente sind natürlich den früheren Konstruktionen entnommen.

§ 11. Die Meßanordnung.

Bei der Untersuchung der elektrischen Nachwirkung haben wir hauptsächlich die Methode von Seidler[4]) befolgt, jedoch mit einigen Verbesserungen, die durch die Konstruktion unseres Pendelunterbrechers ermöglicht worden sind. Die benutzte Anordnung geht aus Fig. 5 hervor.

Die Kontakte des Pendelunterbrechers sind mit den Ziffern I, II, III und IV bezeichnet. Das eingesetzte Wismutpräparat ist mit Bi bezeichnet. Der Kondensator K ist ein Glimmerkondensator (Nr. 843534) von Siemens & Halske, dessen Kapazität durch Stöpsel von 0,1—1,0 Mikrofarad variiert werden. Außerdem benutzten wir noch eine andere Kapazität von 1,84 Mikrofarad. Um die in dem Kondensator vorhandene Spannung zu messen, wurde ein ballistisches Drehspulengalvanometer G von Hartmann & Braun verwendet.

---

1) G. Eichhorn, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. **1.** p. 369. 1908.
2) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. **3.** p. 274. 1900.
3) R. Seidler, Diss. Leipzig 1909, auch Ann. d. Phys. **32.** p. 337. 1910.
4) R. Seidler, l. c.

Als Stromquelle diente eine Akkumulatorenbatterie *A* von 3—7 Nifezellen.

Der Vorgang bei einer Messung ist wie folgt. Der Pendel schlägt die Kontakte I—IV, in Ordnung von rechts nach links, an. I schließt den Strom von der Akkumulatorenbatterie durch das Wismutpräparat. Nachdem dieser Strom konstant geworden ist, wird er bei II unterbrochen. Das Potentialgefälle im Bi verschwindet dann nicht sogleich, sondern es bleibt die zu messende Nachwirkung zurück. Nach Verlauf einer gewissen Zeit, die wir immer durch Verschiebung des Kontaktes II variierten, legt III den Kondensator an, der bis jetzt durch eben denselben Kontakt III kurzgeschlossen gewesen ist. Der Kondensator ist dann so lange mit dem nicht geerdeten Ende des Bi-Präparates in Verbindung, bis zuletzt IV seine Isolierung hervorbringt. Der aufgeladene Kondensator wird dann vermittelst des Kontaktes *S* durch das ballistische Galvanometer *G* entladen.

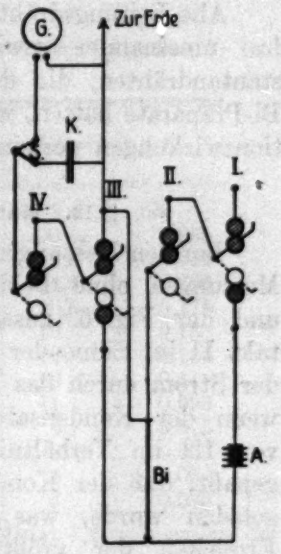


Fig. 5.

Die doppelte Wirkung des Kontaktes III, die es ermöglicht, den Kondensator bis zum Augenblick seiner Anlegung zum Bi-Präparat kurzgeschlossen oder zur Erde abgeleitet zu halten ist, soviel uns bekannt ist, für unsere Anordnung neu und hat sich als sehr zweckmäßig erwiesen. Wir brauchten dadurch nicht, wie es z. B. Seidler nötig hatte, den Apparat vor jeder Messung mit heißer Luft zu trocknen, um störende Überleitungen über den Isolatoren zu vermeiden.

Der Kontakt I war, wie schon hervorgehoben ist, gegenüber II so weit — ca. 2 cm — zurückgeschoben, daß der Strom gut konstant werden konnte. Die Zeit darf natürlich nicht zu lang sein, weil der Strom oft stark genug war, um das Bi-Präparat zu zerschmelzen.

Die Zeit zwischen dem Schließen des Kontaktes III und dem Unterbrechen von IV muß groß genug sein, um eine nahezu vollständige Aufladung des Kondensators hervor-

zubringen. Diese Zeit hängt außer von der Kapazität des Kondensators hauptsächlich vom Widerstande im Bi-Präparat ab. Die nötige Zeit wurde durch besondere Vorversuche ermittelt. Sie setzt eine Grenze dafür, bis wie nahe am Stromunterbrecher die Nachwirkung verfolgt werden kann.

Alle Leitungsdrähte waren so weit wie möglich induktionsfrei umeinander gewickelt. Durch Vorversuche mit Konstantandrähten, die dieselbe Form und Widerstand wie die Bi-Präparate hatten, wurde geprüft, ob keine störenden Induktionswirkungen vorhanden waren.

§ 12. Nachwirkung ohne Magnetfeld.

Bei den Messungen der Nachwirkung, deren Resultate (für Messungen ohne Feld) in den folgenden Tabellen (4—16) und der Fig. 6. zusammengestellt sind, wurde zuerst Kontakt II im Sinne der Fig. 5 so weit nach unten geführt, daß der Strom durch das Bi-Präparat noch nicht aufgehört hatte, wenn der Kondensator angelegt wurde. Durch Verstellung von III im Verhältnis zu IV wurde die Aufladezeit so abgepaßt, daß der Kondensator eben genügend vollständig aufgeladen wurde, was am ballistischen Galvanometer durch Erreichen der größtmöglichen Ausschläge geprüft wurde. Hierzu genügten bei den Kristallpräparaten etwa zehn Trommelteile. Bei den Drähten mit ihren größeren Widerständen war eine beträchtlich weitere Verstellung nötig. Die Kapazität des Kondensators war dabei ebenso groß wie bei den darauf folgenden Messungen, die Stromstärke dagegen klein, um die Skala nicht zu überschreiten. Die Kapazität wurde dann kleiner und die Stromstärke größer gemacht, und der Ausschlag, der bei der jetzigen Stellung der Kontakte der Potentialdifferenz zwischen den Enden des stromdurchflossenen Präparates entspricht, beobachtet. Zunächst wurde die Stellung von II aufgesucht, die ein Stromausschalten gleichzeitig mit dem Ausschalten des Kondensators durch Kontakt IV bewirkt. Die Angaben über die Lage der Trommel II in den ersten Kolumnen der Tabellen wird immer von diesem Punkte aus gerechnet. Die Kapazität wurde dann wieder vergrößert und Messungen mit geeigneten Abständen vorgenommen, wenn Kontakt II zuerst aufwärts- und dann zurückgeschoben wurde. Die Galvanometerausschläge sind in den Tabellen in Zehntel-

millimeter angegeben. Aus ihren Mittelwerten und den Werten der Kapazitäten ist dann die prozentische Nachwirkung berechnet.

Außerhalb des Feldes ist die Nachwirkung immer positiv, d. h. von demselben Zeichen wie die ursprüngliche Potentialdifferenz.

Tabelle 11.

Nachwirkung. Bi-Kristalle $\perp$ zur Achse ($A \perp a$).
Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometer ausschlag		Mittel	%
− 70	0,1	422	414	418	100
+30	2,84	30	31	30,5	0,255
80	„	24	27	25,5	0,215
130	„	24	25	24,5	0,205
230	„	20	21	20,5	0,175
430	„	19	19	19	0,16
630	„	16	16	16	0,135
830	„	13	13	13	0,11
1030	„	11	11	11	0,095
1430	„	9	9	9	0,075
1830	„	8	8	8	0,065
2430	„	6	6	6	0,05
3030	„	4	4	4	0,035

Länge des Präparates 8 × 9 mm. Breiten im Mittel 1,2 mm parallel der Achse und 0,9 mm.

Tabelle 12.

Nachwirkung. Bi-Kristalle $\parallel$ zur Achse ($B \parallel a$).
Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometer-ausschlag		Mittel	%
− 70	0,1	259	259	259	100
+30	2,84	25	25	25	0,34
80	„	24	23	23,5	0,32
130	„	23	21	22	0,30
230	„	20	20	20	0,27
430	„	18	18	18	0,245
630	„	17	17	17	0,23
830	„	15	15	15	0,205
1030	„	14	14	14	0,19
1430	„	12	11	11,5	0,155
1830	„	10	10	10	0,135
2430	„	8	7	7,5	0,10
3030	„	8	6	7	0,095

Länge des Präparates 8 × 8,5 mm. Breiten im Mittel 1,5 und 1,3 mm.

Tabelle 13.

Nachwirkung. Bi-Kristalle 45° ($C \angle a$). Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometerausschlag		Mittel	%
− 70	0,1	247	244	245,5	100
+ 30	2,84	42	39	40,5	0,58
80	,,	41	35	38	0,545
130	,,	37	35	36	0,515
230	,,	34	33	33,5	0,48
430	,,	27	31	29	0,415
630	,,	26	26	26	0,375
840	,,	24	26	25	0,36
1230	,,	19	22	20,5	0,295
1430	,,	18	19	18,5	0,265
1830	,,	18	20	19	0,27
2230	,,	17	16	16,5	0,235
3030	,,	12	13	12,5	0,18

Länge des Präparates 8 × 12 mm. Breiten im Mittel 1,8 mm im Meridianschnitt und 1,7 mm.

Tabelle 14.

Nachwirkung. 0,75 mm Durchm. H. und Br. Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometerausschlag		Mittel	%
− 70	0,1	633,5	626,5	630,0	100
+ 30	1,0	16	16	16	0,255
80	,,	14	14	14	0,22
130	,,	13	12	12,5	0,20
230	,,	10	9	9,5	0,15
430	,,	9	8	8,5	0,135
630	,,	8	6	7	0,11
1030	,,	7	5	6	0,095
1430	,,	5	4	4,5	0,075
2030	,,	3	3	3	0,05
3030	,,	2	2	2	0,03

Tabelle 15.

Nachwirkung. 0,5 mm Durchm. H. und Br. Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometerausschlag		Mittel	%
− 70	0,1	404	392	398	100
+ 30	1,0	16	16	16	0,4
330	,,	6	7	6,5	0,165
630	,,	4	3	3,5	0,09
930	,,	2	2	2	0,05
1230	,,	1	1	1	0,025

Tabelle 16.

Nachwirkung. 0,32 mm Durchm. H. und Br.
Außerhalb des Feldes.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Galvanometer-ausschlag		Mittel	%
− 20	0,1	560	568	564	100
+ 80	1,0	9	9	9	0,16
180	,,	6	6	6	0,105
280	,,	3	3	3	0,055
380	,,	2	2	2	0,035
480	,,	1	1	1	0,02

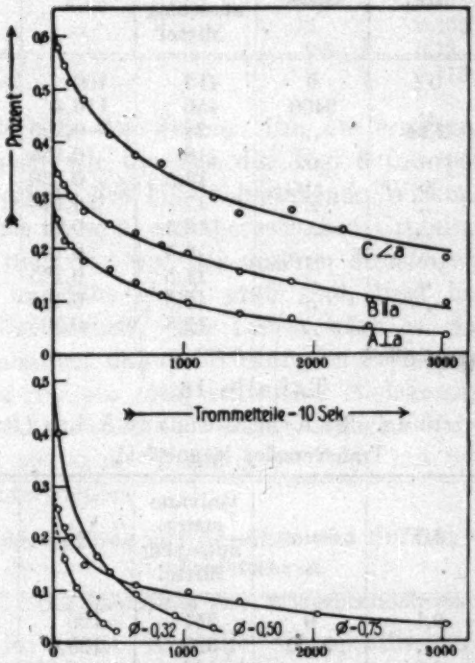


Fig. 6.
Elektrische Nachwirkung ohne Feld.

In dem elektrolytischen Präparate war keine Spur einer Nachwirkung zu sehen. Wenigstens betrug sie $5 \cdot 10^{-5}$ Sek. nach dem Ausschalten des Stromes nicht 0,01 Proz.

§ 13. Nachwirkung in einem Magnetfelde.

Ein Magnetfeld ändert die Nachwirkung immer in der negativen Richtung. Die Observationen im Magnetfelde sind in derselben Weise ausgeführt, wie in den vorigen Paragraphen beschrieben ist. Die Nachwirkung ist in Prozent der Potentialdifferenz außerhalb des Feldes ausgerechnet. Die zunächst beobachtete Nachwirkung ist ein Zusammenwirken der Effekte

Tabelle 17.

Nachwirkung. Bi-Kristalle $\perp$ zur Achse ($A \perp a$).
Transversales Magnetfeld parallel der Kristallachse.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Gauss	Galvanometerausschlag Mittel	%	% Korr.
− 20	0,1	0	413	+100	+100
− 20	,,	9400	456	110,4	110,4
+80	2,84	,,	24	−0,205	−0,43
280	,,	,,	18	0,155	0,33
480	,,	,,	17,5	0,150	0,295
680	,,	,,	17	0,145	0,265
1080	,,	,,	16,5	0,14	0,23
1480	,,	,,	16,5	0,14	0,21
1880	,,	,,	14,5	0,125	0,185
2480	,,	,,	12,5	0,105	0,15
3080	,,	,,	12,5	0,105	0,14

Tabelle 18.

Nachwirkung. Bi-Kristalle $\parallel$ zur Achse ($B \parallel a$).
Transversales Magnetfeld.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Gauss	Galvanometerausschlag Mittel	%	% Korr.
− 15	0,1	0	257	+100	+100
− 15	,,	9400	329	128,0	128,0
+85	2,84	,,	66	−0,905	−1,225
285	,,	,,	49	0,67	0,935
485	,,	,,	43	0,585	0,82
685	,,	,,	41	0,56	0,775
885	,,	,,	38,5	0,53	0,725
1085	,,	,,	35,5	0,485	0,665
1485	,,	,,	33	0,45	0,605
1885	,,	,,	29,5	0,405	0,535
2485	,,	,,	23	0,315	0,42
3085	,,	,,	19	0,26	0,34

Tabelle 19.

Nachwirkung. Bi-Kristalle 45° ($C \angle a$).
Transversales Magnetfeld senkrecht der Kristallachse.

$1{,}9 \cdot 10^{-6}$ Sek.	MF.	Gauss	Galvanometerausschlag Mittel	%	% Korr.
− 10	0,1	0	277	+100	+100
− 10	„	9400	331,5	117,0	117,0
+90	2,84	„	8,5	+0,11	− 0,43
290	„	„	18	0,23	0,23
490	„	„	20	0,255	0,15
690	„	„	17	0,215	0,15
890	„	„	16	0,205	0,135
1090	„	„	16	0,205	0,11
1490	„	„	13,5	0,17	0,11
1890	„	„	12	0,155	0,105
2490	„	„	9,5	0,12	0,095
3090	„	„	9	0,115	0,075

in und außerhalb des Feldes. Um die erstgenannten zu berechnen, haben wir die aus der Fig. 6 interpolierten Werte für die außerhalb des Feldes bestehende Wirkung einfach abgezogen. Dies ist wohl aus theoretischen Gründen kaum streng berechtigt, und da, wie bei unseren Messungen, die beiden Wirkungen ungefähr gleich groß sind, liegt hierin eine bedeutende Unsicherheit. Am besten wäre es, das Magnetfeld so stark zu nehmen, daß die Wirkung im Felde ganz vorherrscht. Da uns aber nur ein recht schwacher Elektromagnet zur Verfügung stand, war das aber nicht möglich. Der eine von uns beabsichtigt später die Wirkung im Felde mit besseren Mitteln näher zu untersuchen.

IV. Zusammenstellung der Resultate und Prüfung theoretischer Beziehungen.

§ 14. Die Resultate der Widerstandsmessungen.

Wenn in einem Kristalle die spezifischen Widerstände längs der Hauptwiderstandsachsen x, y, z durch R_x, R_y, R_z bezeichnet werden, so läßt sich nach der allgemeinen Theorie[1]) der Widerstand eines beliebig orientierten Stabes, dessen Richtungskosinusse in bezug auf die genannten Achsen a, b und c sind, berechnen nach der Formel

$$R = R_x a^2 + R_y b^2 + R_z c^2 . \tag{4}$$

1) W. Voigt, Kristallphysik. p. 337. 1910.

Dieses sehr allgemeingültige Gesetz wollen wir im folgenden der Einfachheit halber als das $\cos^2$-Gesetz bezeichnen.

Für den Wismutkristall, der eine dreizählige Hauptachse besitzt, die wir als z-Achse wählen, vereinfacht sich die Formel zu

$$R = R_x \sin^2 \varphi + R_z \cos^2 \varphi , \tag{4'}$$

wenn φ der Winkel ist, der die Stabrichtung mit der z-Hauptachse einschließt. Die Gültigkeit dieses Gesetzes ist früher von Bäckström[1]) am Eisenglanz und von van Everdingen[2]) am Wismut bestätigt worden. Wie zu erwarten, sind auch unsere Messungen damit übereinstimmend. Wir finden für die Widerstände in Ohm . cm für $\varphi = 0{,}45^0$ und 90^0 als Mittel der Messungen an verschiedenen Stäben die Werte

1,24, 1,41 und 1,92,

während wir, wenn diese drei Werte dem gleichen Gewichte angelegt werden, und da nach dem $\cos^2$-Gesetz der Widerstand für $\varphi = 45^0$ das arithmetische Mittel der übrigen sein soll, berechnen

1,18, 1,52 und 1,86.

Die Messungen an dem in der Achsenrichtung gepreßten Stabe $F \parallel$ zeigt bei Vergleich mit dem nicht gepreßten $E \parallel a$ nochmals die von uns früher[3]) gefundene Tatsache, daß der Widerstand in der Achsenrichtung durch einen einmal ausgeübten Druck stark erniedrigt werden kann. In diesem Falle ändert sich der Widerstand von 1,92 zu 1,51.

In einem Magnetfelde bekommt das Wismut, wie bekannt, eine Zunahme seines Widerstandes, die dem Quadrat der Feldstärke proportional ist. Der einfachste Ansatz für diese Widerstandsvergrößerung in einem Kristalle ist demgemäß, wenn Δ_x, Δ_y und Δ_z die Widerstandszunahmen in den Richtungen der Hauptwiderstandsachsen bezeichnen und die Richtung des Magnetfeldes H durch die Richtungskosinusse α, β, γ bestimmt wird:

---

1) H. Bäckström, Öfvers. K. Akad. Förh. 1888. p. 553.
2) J. van Everdingen, l. c.
3) G. Borelius u. A. E. Lindh, l. c.

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta_x = n_{11}(aH)^2 + n_{12}(\beta H)^2 + n_{13}(\gamma H)^2, \\ \Delta_y = n_{21}(aH)^2 + n_{22}(\beta H)^2 + n_{23}(\gamma H)^2, \\ \Delta_z = n_{31}(aH)^2 + n_{32}(\beta H)^2 + n_{33}(\gamma H)^2. \end{cases}$$

Die Widerstandszunahme Δ eines beliebig orientierten Stabes mit den Kosinussen a, b und c würde sich dann berechnen aus

$$(6)\qquad \Delta = \Delta_x a^2 + \Delta_y b^2 + \Delta_z c^2.$$

Von vornherein richtiger wäre es zwar, in dem Ansatze (5) noch Termen der Form

$$(7)\qquad n_{14}\beta\gamma H^2,\ n_{15}\alpha\nu H^2 \quad \text{usw.}$$

mitzunehmen, wie es Voigt[1]) in seiner „Kristallphysik" tut. In der Tat schließen sich jedoch die Messungen des obigen einfachen Ansatzes so gut an, daß es sich kaum lohnen würde, wenigstens mit dem gegenwärtig vorliegenden Material als Grundlage, nach weiteren Konstanten zu suchen.

Für den Fall des Wismutkristalls vereinfacht sich der Ansatz (5) beträchtlich; wenn wir, wie früher, die Hauptachse zur z-Achse nehmen, ergibt die Gleichwertigkeit der x- und y-Achsen sogleich

$$(8)\qquad n_{21} = n_{12},\ n_{22} = n_{11},\ n_{23} = n_{13} \text{ und } n_{32} = n_{31}.$$

Die neun Konstanten n_{ik} in (5) reduzieren sich somit auf fünf.

Unsere Meßstäbe sind, wie gesagt, alle miteinander und mit der Kristallachse parallel ausgesägten Scheiben entnommen, und das Feld ist entweder senkrecht (in den Tabellen mit n bezeichnet) oder parallel (p, s, l oder t) zu diesem Meridianschnitte angebracht. Wählen wir den die Stabrichtung enthaltenden Meridianschnitt zur xz-Ebene, die Kristallachse zur z-Achse, so verschwindet der Richtungskosinus b und wir erhalten gemäß (5), (6) und (8) für die Widerstandszunahme einen in der xz-Meridianebene beliebig orientierten Stab bei beliebiger Orientierung des Magnetfeldes.

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta = H^2[a^2(n_{11}a^2 + n_{12}\beta^2 + n_{13}\gamma^2) + c^2(n_{31}a^2 + \\ \qquad + n_{31}\beta^2 + n_{33}\gamma^2)]. \end{cases}$$

---

1) W. Voigt, Kristallphysik. p. 363.

Aus der Tab. 2 erhalten wir, wenn wir uns der Bedeutung der dort der Kürze halber benutzten Symbole erinnern, zunächst für die Stäbe senkrecht und parallel zur Achse

(10)
$$\begin{cases} \text{Stab} & \text{Feld} & \\ \perp : a = 1 & s\,l\colon a = 1 & n_{11} H^2 = 0{,}054 \\ \perp : a = 1 & n\colon \beta = 1 & n_{12} H^2 = 79 \\ \perp : a = 1 & p\,t\colon \gamma = 1 & n_{13} H^2 = 25 \\ \parallel : c = 1 & n\,s\,t\colon \beta = 1 & n_{31} H^2 = 114 \\ \parallel : c = 1 & p\,l\colon \gamma = 1 & n_{33} H^2 = 49 \end{cases}$$

Die Messungen an den gegen die Kristallachse um 45° geneigten Stäben können im Vergleich mit den obigen Zahlen zur Prüfung des Ansatzes gelten. Hier ist

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und wir bekommen für die Feldrichtungen

(11)
$$\begin{cases} n\colon & \beta = 1 & \frac{1}{2}(n_{12} + n_{31}) H^2 = 0{,}092 \\ p\colon & \gamma = 1 & \frac{1}{2}(n_{13} + n_{33}) H^2 = 23 \\ s\colon & \alpha = 1 & \frac{1}{2}(n_{11} + n_{31}) H^2 = 93 \\ l\colon & \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4}(n_{11} + n_{13} + n_{31} + n_{33}) H^2 = 61 \\ t\colon & -\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4}(n_{11} + n_{13} + n_{31} + n_{33}) H^2 = 64 \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen sich nun auch aus den in (10) erhaltenen Zahlen berechnen, und wir haben sie in der folgenden Tabelle unter „Berechnet I“ mit den gefundenen zusammengestellt.

	Gefunden	Berechnet I	Berechnet II
n:	0,092	0,097	0,098
p:	23	37	32
s:	93	84	86
l:	61	67	59
t:	64	67	59

Mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten bei der Messung dürfte die Übereinstimmung als gut betrachtet werden, vielleicht mit Ausnahme der Feldrichtung p parallel der Kristallachse. Diese

Abweichung dürfte jedoch auf Zufälligkeiten beruhen, jedenfalls läßt sie sich gerade in diesem Falle nicht durch Heranziehen von Termen der Form (7) beseitigen.

Vielleicht besser nachgewiesen wird die Übereinstimmung mit der Theorie, wenn wir aus den zehn Beobachtungen in (10) und (11) die fünf Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Wir haben dann, wenn wir die in (10) direkt gefundenen Werte den wiederberechneten gegenüberstellen:

	Gefunden	Berechnet
$n_{11} H^2$:	0,054	0,058
$n_{12} H^2$:	79	82
$n_{13} H^2$:	25	20
$n_{31} H^2$:	114	114
$n_{33} H^2$:	49	44

Die für die Effekte unter 45° zur Achse sich ergebenden Werte sind oben unter „Berechnet II" angeführt.

Zuletzt stellen wir noch unsere Werte mit denen zusammen, die aus den Messungen von van Everdingen[1]) berechnet werden können. In beiden Fällen werden die Änderungen des spezifischen Widerstandes in der praktischen Einheit Ohm . cm . 10^{-4} für eine Magnetfeldstärke von 1000 Gauss angegeben. Wir finden

	Borelius u. Lindh	van Everdingen
$n_{11} . 1000^2$	0,0110	0,0044
$n_{12} \cdot$ „	155	78
$n_{13} \cdot$ „	38	28
$n_{31} \cdot$ „	216	214
$n_{33} \cdot$ „	83	41

Aus den sehr großen Werten des spezifischen Widerstandes, die van Everdingen angibt, oder 3,48 parallel, 2,07 senkrecht zur Achse, können wir schließen, daß sein Wismutmaterial recht unrein gewesen ist. Wir sehen jetzt, daß bei unserem reineren Materiale die Vergrößerung im Felde des an sich kleineren Widerstandes viel größer ist. Nur die Größe n_{31} scheint bei unseren Resultaten im Vergleich mit van Everdingens nicht im selben Maßstabe vergrößert zu sein. Diese

1) J. van Everdingen, l. c.

ist aber von dem einst bei der Abkühlung des Schmelzstückes in der Achsenrichtung ausgeübten Drucke sehr abhängig, wie wir an dem künstlich gepreßten Stab $F \parallel$ in Tab. 2 für das Feld $n\,s\,t$ im Vergleich mit dem nicht gepreßten $E \parallel a$ sehen können. Unser Material scheint also in der Achsenrichtung mehr zusammengedrückt zu sein als das von van Everdingen. Zu diesem Resultate kommt man auch bei einer Diskussion der spezifischen Widerstände selbst.

§ 15. Die Resultate der Messungen von Peltierwärme und Thermokraft.

Wir wollen unsere Meßresultate im Vergleich mit der W. Thomsonschen[1]) Theorie der Thermoelektrizität der Kristalle diskutieren. Wir denken uns in einem einachsigen Kristall wie Wismut einen elektrischen Strom von der Dichte i parallel einer $x\,z$-Meridianebene, der mit der z-Hauptachse, die gleichfalls die Symmetrieachse der Thermoelektrizität ist, den Winkel φ einschließt. Die Komponenten

$$i_x = i \sin \varphi \quad \text{und} \quad i_z = i \cos \varphi$$

dieses Stromes erzeugen dann die Komponenten

$$P_x = i \sin \varphi \quad \text{und} \quad P_z = i \cos \varphi$$

eines Peltierwärmestromes, wo P_x und P_z die Peltierkoeffizienten senkrecht und parallel der Kristallachse sind. Aus diesen Komponenten setzen sich zusammen teils ein Longitudinaleffekt (in der Stromrichtung) von der Wärmestromdichte

$$P_l\, i = P_x\, i \sin^2 \varphi + P_z\, i \cos^2 \varphi\,,$$

woraus

$$P_l = P_x \sin^2 \varphi + P_z \cos^2 \varphi\,, \tag{12}$$

teils ein Transversaleffekt

$$P_t = (P_z - P_x) \sin \varphi \,.\, \cos \varphi\,. \tag{13}$$

Wir leiten für diesen Transversaleffekt auch einen anderen Ausdruck her, der seine Berechnung aus den in § 7 mitgeteilten Beobachtungen ermöglicht. In einem parallelepipedischen Stabe, dessen Breite in der $x\,z$-Ebene b, senk-

1) W. Thomson, l. c.

recht dagegen c ist, erzeugt den Transversaleffekt eine Temperaturdifferenz τ zwischen den Seiten im Abstande b, bis daß, wenn die äußere Wärmeleitung vernachlässigt werden kann, der Peltierwärmestrom durch einen Wärmeleitungsstrom eben kompensiert wird, d. h. bis daß

$$w \cdot \frac{\tau}{b} = P_t \cdot \frac{J}{a\,b}, \tag{14}$$

wo w die Wärmeleitfähigkeit der bezüglichen Richtung, J die Stromstärke ist. Nach unseren Messungen haben wir $a = 0{,}264$ cm und $\tau = 0{,}267^0$ für 1 Amp. Der Winkel φ war 45^0, und die Wärmeleitung w soll der Mittelwert für die Werte parallel und senkrecht zur Achse sein. Wir sind daher berechtigt, als approximativen Wert den von Jaeger und Diesselhorst[1]) u. a. an gegossenen Stäben erhaltenen, $w = 0{,}019$ g-kal./cm. grad. sec. zu benutzen, und bekommen so aus unseren Messungen

$$P_t = 1{,}44 \text{ g-kal./Coul.}$$

Für den longitudinalen Peltiereffekt (und dasselbe gilt für die Thermokraft) soll nach (12) ebenso wie für die longitudinalen Effekte der Wärme- und Elektrizitätsleitung das $\cos^2$-Gesetz gelten, und in der Tat haben Bäckström[2]) an Eisenglanz und F. L. Perrot[3]) an Wismut dieses Gesetz für die Thermokraft erfüllt gefunden.

Es ist dann recht überraschend, daß unsere Messungen dieser Größen, die meist an denselben Stäben und nahezu gleichen Zeiten wie die Widerstandsmessungen ausgeführt sind (vgl. Tab. 1), in scharfer Nichtübereinstimmung mit dem $\cos^2$-Gesetz zu stehen scheinen, während jedoch dieses Gesetz für den Widerstand leidlich gut erfüllt war. Geben wir Peltierwärme und Thermokraft im Verhältnis zu denselben Größen für das Kupfer-Konstantanpaar an, so haben wir nach unseren Messungen für Richtungen, die mit der Kristallachse 90^0, 0^0 und 45^0 einschließen, als Mittelwert gefunden und nach dem $\cos^2$-Gesetz berechnet:

1) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Wiss. Abh. d. Physik.-Techn. Reichsanstalt **3**. p. 269. 1900.

2) H. Bäckström, l. c.

3) F. L. Perrot, Arch. d. Science **6**. p. 105. 1898; **7**. p. 149. 1899.

	⊥	∥	∠ gefunden	∠ berechnet
Peltierwärme	1,12	1,68	1,86	1,40
Thermokraft	1,10	[1,54]	1,88	1,32

Statt arithmetisches Mittel der beiden Effekte senkrecht und parallel zur Achse zu sein, liegt der Effekt bei 45° Neigung weit außerhalb demjenigen parallel zur Achse. Zwischen Peltierwärme und Thermokraft kann dabei eine gute Proportionalität festgestellt werden.

Die scheinbare Nichtübereinstimmung mit der Theorie läßt sich aber leicht beseitigen durch die Annahme, daß die thermoelektrischen Hauptachsen in unserem Schmelzstücke nicht mit den kristallographischen zusammenfallen. In der Tat haben Überschlagsberechnungen gezeigt, daß wir den experimentellen Befunden gerecht werden können durch die Annahme einer thermoelektrischen Hauptachse (ζ-Achse), die mit der kristallographischen z-Hauptachse einen Winkel von etwa 25° einschließt und die in der Meridianebene unserer Stäbe, der $x\,z$-Ebene, liegt. Geben wir den Peltiere fekten längs der thermoelektrischen Hauptachsen ζ und ξ unserer Meridianebene die Größen

$$P_\zeta = 5{,}8, \quad P_\xi = 2{,}5 \text{ g-kal./Coul.},$$

so erhalten wir dann nach den Gleichungen (12) und (13) eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den Beobachtungsresultaten; wir haben:

	Stab	Berechnet	Gefunden
Longitudinaleffekte	⊥	3,4	3,4
	∥	5,2	5,0
	∠	5,5	5,6
Transversaleffekt	∠	1,1	1,4

Das Verhältnis der Peltierwärme gegen Kupfer paralle und senkrecht der Achse wird dann beinahe 2,4, während F. L. Perrot[1]) für die Thermokraft früher den Wert 2,0 gefunden hat. Perrot hat an seinen Stäben auch eine Veränderung der thermoelektrischen Größen mit der Zeit beobachtet. Zu einer Zeit, wo diese Veränderungen sehr klein

1) F. L. Perrot, l. c.

waren, hat er die Thomsonsche Theorie ohne Komplikationen erfüllt gefunden. Die thermoelektrische Hauptachse fiel also dabei mit der kristallographischen zusammen.

Die Ursachen zu dem besprochenen eigentümlichen Verhalten des Wismuts in bezug auf die thermoelektrischen Eigenschaften sind aller Wahrscheinlichkeit nach in Drucken und Spannungen zu suchen, die beim Erstarren und Abkühlen des Schmelzstückes eintreten. Wir haben, zwar nur für einen speziellen Fall, an dem Stabe $F \parallel$ den Einfluß eines parallel der Achse ausgeübten Druckes direkt nachgewiesen. Auf solche Spannungen sind unserer Meinung nach auch die große Verschiedenheit der Dichte verschiedener Wismutproben und die Änderung der Dichte bei Erwärmung wahrscheinlichst zurückzuführen, die Cohen und Moesveld[1]) sowie E. Jänecke[2]) zur Annahme eines molekularen Umwandlungspunktes des Wismuts geführt haben. Die Hypothese wird sich auch im nächsten Paragraphen zur Erklärung der Nachwirkungsphänomene als sehr brauchbar erweisen. Bemerkenswert ist, wie schon hervorgehoben, daß, während die Orientierung der thermoelektrischen Hauptachsen so stark geändert werden kann, die Widerstandsachsen gar nicht oder wenigstens viel weniger beeinflußt werden. Dieser Umstand kann auch die ausgebliebene Parallelität zwischen Peltierwärme und Widerstand an den gepreßten Drähten (Tab. 10) erklären.

Für die Änderung der Peltierwärme der Wismutkristallstäbe im Magnetfelde können wir die Regel bestätigen, daß sie alle im Felde mehr negativ gegen Kupfer werden. Weiter können wir die Proportionalität der Änderung mit dem Quadrate der Feldstärke konstatieren, teils durch die in Tab. 4 mitgeteilte Messung, teils auch durch andere, nicht angeführte Messungen. Wahrscheinlich ist, daß diese Änderungen in ihrer Abhängigkeit von Strom und Feldrichtung den für den Widerstand gemachten Ansätzen (5) und (6) genügen werden. Es mag nach dem Gesagten jedoch nicht verwundern, daß wir unsere Messungen nicht zu einem Belege dieser Ansätze anwenden können. Wir begnügen uns daher, die gemessenen Werte zusammen zu stellen.

1) E. Cohen u. A. L. Th. Moesveld, Zeitschr. f. physik. Chem. 85. p. 419. 1913.

2) E. Jänecke, Zeitschr. f. physik. Chem. 90. p. 313. 1915.

Tabelle 20.

Änderung des Peltiereffektes in einem Felde von 2300 Gauss in der Einheit 10^{-3} $\frac{\text{g-kal.}}{\text{Coul.}}$

Feldrichtung	Stromrichtung ⊥	Stromrichtung ∥	Stromrichtung ∠
n	0,135	0,333	0,612
p	102	54	30
s	63	333	306
l	63	54	180
t	102	333	237

§ 16. Die elektrische Nachwirkung.

Die bisherigen Untersuchungen[1]) über die elektrische Nachwirkung und den mit ihr verwandten Wechselstrom-Gleichstromeffekt sind alle an gepreßten oder geschmolzenen Drähten ausgeführt worden. Was die Erklärung der Phänomene betrifft, war eine genügende Theorie lange ausgeblieben, bis daß es neulichst T. Heurlinger[2]) gelang, die in einem zylindrischen Drahte im Magnetfelde auftretende Nachwirkung auf galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte zurückzuführen. Die Theorie wurde bald danach durch eine experimentelle Arbeit von H. Geipel[3]) weiter bestätigt.

Nach der Arbeit von Heurlinger lag es sehr nahe, zu vermuten, daß die Nachwirkungsphänomene überhaupt durch von dem primären Strom hervorgerufene Temperaturdifferenzen zu erklären sind. In einem Magnetfelde können diese durch die von Heurlinger zunächst behandelten galvanomagnetischen Effekte zustandekommen, außerhalb des Feldes durch verschiedene Peltierwirkungen. Geipel hat auch nachgewiesen, wie in Drähten von einer besonderen Struktur eine Nachwirkung durch die Peltierwärme zustandekommen kann. Seine Darstellung ist sicher viel zu eng, indem er nur die longitudinalen Effekte berücksichtigt, während, wie wir später

1) Für Literaturangaben vgl. R. Seidler, Diss. Leipzig 1909; Ann. d. Phys. 32. p. 337. 1910. Diese Arbeit dürfte zur Aufklärung der Phänomene am meisten beigetragen haben. Vgl. auch H. Geipel, Diss. Leipzig 1911; Ann. d. Phys. 38. p. 149. 1912.

2) T. Heurlinger, Physik. Zeitschr. 17. p. 221. 1916.

3) H. Geipel, l. c. § 1.

zeigen können, auch die transversalen Effekte von großer Bedeutung sind. Für die Zurückführung der Struktureigenschaften der Wismutdrähte auf das hypothetische, unserer Meinung nach noch gar nicht festgestellte Auftreten des Wismuts in zwei Modifikationen scheint uns kein Grund vorzuliegen.

In einem Kristallstab ist nach dem oben Gesagten, sofern nicht Inhomogenitäten vorkommen, die Nachwirkung durch den transversalen Peltiereffekt bedingt. In der Tat lassen sich auch die von uns beobachteten Nachwirkungsphänomene auf die von uns ebenfalls gemessenen Peltierwirkungen zurückzuführen mit der Genauigkeit, die von Messungen dieser Art gefordert werden kann. Zu diesem Zwecke leiten wir kurz die nötigen mathematischen Beziehungen aus der Thomsonschen Theorie der Thermoelektrizität ab. Da uns aber Hr. Heurlinger mündlich mitgeteilt hat, daß er schon früher ähnliche Berechnungen ausgeführt habe, die etwa gleichzeitig mit unserer Schrift veröffentlicht werden sollen, machen wir dies ohne jeden Anspruch auf Priorität.[1])

Das den Nachstrom erzeugende Temperaturgefälle zwischen den Seiten eines gegen die thermoelektrische Achse um φ^0 geneigten parallelepipedischen Stabes ergibt sich nach der Theorie von Thomson aus den Gleichungen (13) und (14) des vorigen Paragraphen zu

$$\frac{\tau}{b} = \frac{J}{a\,b}(P_\zeta - P_\xi)\sin\varphi\cos\varphi\,. \tag{15}$$

Andererseits gibt nach derselben Theorie das Temperaturgefälle τ/b Anlaß zu einer thermoelektromotorischen Kraft in der Längsrichtung des l cm langen Stabes von der Größe

$$C = \frac{\tau}{b}\cdot l\,(C_\zeta - C_\xi)\sin\varphi\cos\varphi\,. \tag{16}$$

Hier können wir angenähert nach einem bekannten thermodynamischen Satze für die thermoelektrischen Hauptkonstanten C_ζ und C_ξ setzen

1) *Bemerkung zu der Korrektur:* Die Schrift von Heurlinger ist unterdessen in Phys. Zeitschr. 18. p. 345. 1917 erschienen. Die Berechnungen sind für einen zylindrischen Kristallstab ausgeführt. Die Möglichkeit, die Nachwirkung in der besprochenen Weise zu erklären, war schon vor der Versammlung skandin. Naturforscher in Kristiania im Juli 1916 angekündigt.

$$(17) \qquad C_\zeta = \frac{P_\zeta}{0{,}24 \cdot T} \quad \text{und} \quad C_\xi = \frac{P_\xi}{0{,}24 \cdot T},$$

wo T die absolute Temperatur ist. Die Gültigkeit dieses Satzes auch für die Wismutkristalle folgt aus der Proportionalität von Peltierwärme und Thermokraft (vgl. p. 130) im Verhältnis zu denselben Größen für das Paar Kupfer–Konstantan, an dem diese Beziehung früher geprüft ist. Wir bekommen so für die bald nach dem Aufhören des primären Stromes nachbleibende elektromotorische Kraft aus (15), (16) und (17)

$$(18) \qquad C = \frac{J}{0{,}24\, T w} \cdot \frac{l}{a\, b} (P_\zeta - P_\xi)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

oder, wenn wir mit der ursprünglichen Potentialdifferenz zwischen den Enden des Wismutstabes

$$J \frac{c\, l}{a\, b}$$

(wo c der spezifische Widerstand) dividieren und den Ausdruck etwas umformen, für die Nachwirkung in Prozent

$$(19) \qquad N = \frac{(P_\zeta - P_\xi)^2}{0{,}24\, T.w.c} \cdot \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \cdot 100.$$

Hier ist c der spezifische Widerstand parallel, w die spezifische Wärmeleitfähigkeit senkrecht der Längsrichtung des Stabes. Da wir w nicht gemessen haben[1]), wollen wir zu einer rohen Näherungsberechnung die mittleren Werte anwenden

$$w = 0{,}019 \frac{\text{g} \cdot \text{kal}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}; \quad c = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Ohm/cm}.$$

Die im vorigen Paragraphen berechneten Werte für P_ζ und P_ξ geben dann

$$(19') \qquad N = 1{,}36 \cdot \sin^2 2\varphi \text{ Prozent}.$$

Parallel und senkrecht der thermoelektrischen Hauptachse muß somit die Nachwirkung verschwinden. Daß sie bei unseren Messungen parallel und senkrecht der Kristallachse noch erhebliche Werte annimmt, ist auf dieselbe Ursache zurückzuführen, die zur Erklärung der Peltierphänomene herangezogen werden mußte, nämlich daß die thermoelektrischen und kristallo-

1) Messungen von F. L. Perrot, Arch. d. Scienc. 18. p. 445. 1904 und F. M. Jäger, Arch. d. Scienc. 22. p. 240. 1916 haben gezeigt, daß die Wärmeleitfähigkeit im Wismutkristall im Verhältnis von ungefähr 1,5 : 1 variieren kann.

graphischen Achsen gegeneinander geneigt sind. In der Tat bekommen wir hier die beste Übereinstimmung mit den Meßresultaten, wenn wir den Neigungswinkel gleich ca. 15° setzen. Dieser Wert ist zwar kleiner als der aus den Peltierwärmemessungen erhaltene. Die zu den verschiedenen Messungen benutzten Stäbe sind aber auch an etwas verschiedenen Stellen des Schmelzstückes ausgeschnitten. Wir bekommen nach (19') und aus der Fig. 6 für die Nachwirkung im Augenblicke des Stromausschaltens die der Größenordnung nach gut übereinstimmenden Werte

	Prozent	
Stab	berechnet	gefunden
$A \perp a$	0,3	0,3
$B \parallel a$	0,3	0,4
$C \angle a$	1,0	0,6

Die Theorie von Heurlinger, die die Nachwirkung auf Temperaturdifferenzen zurückführt, hat sich somit bei Betrachtung der Ausgangswerte für die Nachwirkung gut bewährt. Wir können aber noch eine zweite Folgerung derselben prüfen. Das Abklingen der Nachwirkung muß nämlich dem Abklingen der Temperaturdifferenzen folgen, und letzteres kann nach den Prinzipien der Wärmeleitung berechnet werden.

Betrachten wir wie früher einen parallelepipedischen Kristallstab mit Seiten parallel und senkrecht der thermoelektrischen Meridianebene, so können wir durch die Mittellinie des Stabes senkrecht zur Meridianebene eine Ebene legen, deren Temperatur bei dem Stromdurchgang, von Peltierwirkungen an den Stabenden abgesehen, nicht geändert wird. Die übrigen Punkte des Stabes können wir durch eine gegen die letztgenannte Ebene senkrechte y-Koordinate charakterisieren. Die Temperaturdifferenz eines Punktes gegenüber der Mittelebene zur Zeit des Stromausschaltens ist dann durch

$$\delta = \frac{\tau}{b} \cdot y \qquad -\frac{b}{2} < y < +\frac{b}{2} \tag{20}$$

gegeben, wo, wie früher, τ die Temperaturdifferenz, b der Abstand der Seiten des Stabes sind. Das Abklingen dieser Temperaturdifferenz mit der Zeit t nach der Stromunterbrechung wird bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}, \tag{21}$$

wo a^2 der Quotient von Wärmeleitfähigkeit durch das Produkt von Dichte und spezifischer Wärme ist.

Um die Integration von (21) einfach durchführen zu können, ersetzen wir zu einer rohen Näherungsberechnung die zur Zeit $t = 0$ wirklich stattfindende Temperaturverteilung (20) durch:

$$\delta = \frac{\tau}{2} \sin \frac{\pi y}{b}, \qquad -\frac{b}{2} < y < +\frac{b}{2}. \tag{22}$$

In der Tat dürfte die lineare Temperaturverteilung (20) nach dem Aufhören des primären Stromes allmählich in den sinusförmigen (22) übergehen, so daß unsere Berechnung den Gang des Abklingens für relativ große Zeiten wiedergeben dürfte. Die Integration ergibt dann

$$\delta = e^{-\frac{4\pi^2 a^2 \cdot t}{b^2}} \frac{\tau}{2} \sin \frac{y\pi}{b}. \tag{23}$$

Aus der Zeitfunktion finden wir die Halbierungszeit für δ zu

$$t_{1/2} = \frac{\log 2}{4\pi^2 a^2} \cdot b^2, \tag{24}$$

oder, da a^2 zu etwa 0,065 zu setzen ist,

$$t_{1/2} = 0{,}27 \cdot b^2 \text{ Sek.}, \tag{24'}$$

wenn b in Zentimeter angegeben wird.

Aus den Angaben über die Dimensionen der Wismutpräparate (Tabb. 11—13) berechnen wir nach (24') die Halbierungszeiten und vergleichen sie mit den aus den Ordinaten der Kurven der Fig. 6 für 2000 und 3000 Trommelteile erhaltenen Werten. Wir haben

Stab	b	Halbwertzeit in Sek. 10^{-3} berechnet	gefunden
$A \perp a$	0,105	3,0	3,0
$B \parallel a$	0,14	5,3	3,3
$C \angle a$	0,18	8,7	5,4

Die berechneten Halbwertzeiten fallen etwas zu groß aus, was ganz im Sinne der gemachten Approximation und der Vernachlässigung der äußeren Wärmeleitung ist.

Erfahrungsgemäß klingt in gepreßten Drähten die Nachwirkung außerhalb des Feldes viel rascher ab als die im Felde,

was damit zusammenhängt, daß sie im ersten Falle auf Peltierwirkungen in den kleinen Kristallstücken beruhen, im zweiten dagegen auf galvanomagnetischen Effekten, die auf den ganzen Querschnitt einwirken. In unseren Kristallpräparaten finden wir (Tabb. 11—13 und 17—19), wie nach der Theorie zu erwarten war, daß die Abklingungsgeschwindigkeit inner- und außerhalb des Feldes ungefähr gleich groß ist.

Recht merkwürdig scheint es, daß die Nachwirkung in dem elektrolytischen Präparate ganz ausbleibt. Dies zeigt entweder dahin, daß die kristallinische Struktur des Präparates so fein ist, daß die Nachwirkung zu rasch abklingt, um wahrgenommen zu werden, oder auch liegt die thermoelektrische Hauptachse senkrecht auf dem Blatt, oder auch ist die elektrolytisch ausgeschiedene Masse isotrop.

Lund, Phys. Inst. d. Univ., Juni 1917.

(Eingegangen 3. Juli 1917.)

2. *Luftelektrische Messungen auf Teneriffa; von W. Buchheim und H. Dember.*

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Physik. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 67, 6. Dezbr. 1915.)

Zweiter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Gleichzeitige Beobachtungen der ultravioletten Sonnenstrahlung und der Ionenzahlen hatten zum Ergebnis[1], daß auf Gipfeln im Hochgebirge, wo einerseits der Einfluß des Erdbodens ein geringerer und andererseits die Sonnenstrahlung eine stärkere ist als auf dem flachen Lande in Meereshöhe, ein deutlicher Parallelismus zwischen Strahlung und Ionenzahlen besteht. Es hat sich gezeigt, daß mit zunehmender Sonnenstrahlung auch die Zahl der Ionen im Kubikzentimeter der atmosphärischen Luft steigt. Man muß nach den Versuchen von Lenard und Ramsauer[2]), Richarz[3] und seinen Schülern annehmen, daß ein beträchtlicher Teil der vom Licht erzeugten Ionen durch Luftströmungen und vom vertikalen Leitungsstrom aus höheren Schichten der Atmosphäre zum Beobachtungsort hingeführt wird. Hierfür spricht auch das beobachtete Nachhinken des Maximums der Ionenzahl hinter dem Intensitätsmaximum der Sonnenstrahlung.

Eine Schwierigkeit bei der Deutung der früheren Versuche besteht darin, den Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft auf die Ionenzahl zu bestimmen. Mit schnell und stark wachsender Trockenheit wird fast immer, auch in ge-

1) H. Dember, Physik. Zeitschr. **13.** p. 207. 1912; Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig **64.** p. 1. 1912; Ber. d. Naturw. Ges. Isis Dresden, 1912. p. 84.

2) P. Lenard u. C. Ramsauer, Ber. d. Heidelb. Akad. 1911, 1912. Meteorologische Zeitschrift 1912 (Zusammenfassung).

3) F. Richarz, Marburger Sitzungsberichte; W. Bieber, Ann. d. Phys. **39.** p. 1313. 1912.

ringen Höhen über dem Meere, ein Anwachsen der Ionenzahlen beobachtet. Mit in gleicher Weise wachsender Feuchtigkeit geht eine starke Abnahme der gemessenen Ionenzahlen parallel[1]), bedingt durch die Anlagerung besonders der leicht beweglichen negativen Träger an Wasserdampfmoleküle; die dadurch schwer beweglichen Ionen entgehen der Messung und sind ohne Einfluß auf die Leitfähigkeit. Da die Feuchtigkeit ihr Minimum meistens am Mittag besitzt, so kann sie auch der Ionenzahl (Leitfähigkeit) diesen Gang aufdrücken. Will man eine Entscheidung darüber treffen, ob die Feuchtigkeitsänderung den maßgebenden Faktor bildet, so wählt man mit Vorteil atmosphärische Verhältnisse, bei welchem sowohl der Wasserdampfgehalt der Luft als auch seine Schwankungen tagsüber klein sind.

Diese Bedingungen waren während des Aufenthaltes auf dem Pik von Teneriffa in der Zeit vom 12. August bis 9. September 1914 in zufriedenstellender Weise erfüllt.[2])

Die folgenden Versuche sind zu dem Zwecke angestellt, bei besonderer Berücksichtigung der relativen Feuchtigkeit die früheren zu bestätigen. Die Wichtigkeit der Kenntnis des Ionisators der oberen Luftschichten für die Reichweitenänderungen und Reflexionen der Hertzschen Wellen in der Funkentelegraphie läßt die Wiederholung unter von den früheren ganz verschiedenen Umständen rechtfertigen.

§ 2.

Im allgemeinen wird an der Erdoberfläche ein Überschuß der positiven gegenüber den negativen Ionen gefunden. Gemäß der Elster-Geitelschen Adsorptionstheorie in der von Ebert abgeänderten Gestalt ist das eine Folge der Anlagerung der negativen Ionen in den Erdkapillaren, durch welche infolge der Luftdruckänderungen (Bodenatmung) die ionisierte Luft den Erdboden verläßt. Wären außerdem in der Atmosphäre nur noch diejenigen Ionen vorhanden, welche durch die Wirkung ultravioletten Sonnenlichtes oder durch einen anderen Ionisator entstehen, der in gleicher Weise wirkt,

1) A. Gockel, Meteorolog. Zeitschr. 25. p. 9. 1908. Der Einfluß der relativen Feuchtigkeit tritt erst bei über 80 Proz. hervor.

2) H. Dember, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. 67. p. 106. 1915; Anm. d. Phys. 49. p. 599—610. 1916.

so würde der Quotient[1])

$$\frac{E_-}{E_+} < 1,$$

der dann zu

$$\frac{E_- + b_-}{E_+ + b_+}$$

anwächst, wo b der bei positiven und negativen Ionen gleiche Betrag von hinzugekommenen Ionen ist, ein Maß für die Wirkung des Ionisators geben; d. h. E_-/E_+ müßte in derselben Weise zunehmen wie die Intensität z. B. des ultravioletten Lichtes. Unter besonders günstigen Umständen in sehr großen Höhen kann dieses Maß benutzt werden. Wird aber die Hauptmenge der in der Atmosphäre erzeugten Ionen erst durch Luftströmungen oder durch den Leitungsstrom an den Beobachtungsort gebracht, so ist das additive Glied des Zählers verschieden von dem im Nenner, und zwar kleiner infolge der Anlagerung der negativen Träger an Luftmoleküle und der Quotient wird kleiner. Desgleichen muß auch an Stellen hohen Potentialgefälles dieses von einem von uns früher gebrauchte Maß versagen. Das Erdfeld treibt die negativen Ionen in die Höhe und zieht die positiven zur Erdoberfläche, so daß von den in der Atmosphäre gebildeten Ionen die positiven in der Mehrzahl an den Beobachtungsort gelangen[2]) und daher zu erwarten steht, daß ein ausgeprägtes Maximum unter solchen Umständen nur an der Zahl der positiven Ionen zu beobachten ist. Die letztere Anschauung wird durch die folgenden Messungen bestärkt.

§ 3.

Die Messungen der Ionenzahlen sind mit einem Ebertschen Ionenzähler, der mit einem Zweifadenelektrometer ausgerüstet ist, ausgeführt worden. Zur Erhöhung der Umlaufsgeschwindigkeit des zur Luftmengenmessung dienenden Anemometers war ein fischförmiger Verdrängungskörper vor dem Flügelkranz des Anemometers angebracht. Auf diese Weise

1) E_-/E_+ ist der reziproke Wert der in der luftelektrischen Literatur meist mit Q bezeichneten Größe.

2) Hiermit stimmt die Beobachtung Elsters, Physik. Zeitschr. 2. p. 113. 1900 überein, der auf der Spitze der Piz Languard die Zerstreuungskoeffizienten findet $a_+ = 1{,}09\,\%$; $a_- = 18{,}41\,\%$.

stößt der angesaugte Luftstrom auf stark exzentrisch gelegene Teile der Glimmerflügel, so daß sich deren Umlaufsgeschwindigkeit und damit die Anzahl der Umdrehungen des Kreuzes für das durchgesaugte Liter Luft erhöhte.[1])

Der Zylinderkondensator des Ebertschen Apparates ließ sich durch einen Aufsatz ersetzen, mit dessen Hilfe die Messung des Potentialgefälles ausgeführt werden konnte. Er besteht aus einer Metallscheibe, welche mit einem Stift auf das Elektrometer aufgesteckt, der Wirkung des Erdfeldes ausgesetzt wird. Scheibe, Stift und Elektrometer können mit Hilfe einer geeigneten Vorrichtung, wozu die am Apparate vorhandene Ladungseinrichtung umgeändert war, aus beliebiger Entfernung mittels einer Schnur geerdet oder isoliert werden. Eine Metallkappe, auf einen kreisrunden Rahmen passend, über welchen die exponierte Platte von 16 cm um 21,5 cm hinausragt und der auf der Elektrometerhülle sitzt, entzog nach der Isolation die Metallscheibe der Wirkung des Erdfeldes. Der dann am Elektrometer abgelesene Ausschlag ist dem Potentialgefälle über dem Apparat proportional und sein Voltwert ist bei unserer Einrichtung mit 5,4 zu multiplizieren, um den Wert des Gefälles zu erhalten, wie er sich mit lichtelektrischen Sonden aus Magnalium auf einer Ebene in der Nähe Dresdens ergibt.

Die Bestimmungen der Beweglichkeiten sind mit Hilfe eines Macheschen Vorsteckkondensators ausgeführt worden.

Zur Messung der relativen Feuchtigkeit wurde ein Assmannsches Aspirationspsychrometer verwendet.[2])

Die Hauptbeobachtungsstelle (Zeltplatz) lag in einer nach Osten offenen Mulde von etwa 60 m Durchmesser, die von 12 m hohen Lavawällen gebildet ist, in einer Höhe von 3280 m über dem Meere.

§ 4.

Messungen oberhalb der Alta Vista.

Die folgenden Tabellen (1—6) geben die Zählungen der Ionen auf dem Zeltplatz wieder an Tagen, die besonders klar gewesen sind.

1) Hr. Ingenieur Dr. Rosenmüller in Dresden hat die besondere Eichung des Instrumentes in dankenswerter Weise für uns ausgeführt.

2) Den größten Teil der Feuchtigkeitsmessungen hat Hr. Martin Uibe vorgenommen.

Die Zeit ist mittlere Ortszeit des Cañadas-Observatoriums. t ist die Lufttemperatur und f die relative Feuchtigkeit in Prozenten. E_- und E_+ ist die Elektrizitätsmenge in elektrostatischen Einheiten im Kubikmeter. n_- und n_+ ist die Anzahl der Ionen im Kubikzentimeter.

Tabelle 1.

24. August 1914.

Zeit	$t°$	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
8h 30 v.	10.2	14		0,520		1110	Mittlerer Barometerstand
9h 30			0,186		397		$\bar{b}_p = 522{,}6$ mm
10h 20	12,0	19		0,995		2120	Absolut klarer Tag mit weiter Fernsicht
11h 00	13,5		0,497		1060		
12h 00			0,266		568		
12h 50 n.				0,874		1860	
2h 00	14,0		0,188		400		
2h 30	14,0		0,292		620		
3h 00	13,0			0,844		1800	
3h 20			0,252		535		
4h 00	8,0	6		0,702		1500	
5h 30				0,528		1120	
6h 00	10,6	7		0,105		215	

Tabelle 2.

26. August 1914.

Zeit	$t°$	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
10h 00 v.	14,0		0,437		930		$\bar{b}_p = 522{,}6$ mm
10h 37	14,0	8		0,668		1425	Am Vormittag klar
11h 15	14,0		0,425		905		
11h 45	14,0			0,853		1820	
12h 45 n.	13,7		0,548		1160		
1h 30	13,0			0,962		2050	Von 1 Uhr an vereinzelte Cumulus-Bildung
2h 15	13,0	21	0,405		860		
2h 45	12,0			0,731		1560	
4h 00				0,922		1970	
5h 15	11,0		0,306		650		Windstille
5h 45				0,720		1540	
6h 50	11,2	16	0,181		385		
7h 30				0,563		1200	

Tabelle 3.

27. August 1914.

Zeit	t^0	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
4h 45 v.	7,0		0,477		1020		$\bar{b}_p = 520.3$ mm
5h 30			0,461		980		Starker Westwind
6h 09	9,8	19	0,391		830		
6h 45	10,0	35		0,877		1870	Westwind
7h 20	11,0		0,292		620		Schwacher Westwind
7h 40	12,0			0,860		1840	Windstille
9h 15	14,8	26	0,213		455		Böig
9h 50				0,830		1770	
11h 40	15,2	31	0,425		900		
12h 05 n.				0,803		1710	Südwind, der Staub bringt
1h 50	14,8	30	0,291		620		
2h 40	14,0			0,860		1840	
3h 30	12,0		0,208		445		
4h 35	11,5	33		0,705		1500	
5h 10			0,240		510		Starker Westwind
5h 45				0,842		1800	
6h 30	10,0		0,213		450		
7h 00				0,780		1660	
9h 00	8,0			0,580		1230	Westwind

§ 5.

Die Zahlen für die negativen Ionen lassen eine regelmäßige Periode mit Sicherheit nicht erkennen, obgleich an manchen Tagen (z. B. Tabb. 2, 3 u. 6) ein Maximum der Ionenzahlen gegen Mittag vorhanden ist. Dagegen zeigt der Verlauf der positiven Ionisation ein bei allen Messungen deutlich vorhandenes Maximum 2—3 Stunden, nachdem die Sonne ihren höchsten Stand erreicht hat. Ein allein ausschlaggebender Einfluß des Wasserdampfgehaltes auf die Veränderung der Ionenzahl läßt sich nicht erkennen. Die Feuchtigkeit nimmt z. B. am 24. August (Tab. 1) gegen Mittag hin zu und macht am Nachmittag einer außerordentlich starken Trockenheit Platz. Die Zahl der positiven Ionen fällt dabei von 1860 auf 225 im Kubikzentimeter. Auch am 26. August (Tab. 2) herrscht mittags die größte Feuchtigkeit und dabei die größte Ionenzahl.

Tabelle 4.

28. August 1914.

Zeit	t^0	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
6h 00 v.	8,0	33		0,672		1430	$\bar{b}_9 = 526{,}3$ mm
6h 40	12,2		0,280		600		Sehr klarer Tag
7h 15				0,733		1570	
8h 45	15,0	29	0,240		510		
9h 15				0,816		1740	
9h 50	15,6	29	0,460		980		
10h 25	15,0			0,868		1850	Wechselnde Windrichtung
11h 00	17,2	20	0,417		890		
11h 35	15,0			0,943		2016	Westwind
1h 30 n.	15,5	25		0,834		1780	
2h 00			0,286		610		Westwind
2h 45	19,6	26		0,980		2090	
3h 20			0,360		770		
3h 55	17,0	30		0,740		1580	
5h 15				0,710		1510	
5h 50	11,2	36	0,376		800		Westwind
6h 35	10,6	38		0,665		1420	

Am 27. August (Tab. 3) ist die Veränderung der Feuchtigkeit gering. Die Zahl der positiven Ionen sowohl als auch der negativen ist morgens sehr groß, fällt dann und erreicht bei den negativen gegen 12 Uhr, bei den positiven gegen 3 Uhr wieder ein Maximum. Am 28. August (Tab. 4) ist das Minimum von f um 11 Uhr erreicht, während das Maximum der Ionenzahl bei wachsendem f um 2 Uhr 45 gemessen wird. Am 29. August (Tab. 5) ändert sich am Vormittag die Feuchtigkeit ziemlich stark, n_+ steigt von 1560 auf 1900 gegen 2 Uhr. Das Minimum der Feuchtigkeit um 3 Uhr 15 ist vom Maximum der Ionenzahl begleitet, so daß hier ein vielleicht plötzlich eingetretener Wechsel des Feuchtigkeitsgehaltes wohl eine Rolle gespielt haben kann. Während dieser Tag feste Schlüsse nicht zuläßt, erlauben die Messungen am 30. August (Tab. 6) wieder die Unabhängigkeit der beiden fraglichen Größen voneinander zu zeigen. Eine Abhängigkeit scheint nur dann vorhanden zu sein, wenn die Feuchtigkeitsänderungen sehr schnell stattfinden und gleichzeitig sehr stark sind. Mit Ausnahme der um 10 Uhr 55 gemessenen Feuchtigkeit ist in der Zeit von 7 Uhr 30 vormittags bis 4 Uhr 10 nachmittags f innerhalb der Fehlergrenzen der Messungen konstant. Die

Tabelle 5.

29. August 1914.

Zeit	t^0	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
6h 20 v.	10,9	32		0,732		1560	$\bar{b}_p = 522{,}8$ mm
6h 55			0,440		940		Klarer Tag mit weiter Fernsicht
7h 25	12,0	27		0,797		1700	
8h 05			0,430		915		Starker Westwind während des ganzen Tages
8h 40	12,6	29		0,743		1580	
10h 35	14,6	19	0,460		980		
11h 50	14,0	30		0,777		1660	Böig
1h 55 n.	14,0	21		0,887		1890	
2h 40			0,390		830		
3h 15	13,6	15		1,07		2280	
4h 25				0,741		1580	
5h 00	11,3	32	0,280		600		
5h 30	10,6	37		0,688		1470	
6h 50				0,580		1240	
8h 40	8,0			0,623		1330	

Tabelle 6.

30. August 1914.

Zeit	t^0	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Bemerkungen
5h 00 v.	7,8	45		0,620		1320	$\bar{b}_p = 520{,}8$ mm
5h 40			0,617		1320		Sehr klarer Tag mit großer Fernsicht
6h 20	10.6	34		0,557		1190	
7h 00			0,422		890		Starker Westwind
7h 30	11,7	22		0,740		1580	
10h 55	13,4	34	0,265		575		
12h 10 n.	13,8	24		0,738		1580	
2h 30				1,19		2540	
2h 55	14,3		0,530		1130		
3h 15				0,680		1450	
3h 40			0,310		660		
4h 10	13,1	22		0,660		1410	
8h 08	9,6	32		0,410		875	
9h 40				0,525		1120	
10h 45			0,250		530		

Zahl der positiven wie der negativen Ionen hat zwischen 2 und 3 Uhr ein starkes Maximum. Das beobachtete Maximum der negativen Ionenzahl spricht dafür, daß der Ionisator unter günstigen Umständen auch noch in den tieferen Schichten der Atmosphäre wirksam ist. Ob diese günstigen Umstände durch die Luftströmungen (Böen) bedingt sind, kann nur durch sorgfältig registrierende Beobachtungen auf einer geeignet gelegenen Höhenstation entschieden werden.

Die Messungen des Potentialgefälles am Zeltplatze ergaben die folgenden Werte:

22. August 1914: 167,4; 126,9; 129,6; 135,0;
Mittel: 139,7 Volt/m.

23. August 1914: 133,9; 153,9; 144,7; 135,0;
Mittel: 141,9 Volt/m.

§ 6.

Messungen im Pikkrater.

Die gelegentliche Beobachtung, daß in der 3366 m ü. d. M. zwischen dem Zeltplatz und dem Pikgipfel gelegenen Eishöhle eine negative Ionisation herrscht, die, wie die folgende Messung zeigt (Tab. 7), an die höchsten heranreicht, die an unserem Zeltplatze gemessen worden waren, brachte uns auf die Vermutung, daß die noch vorhandene geringe vulkanische Tätigkeit des Piks[1]), besonders das Emportreiben von Wasserdampf, Schwefelwasserstoff, Dämpfen schwefliger Säure und Kohlensäure auch ionisierte Gase zutage fördern könne.

Wohl die Hauptmenge des aus den Blaslöchern (Narices) ausströmenden Wasserdampfes, der eine Temperatur von ca. 80° besitzt, rührt von Niederschlägen her, die bis zu heißen Schichten einsickern und der dann aus verhältnismäßig wenigen, engen Löchern ausgeblasen wird. Es besteht nun die Möglichkeit, daß zuerst das Wasser, dann der Wasserdampf auf seinem Wege mit radioaktivem Gestein in Berührung gekommen ist und sich mit aktivem Material beladen hat oder daß der

1) Vgl. darüber: Hans Meyer, Die Insel Tenerife, Leipzig 1896. Hr. Meyer beschreibt das Hervordringen von Wasserdampf aus einer Wandspalte in der Eishöhle. Wir haben darin kein Blasloch in Tätigkeit mehr finden können, obgleich wir die Höhle, um Trinkwasser zu holen, sehr oft besucht haben.

Tabelle 7.

Ionisation in der Eishöhle.

1. September 1914.

Zeit	t	f	E_-	E_+	n_-	n_+	Beweglichkeit in $\frac{cm^2}{sec\ Volt}$ u_-	u_+
3^h 20 bis 6^h	4,6°	52%	0,47	0,69	1000	1480	1,84	1,08

Wasserdampf oder die heraufkommenden Gase durch Hohlräume gehen, welche durch den Zerfall der Emanation und aktiven Niederschlägen ionisiert sind. Ähnliche Vorgänge in größerem Maßstabe werden z. B. bei der Erklärung der Radioaktivität der Quellen von Lenk im Kanton Wallis herangezogen.[1])

Die Untersuchung von Wasserdampfblaslöchern auf der Rambletta (3570 m) führte nun zu dem Ergebnis, daß der ausströmende Wasserdampf keine Erhöhung der Leitfähigkeit in der Umgebung des Blasloches bedingt und auch selbst keine mit dem Ebertschen Apparat auffindbaren Ionen mit sich führt. Die Messungsart modifizierten wir auch so, daß wir den Wasserdampf direkt am Zerstreuungsstab des Ionenzählers vorüberstreichen ließen. Der beobachtete Spannungsabfall war in allen Fällen von gleicher Größe wie der kleine Isolationsfehler.

Während die Wasserdampfblaslöcher keine mit unseren Hilfsmitteln meßbaren Ionenmengen führen wobei die Möglichkeit offenbleibt, daß sehr unbewegliche Ionen vorhanden sind, zeigte sich eine ganz überraschend große Ionenzahl in den heißen und unsichtbaren Gasen der nach schwefliger Säure und Schwefelwasserstoff riechenden Naricen. Tab. 8 gibt eine solche Messung.

Sie ist an einer solchen Stelle ausgeführt, die im Innern des großen Pikkraters, und zwar an seiner Nordseite, liegt. Die Stelle, eine flache Grube, war 1,5 m lang, 1 m breit und 30 cm

1) A. Gockel, Radioaktivität von Boden und Quellen, p. 88; Braunschweig 1914. — M. Lugeon, Material für die geologische Karte der Schweiz; Bern 1912.

Tabelle 8.

6. September 1914.

Zeit	t	E_-	E_+	n_-	n_+	Ort	Bemerkungen
6h 42 vorm.	12,0	8,65	6,70 3,03	18440	14280 6450	Blasloch im Krater	$\bar{b}_p$ = 496,6 mm Himmel ganz bedeckt
8h 55 vorm.	12,0	0,57	1,72	1210	3660	Im Krater: 5 m vom Blasloch	Böig

tief, mit einer Bodentemperatur von 60—70°. Ein eigentliches Blasloch war nicht vorhanden, sondern die heißen Gase entströmten der ganzen Fläche des Grubenbodens. Den Ebertschen Apparat stellten wir unmittelbar auf den Boden, so daß zwischen diesem und der Einsaugöffnung des Kondensators ein Luftraum von ca. 0,5 m blieb, der dem Winde ausgesetzt war, wodurch die stark schwankenden Werte zustande kommen.

Ob die Gase, welche aus dem Blasloch ausströmen, unipolar ionisiert sind, läßt sich aus diesen wenigen Messungen nicht beurteilen, so daß auch kein Schluß dahin möglich ist, ob die Ionen aus größeren Tiefen stammen, was am Überwiegen der positiven Ionen zu erkennen wäre. Als Ionisator ist außer radioaktiven Vorgängen (Zerfall der Emanation und der aktiven Niederschläge, Wirkung einer durchdringenden Strahlung des Bodens) noch ein anderer als Ursache der starken Ionisation denkbar.

Da die vulkanische Tätigkeit des Pikgebietes nicht erloschen ist, wie der im November 1909 an der Nordwest-Schulter erfolgte Lavaausbruch beweist, so ist anzunehmen, daß glühende Gesteinsmassen in nicht allzu großer Tiefe vorhanden sind. Diese müssen wie eine riesige Wehneltkathode, spontan wirkend[1]), ständig Ionen erzeugen, welche von den ausströmenden Gasen mit ans Tageslicht gebracht werden. Zu entscheiden, welcher Bruchteil der ausströmenden Ionen von radioaktiven

1) W. Schlichter, Ann. d. Phys. 47. p. 573, 1915.

Prozessen[1]), welcher „glühelektrisch" erzeugt wird, muß späteren Untersuchungen überlassen bleiben.

Das Potentialgefälle im Innern des Kraters betrug am 5. September im Mittel 450 Volt/m. Auf der Pikspitze fanden wir es zwischen 720 und 1000 Volt/m, auch oft höher, über dem Meßbereich des Instrumentes, stark schwankend.

§ 7.

Resultate.

1. Entsprechend früheren Messungen in den Hochalpen hat die positive Ionisation in der Atmosphäre über dem Pik von Teneriffa 2—3 Stunden, nachdem die Sonne den höchsten Stand erreicht hat, ein Maximum. Es wird gezeigt, daß die relative Feuchtigkeit nicht die Ursache dieser Erscheinung sein kann, so daß, wenn nicht ein anderer unberücksichtigter Ionisator mitspielt, das ultraviolette Licht als Ursache anzusehen ist.

---

1) Der gemessene Höchstwert von 18440 $\frac{\text{Ionen}}{\text{cm}^3}$ in einer Höhe von 50 cm über dem Erdboden gestattet die Annahme, daß innerhalb des Kraterbodens mindestens 19000 Ionen im Kubikzentimeter vorhanden sind. Diese Zahl fordert eine sekundliche Erzeugung von $q = \alpha n^2$ Ionen im Kubikzentimeter. Hierbei ist α der Koeffizient der Wiedervereinigung der Ionen in der Atmosphäre bei 760 mm Druck. Es soll angenommen werden, daß der Koeffizient in der lockeren Asche der gleiche ist wie in der Atmosphäre. ($\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$; P. Lenard, Heidelb. Ber., 17. Abhdlg. p. 14. 1914; α ist für Luft und Kohlensäure fast gleich und nach Langevins Theorie und Messungen dem Gasdruck proportional.) In halber Höhe des Piks ist der Barometerstand etwa gleich 610 mm, so daß der mittlere Wiedervereinigungskoeffizient $\frac{610}{760} \cdot \alpha$ ist, wenn angenommen wird, daß die Ionen aus allen Teilen des Berges stammen. Wird diese Zahl und für n der Wert 19000 in die obige Gleichung eingesetzt, so folgt $q = 490 \frac{\text{Ionen}}{\text{sec. cm}^3}$. Der kleinste Wert, den man dieser Größe geben kann, ist 400, unter der Voraussetzung, daß alle Ionen nur aus den obersten Aschenschichten stammen.

Bei den Messungen Eberts in München war das Maximum im jährlichen Verlauf des von der Emanation unterhaltenen Sättigungsstromes in geringer Tiefe unter der Erdoberfläche $1{,}20 \cdot 10^{-7}$ elektrostat. Einheiten, was einer Bildung von $\frac{250 \text{ Ionen}}{\text{sec. cm}^3}$ gleichkommt. Also etwa nur die Hälfte des aus den hier gemessenen Zahlen gerechneten Ionenbetrages.

2. Den wasserdampffreien Blaslöchern des Kraters auf dem Pik entströmen Gase mit einem Ionengehalt des zehnfachen Betrages, wie er in der Atmosphäre angetroffen wird.

Die Mittel zu diesen Untersuchungen sind von den kartellierten Deutschen Akademien zur Verfügung gestellt worden. Es sei uns gestattet, ihnen auch an dieser Stelle ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Physik. Inst. d. Techn. Hochschule Dresden u. Güimar auf Teneriffa, 28. Oktober 1915.

(Eingegangen 27. Juni 1917.)

3. *Über eine einfache Berechnung und geometrische Deutung der gastheoretischen Funktionaldeterminante;* von *Hermann Rothe.*

§ 1. Es seien K_1 und K_2 zwei *frei bewegliche, homogene, vollkommen elastische* und *vollkommen glatte Kugeln* mit den *Massen* m_1 und m_2, auf die *keine äußeren Kräfte* wirken mögen. Jede der beiden Kugeln befinde sich in *geradliniger, gleichförmiger Translationsbewegung*, und es sei $\mathfrak{v}_1$ der konstante *Geschwindigkeitsvektor* des Mittelpunktes c_1 (und daher auch jedes anderen Punktes) von K_1 und analog $\mathfrak{v}_2$ der des Mittelpunktes c_2 von K_2.

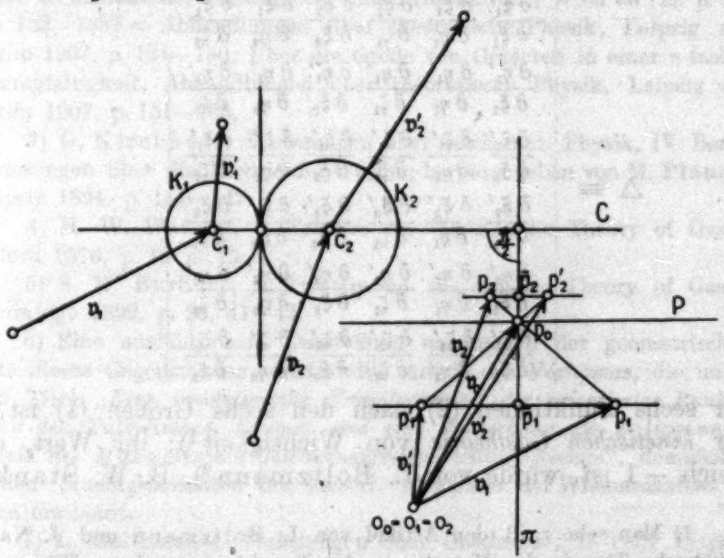


Fig. 1.

In einem gegebenen *Zeitpunkte* t_0 mögen die beiden Kugeln *zusammenstoßen*. Aus den angegebenen Voraussetzungen folgt, daß auch *nach dem Stoße* jede der beiden Kugeln eine *geradlinige, gleichförmige Translationsbewegung* ausführen wird;

die *Geschwindigkeitsvektoren* von K_1 und K_2 *nach dem Stoße* seien $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_2'$.

Wir zerlegen nun jede Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in drei *Komponenten* ξ, η, ζ nach den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems; es seien dann:

$$(1) \qquad \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2$$

die Komponenten der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ *vor* dem Stoße, und:

$$(2) \qquad \xi_1', \eta_1', \zeta_1'; \quad \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$$

die Komponenten der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{v}_2'$ *nach* dem Stoße.

Die sechs Größen (2) werden Funktionen der sechs Größen (1) sein, die außerdem noch von den beiden Massen m_1 und m_2 der beiden Kugeln K_1 und K_2 sowie von der *Richtung* ihrer *Zentrallinie* im *Augenblicke des Stoßes* abhängen. [Vgl. (18) oder (23)]. Die *Funktionaldeterminante*:

$$(3) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \xi_1'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \xi_1'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi_1'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \xi_1'}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \eta_1'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \eta_1'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \eta_1'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \eta_1'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \eta_1'}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \zeta_1'}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \xi_2'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \xi_2'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \xi_2'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \xi_2'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi_2'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \xi_2'}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \eta_2'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \eta_2'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \eta_2'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \eta_2'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \eta_2'}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \zeta_2'}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix}$$

der sechs Funktionen (2) nach den sechs Größen (1) ist in der *kinetischen Gastheorie* von Wichtigkeit[1]); ihr Wert, der gleich -1 ist, wurde von L. Boltzmann[2]), B. W. Stanke-

1) Man sehe z. B. den Artikel von L. Boltzmann und J. Nabl, Kinetische Theorie der Materie, in der Enzykl. d. mathem. Wissensch. 5_1. Heft 4. Leipzig 1907. p. 493—557; insbes. Nr. 10, p. 511—512.

2) L. Boltzmann, Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten, Sitzungsber. Akad. (math.-nat.) Wien 58 (2). p. 517—560 1868 = Wissenschaftliche Abhandlungen, I. Band, Leipzig 1909, p. 49—96; Über die zum theoretischen Beweise des Avogadroschen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen, Sitzungsber.

witsch[1]), H. A. Lorentz[2]), G. Kirchhoff[3]), H. W. Watson[4]), S. H. Burbury[5]) u. a. bestimmt, aber teils in ziemlich umständlicher und wenig übersichtlicher Weise, teils mit unnötig komplizierten Hilfsmitteln.

Die folgenden Zeilen enthalten nun *erstens* eine ganz elementare, kurze und direkte *Berechnung* der *gastheoretischen Funktionaldeterminante* (3) (vgl. § 3) und *zweitens* eine einfache *geometrische Deutung* derselben (vgl. § 4), aus der ihr Wert -1 ohne jede Rechnung gefunden werden kann.[6]) Auch L. Boltzmann[7]) hat eine geometrische Betrachtung angegeben,

---

Akad. (math.-nat.) Wien **94** (2). p. 613—643, 1886 (1887) insbes. p. 625, 636—643 = Wissenschaftliche Abhandlungen **8**. Leipzig 1909, p. 225 bis 257, insbes. p. 237, 248—255; engl. Übersetzung: On the Assumptions necessary for the Theoretical Proof of Avogadro's Law, The Lond. Edinb. Dublin Phil. Mag. (5) **23** p. 305—333. 1887, insbes. p. 315, 325—331.

1) B. W. Stankewitsch, Zur dynamischen Gastheorie, Ann. Phys. Chem. Lpz. (Neue Folge) **29**. p. 153—160. 1886.

2) H. A. Lorentz, Über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolekülen, Sitzungsber. Akad. (math.-nat.) Wien **95** (2). p. 115 bis 152. 1887 = Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig und Berlin 1907, p. 124—150; Über die Größe von Gebieten in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig und Berlin 1907, p. 151—163.

3) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathemat. Physik, IV. Band: Vorlesungen über die Theorie der Wärme; herausgegeben von M. Planck, Leipzig 1894, p. 144—147.

4) H. W. Watson, A Treatise on the Kinetic Theory of Gases, Oxford 1876, p. 12 u. 13.

5) S. H. Burbury, A Treatise on the Kinetic Theory of Gases, Cambridge 1899, p. 28, 41—43.

6) Eine ausführlichere Darstellung namentlich der geometrischen Seite dieses Gegenstandes enthält eine Arbeit des Verfassers, die unter dem Titel „*Eine involutorische Transformation der orientierten Punktepaare des Euklidischen Raumes und eine Bemerkung zu Boltzmanns Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes*", demnächst in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien erscheint.

7) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, I. Teil, Leipzig 1896, p. 15—31, insbes. p. 27. Eine Darstellung des Boltzmannschen Beweises findet man auch bei G. Jäger, Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie („Die Wissenschaft", 12. Heft), Braunschweig 1906, p. 59—68, insbes. p. 61 u. 62, und A. Byk, Einführung in die kinetische Theorie der Gase, I. Bändchen: Die idealen Gase (Sammlung mathematisch-physikalischer Schriften 10_1), Leipzig und Berlin 1910, p. 30—43, insbes. p. 40.

durch welche die Ausrechnung der Funktionaldeterminante (8) umgangen werden soll; aber diese Betrachtung ist unrichtig, wie im folgenden noch gezeigt wird (vgl. § 5).

§ 2. Um die Geschwindigkeitskomponenten (2) der beiden Kugeln K_1 und K_2 *nach* dem Stoße als Funktionen ihrer Geschwindigkeitskomponenten (1) *vor* dem Stoße darzustellen, bedienen wir uns einer von J. C. Maxwell[1]) angegebenen Konstruktion, mittels der man die beiden Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{v}_2'$ finden kann, wenn die Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, die Massen m_1, m_2 und die Richtung der Zentrallinie $c_1 c_2$ beider Kugeln im Augenblicke t_0 des Stoßes, die C heißen möge, bekannt sind.

Wir tragen von einem gemeinsamen Anfangspunkte:

$$o_0 = o_1 = o_2 \text{ (vgl. Fig. 1)}$$

die beiden Vektoren:

$$\mathfrak{v}_1 = \overline{o_1 p_1}, \quad \mathfrak{v}_2 = \overline{o_2 p_2} \tag{4}$$

auf und teilen die Strecke $\overline{p_1 p_2}$ zwischen ihren Endpunkten durch einen Punkt p_0 im Verhältnisse:

$$\frac{\overline{p_1 p_0}}{\overline{p_0 p_2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{5}$$

Der Vektor:

$$\mathfrak{v}_0 = \overline{o_0 p_0} \tag{6}$$

bedeutet dann die (vor und nach dem Stoße gleiche) *Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes* c_0 beider Kugeln. Durch p_0 legen wir eine Ebene π senkrecht zur Zentrallinie C und suchen die zu p_1, p_2 in bezug auf π symmetrischen Punkte p_1', p_2'. Die gesuchten Geschwindigkeitsvektoren nach dem Stoße sind dann:

$$\mathfrak{v}_1' = \overline{o_1 p_1'}, \quad \mathfrak{v}_2' = \overline{o_2 p_2'}. \tag{7}$$

Um diese Konstruktion analytisch darzustellen, wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung $o_0 = o_1 = o_2$ und den Achsen ξ, η, ζ; hat dann ein Punkt p

1) J. C. Maxwell, Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. — Part I: On the Motions and Collisions of Perfectly Elastic Spheres, The Lond. Edinb. Dublin Phil. Mag. (4) 19. p. 19—32. 1860 = Scientific Papers, Vol. I, Cambridge 1890, p. 377—391.

die Koordinaten ξ, η, ζ, so schreiben wir $p = (\xi, \eta, \zeta)$. Es ist insbesondere:

$$(8) \qquad p_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1); \quad p_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$

und:

$$(9) \qquad p_1' = (\xi_1', \eta_1', \zeta_1'); \quad p_2' = (\xi_2', \eta_2', \zeta_2'),$$

sowie:

$$(10) \qquad p_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0),$$

wenn wir:

$$(11) \quad \xi_0 = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta_0 = \frac{m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2}{m_1 + m_2}, \quad \zeta_0 = \frac{m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2}{m_1 + m_2}$$

setzen.

Die Richtung der Zentrallinie C bestimmen wir durch ihre Richtungskosinusse oder noch besser durch drei homogene Parameter:

$$(12) \qquad a, b, c,$$

die diesen Richtungskosinussen proportional sind. Die Gleichung der Ebene π in laufenden Koordinaten ξ, η, ζ ist dann:

$$(13) \qquad a(\xi - \xi_0) + b(\eta - \eta_0) + c(\zeta - \zeta_0) = 0.$$

Sind ferner:

$$(14) \qquad \bar{p}_1 = (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1); \quad \bar{p}_2 = (\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\zeta}_2)$$

die Mittelpunkte der Strecken $\overline{p_1 p_1'}$, $\overline{p_2 p_2'}$, so können wir mittelst zweier Parameter u_1, u_2 die Koordinaten der beiden Punkte (14) in der Form:

$$(15) \quad \begin{cases} (15a) & \bar{\xi}_1 = \xi_1 + u_1 a, \quad \bar{\eta}_1 = \eta_1 + u_1 b, \quad \bar{\zeta}_1 = \zeta_1 + u_1 c, \\ (15b) & \bar{\xi}_2 = \xi_2 + u_2 a, \quad \bar{\eta}_2 = \eta_2 + u_2 b, \quad \bar{\zeta}_2 = \zeta_2 + u_2 c, \end{cases}$$

und daher die Koordinaten der beiden Punkte (9) in der Form:

$$(16) \quad \begin{cases} (16a) & \xi_1' = \xi_1 + 2u_1 a, \ \eta_1' = \eta_1 + 2u_1 b, \ \zeta_1' = \zeta_1 + 2u_1 c, \\ (16b) & \xi_2' = \xi_2 + 2u_2 a, \ \eta_2' = \eta_2 + 2u_2 b, \ \zeta_2' = \zeta_2 + 2u_2 c \end{cases}$$

darstellen.

Die beiden Punkte (14) müssen offenbar in der Ebene π liegen; also müssen sowohl die Koordinaten (15a) als auch (15b) der Gleichung (13) genügen, und wir erhalten daraus, wenn wir noch die Gleichungen (11) berücksichtigen, zwei lineare Gleichungen mit je einer Unbekannten u_1, u_2, und es folgt:

$$(17)\quad \begin{cases} (17\,a)\quad u_1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ (17\,b)\quad u_2 = +\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Demnach ergeben sich, wenn wir die Werte (17) in (16) einsetzen, die Gleichungen[1]):

$$(18)\quad \begin{cases} (18\,a)\quad \begin{cases} \xi_1' = \xi_1 - \dfrac{2am_2}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ \eta_1' = \eta_1 - \dfrac{2bm_2}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ \zeta_1' = \zeta_1 - \dfrac{2cm_2}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \end{cases} \\ (18\,b)\quad \begin{cases} \xi_2' = \xi_2 + \dfrac{2am_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ \eta_2' = \eta_2 + \dfrac{2bm_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ \zeta_2' = \zeta_2 + \dfrac{2cm_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{a(\xi_1-\xi_2)+b(\eta_1-\eta_2)+c(\zeta_1-\zeta_2)}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Zur Abkürzung führen wir noch die Größen:

$$(19)\quad \alpha = \frac{a}{a^2+b^2+c^2},\quad \beta = \frac{b}{a^2+b^2+c^2},\quad \gamma = \frac{c}{a^2+b^2+c^2}$$

und:

$$(20)\qquad \mu_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2},\quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

ein; es ist dann:

$$(21)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$$

und:

$$(22)\qquad \mu_1 + \mu_2 = 1,$$

und die Gleichungen (18) werden:

---

1) J. Stefan, Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase, Sitzungsber. Akad. (math.-nat.) Wien 65 (2). p. 323—363, 351. 1872; L. Boltzmann, Zur Theorie der Gasdiffusion (I.), Sitzungsber. Akad. (math.-nat.) Wien 86 (2). p. 63—99, 71. 1882 = Wissenschaftliche Abhandlungen, III. Band, Leipzig 1909, p. 3—37, p. 10. Für den Sonderfall $m_1 = m_2$: L. Boltzmann, Zur Theorie der Gasreibung I., Sitzungsber. Akad. (math.-nat.) Wien 81 (2). p. 117—158, 154. 1880 = Wissenschaftliche Abhandlugen, II. Band, Leipzig 1909, p. 388—430, p. 425; D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien, herausgegeben von O. Blumenthal, Heft 3), Leipzig und Berlin 1912, p. 269.

$$(23)\quad \begin{cases} (23\,a)\begin{cases} \xi_1' = \xi_1 - 2a\mu_2\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}, \\ \eta_1' = \eta_1 - 2b\mu_2\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}, \\ \zeta_1' = \zeta_1 - 2c\mu_2\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}, \end{cases} \\ (23\,b)\begin{cases} \xi_2' = \xi_2 + 2a\mu_1\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}, \\ \eta_2' = \eta_2 + 2b\mu_1\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}, \\ \zeta_2' = \zeta_2 + 2c\mu_1\{\alpha(\xi_1-\xi_2)+\beta(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\zeta_1-\zeta_2)\}. \end{cases} \end{cases}$$

§ 3. Aus den Gleichungen (23) erhalten wir jetzt für die *Funktionaldeterminante* (3):

$$(24)\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1-2a\mu_2\alpha & -2a\mu_2\beta & -2a\mu_2\gamma & +2a\mu_2\alpha \\ & & +2a\mu_2\beta & +2a\mu_2\gamma \\ -2b\mu_2\alpha & 1-2b\mu_2\beta & -2b\mu_2\gamma & +2b\mu_2\alpha \\ & & +2b\mu_2\beta & +2b\mu_2\gamma \\ -2c\mu_2\alpha & -2c\mu_2\beta & 1-2c\mu_2\gamma & +2c\mu_2\alpha \\ & & +2c\mu_2\beta & +2c\mu_2\gamma \\ +2a\mu_1\alpha & +2a\mu_1\beta & +2a\mu_1\gamma & 1-2a\mu_1\alpha \\ & & -2a\mu_1\beta & -2a\mu_1\gamma \\ +2b\mu_1\alpha & +2b\mu_1\beta & +2b\mu_1\gamma & -2b\mu_1\alpha \\ & & 1-2b\mu_1\beta & -2b\mu_1\gamma \\ +2c\mu_1\alpha & +2c\mu_1\beta & +2c\mu_1\gamma & -2c\mu_1\alpha \\ & & -2c\mu_1\beta & 1-2c\mu_1\gamma \end{vmatrix}$$

Addieren wir in dieser Determinante (24) die vierte Spalte zur ersten, die fünfte Spalte zur zweiten und die sechste Spalte zur dritten, so bekommen wir:

$$(25)\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +2a\mu_2\alpha & +2a\mu_2\beta & +2a\mu_2\gamma \\ 0 & 1 & 0 & +2b\mu_2\alpha & +2b\mu_2\beta & +2b\mu_2\gamma \\ 0 & 0 & 1 & +2c\mu_2\alpha & +2c\mu_2\beta & +2c\mu_2\gamma \\ 1 & 0 & 0 & 1-2a\mu_1\alpha & -2a\mu_1\beta & -2a\mu_1\gamma \\ 0 & 1 & 0 & -2b\mu_1\alpha & 1-2b\mu_1\beta & -2b\mu_1\gamma \\ 0 & 0 & 1 & -2c\mu_1\alpha & -2c\mu_1\beta & 1-2c\mu_1\gamma \end{vmatrix}$$

Die Determinante (25) vereinfachen wir weiter, indem wir von der vierten Zeile die erste, von der fünften Zeile die zweite und von der sechsten Zeile die dritte subtrahieren; dann wird wegen (22):

$$(26)\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +2a\mu_3\alpha & +2a\mu_3\beta & +2a\mu_3\gamma \\ 0 & 1 & 0 & +2b\mu_3\alpha & +2b\mu_3\beta & +2b\mu_3\gamma \\ 0 & 0 & 1 & +2c\mu_3\alpha & +2c\mu_3\beta & +2c\mu_3\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a\alpha & -2a\beta & -2a\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -2b\alpha & 1-2b\beta & -2b\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -2c\alpha & -2c\beta & 1-2c\gamma \end{vmatrix}$$

oder:

$$(27)\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} 1-2a\alpha & -2a\beta & -2a\gamma \\ -2b\alpha & 1-2b\beta & -2b\gamma \\ -2c\alpha & -2c\beta & 1-2c\gamma \end{vmatrix}$$

Durch Ausrechnung dieser dreireihigen Determinante (27) erhält man:

$$(28)\quad \Delta \equiv 1-2(a\alpha+b\beta+c\gamma),$$

oder schließlich wegen (21):

$$(29)\quad \Delta \equiv -1,$$

und der absolute Wert wird:

$$(30)\quad |\Delta| \equiv 1.$$

§ 4. Dieses Resultat läßt eine einfache geometrische Deutung zu, wenn wir jedes Wertesystem (1) oder (2) als die *sechs Koordinaten eines Punktes in einem linearen sechsdimensionalen Raum* R_6 auffassen; bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung o und den Achsen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$. Dem Wertesystem (1) entspricht dann ein Punkt:

$$(31)\quad p = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

und dem Wertesystem (2) ein Punkt:

$$(32)\quad p' = (\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2', \zeta_2')$$

im R_6, und die Gleichungen (18) [oder (23)] ordnen jedem Punkte (31) des R_6 einen bestimmten Punkt (32) zu. Da diese *Abbildung* der Punkte p auf die Punkte p' durch eine *lineare homogene Transformation* (18) vermittelt wird, so ist sie eine *Affinität* im R_6, die den Ursprung o in Ruhe läßt. Für alle in Ruhe bleibenden Punkte p (also für jene, die mit ihren entsprechenden Punkten p' zusammenfallen), müssen die Gleichungen:

$$(33)\quad \xi_1' = \xi_1,\ \eta_1' = \eta_1,\ \zeta_1' = \zeta_1,\ \xi_2' = \xi_2,\ \eta_2' = \eta_2,\ \zeta_2' = \zeta_2$$

bestehen, die nach (18) dann und nur dann erfüllt sind, wenn die Gleichung:

$$a(\xi_1 - \xi_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2) = 0 \tag{34}$$

gilt. Diese Gleichung (34) stellt einen durch o gehenden linearen fünfdimensionalen Raum — den *Affinitäts-*R_5 — dar als den Ort aller der ∞^5 Punkte (31), die durch die Affinität (18) ungeändert bleiben.

Ferner folgt aus den Gleichungen (18):

$$\frac{\xi_1' - \xi_1}{-a m_2} = \frac{\eta_1' - \eta_1}{-b m_2} = \frac{\zeta_1' - \zeta_1}{-c m_2} = \frac{\xi_2' - \xi_2}{a m_1} = \frac{\eta_2' - \eta_2}{b m_1} = \frac{\zeta_2' - \zeta_2}{c m_1}, \tag{35}$$

und daraus erkennen wir, daß alle Geraden $p\,p'$ des R_6, die die Punkte (31) mit den ihnen entsprechenden Punkten (32) verbinden, untereinander parallel sind; die sechs Richtungskosinusse dieser als *Affinitätsstrahlen* zu bezeichnenden Geraden sind den sechs Größen:

$$-a m_2,\ -b m_2,\ -c m_2,\ a m_1,\ b m_1,\ c m_1 \tag{36}$$

proportional.

Schließlich hat der Halbierungspunkt:

$$\bar{p} = (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\zeta}_2) \tag{37}$$

der Strecke $\overline{p\,p'}$ die Koordinaten:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = \dfrac{\xi_1 + \xi_1'}{2},\ \bar{\eta}_1 = \dfrac{\eta_1 + \eta_1'}{2},\ \bar{\zeta}_1 = \dfrac{\zeta_1 + \zeta_1'}{2}, \\ \bar{\xi}_2 = \dfrac{\xi_2 + \xi_2'}{2},\ \bar{\eta}_2 = \dfrac{\eta_2 + \eta_2'}{2},\ \bar{\zeta}_2 = \dfrac{\zeta_2 + \zeta_2'}{2}, \end{cases} \tag{38}$$

und das sind die Werte (15), wenn wir den Größen u_1, u_2 die Werte (17) geben. Wir haben dann:

$$\begin{cases} a(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) + b(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) + c(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2) = \\ = a(\xi_1 - \xi_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2) + (u_1 - u_2)(a^2 + b^2 + c^2) = \\ = a(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2) \\ \quad - [a(\xi_1 - \xi_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2)] = 0, \end{cases} \tag{39}$$

d. h. alle Halbierungspunkte (37) liegen im Affinitäts-R_5 (34).

Aus den beiden Tatsachen, daß alle Strecken $\overline{p\,p'}$ untereinander parallel sind und ihre Halbierungspunkte $\bar{p}$ einen

linearen fünfdimensionalen Raum erfüllen, folgt aber, daß die Affinität (18) eine *schiefe Symmetrie* in bezug auf den Affinitäts-R_5 (34) ist. Jede solche schiefe Symmetrie ist aber *uneigentlich volumtreu*, d. h. sie führt jedes sechsdimensionale Volumen V, das aus Punkten p gebildet ist, in ein sechsdimensionales, aus den entsprechenden Punkten p' gebildetes Volumen V' über, das gleiche Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat:

$$V' = -V. \tag{40}$$

Ist insbesondere $d\omega$ ein sechsdimensionales Volumelement des R_6, das bei der Transformation (18) in $d\omega'$ übergeht, so ist daher auch:

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = -1. \tag{41}$$

Andererseits wird aber das *Vergrößerungsverhältnis* $d\omega' / d\omega$ durch die Funktionaldeterminante (3) dargestellt, d. h. es ist:

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \Delta \tag{42}$$

und aus (42) und (41) folgt wieder die Gleichung (29).

Die sechs Richtungskosinusse einer zum Affinitäts-R_5 (34) senkrechten Geraden sind proportional zu den sechs Größen:

$$a,\ b,\ c,\ -a,\ -b,\ -c. \tag{43}$$

Ist also ϑ der Winkel zwischen dem Affinitäts-R_5 und den Affinitätsstrahlen, deren Richtungskosinusse den Zahlen (36) proportional sind, so haben wir:

$$\sin\vartheta = \frac{\begin{array}{r} a(-am_2) + b(-bm_2) + c(-cm_2) + (-a)am_1 \\ + (-b)bm_1 + (-c)cm_1 \end{array}}{\begin{array}{l} \mp\sqrt{a^2+b^2+c^2+(-a)^2+(-b)^2+(-c)^2} \\ \cdot\sqrt{(-am_2)^2+(-bm_2)^2+(-cm_2)^2+(am_1)^2+(bm_1)^2+(cm_1)^2} \end{array}} \tag{44}$$

d. h.:

$$\sin\vartheta = \pm\frac{m_1+m_2}{\sqrt{2}\sqrt{m_1^2+m_2^2}}. \tag{45}$$

Dieser Winkel ϑ hängt nur von dem Massenverhältnis $m_2 : m_1$, aber nicht von der Richtung der Zentrallinie C ab; sind insbesondere die beiden Massen gleich:

(46) $$m_1 = m_2,$$

so wird nach (45) $\sin\vartheta = \pm 1$, also:

(47) $$\vartheta = \pm\frac{\pi}{2},$$

und die schiefe Symmetrie (18) geht in diesem Falle in eine *orthogonale* über, also in eine gewöhnliche *Spiegelung* an dem fünfdimensionalen Raume (84).

§ 5. L. Boltzmann[1]) hat eine geometrische Überlegung angestellt, die die Ausrechnung der Funktionaldeterminante (3), d. i. (24), ersetzen soll, die aber *unrichtig* ist. Jeder der beiden Punkte p_1 und p_2 (vgl. Fig. 1) soll ein Volumelement $d\omega_1$ und $d\omega_2$ des dreidimensionalen Raumes durchlaufen, z. B. ein rechtwinkliges Parallelepiped $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$ und $d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$ mit achsenparallelen Kanten; es wird gefragt, in welchen Bereichen $d\omega_1'$ und $d\omega_2'$ sich dann die beiden Punkte p_1' und p_2' bewegen. Darüber sagt nun Boltzmann[2]): „Zunächst soll nebst der Richtung der Geraden C auch die Lage des Punktes p_1 unverändert bleiben und bloß der Punkt p_2 das gesamte Parallelepiped $d\omega_2$ bestreichen. Aus der vollkommenen Symmetrie der Figur folgt dann unmittelbar, daß p_2' ein kongruentes Parallelepiped $d\omega_2'$ beschreibt, welches das Spiegelbild von $d\omega_2$ ist. Ebenso beschreibt, sobald der Punkt p_2 festgehalten wird und der Punkt p_1 das Parallelepiped $d\omega_1$ beschreibt, der Punkt p_1' ein mit $d\omega_1$ kongruentes Parallelepiped $d\omega_1'$ ... und es ist immer $d\omega_1\, d\omega_2 = d\omega_1'\, d\omega_2'$."

Dagegen ist zweierlei einzuwenden. *Erstens* sind die beiden Volumelemente $d\omega_2$ und $d\omega_2'$ *weder Spiegelbilder, noch kongruent, noch überhaupt inhaltsgleich*, weil sich mit dem Punkte p_2 auch die Ebene π bewegt, an welcher der Punkt p_2 gespiegelt wird; man kann auch nicht sagen, die beiden Volumelemente $d\omega_2$ und $d\omega_2'$ wären bis auf Größen höherer Ordnung einander gleich, weil die Verschiebungen der Ebene π im allgemeinen von gleicher Größenordnung sind wie die des

1) Vgl. Anm. 7 p. 153.

2) L. Boltzmann (vgl. Anm. 7 p. 153), p. 27. Die in dem Zitate enthaltenen Bezeichnungen sind mit unserer Figur in Übereinstimmung gebracht.

Punktes p_2. *Zweitens* aber ist das so konstruierte Volumelement $d\omega_2'$ *gar nicht das gesuchte.* Man hätte vielmehr für jede der ∞^3 Lagen des Punktes p_1 innerhalb des Volumelementes $d\omega_1$ in der angegebenen Weise das zugehörige Volumelement $d\omega_2'$ zu suchen; die ∞^3 Volumelemente, die man so erhält, überlagern sich teilweise und füllen erst in ihrer Gesamtheit das gesuchte Volumelement $d\omega_2'$ aus. Analoges gilt bezüglich $d\omega_1'$.

Wien, 19. Juni 1917.

(Eingegangen 23. Juni 1917.)

4. *Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation; von S. Oppenheim.*

Herr Prof. Gehrke hat in dieser Zeitschrift, Bd. 52. p. 415, 1917, einen Neudruck der Abhandlung von P. Gerber veranlaßt, in welcher es diesem gelang durch Aufstellung einer Beziehung zwischen der Lichtgeschwindigkeit und der Gravitation die anomale Perihelbewegung des Merkur quantitativ voll zu erklären. Er selbst macht hierzu die Bemerkung: ob und inwieweit sich die Theorie Gerbers mit den bekannten elektromagnetischen Grundgleichungen zu einer einheitlichen Theorie verschmelzen lasse, ist eine schwierige Frage, die noch der Lösung harrt.

Es sei nun auch mir gestattet, auf diese Untersuchung Gerbers nochmals zurückzukommen, durch Wiederabdruck einer von mir im Jahre 1903 an ihr geübten Kritik. Sie erschien als eine Programmabhandlnng unter dem Titel: „Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes" (Programm der K. K. deutschen Staatsrealschule in Karolinenthal-Prag, 1903) und lautet wörtlich wie folgt:

§ 31: Die Analogie, welche zwischen dem Newtonschen und dem Coulombschen Gesetze der Anziehung zweier elektrischer oder magnetischer Teilchen besteht, führt zu einer dritten Art, den Einfluß der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation auf die Bewegung der Planeten zu untersuchen. Nach der älteren elektrodynamischen Theorie kann man nämlich das Webersche oder Riemannsche Gesetz der Wechselwirkung zweier bewegter elektrischer Teilchen als eine Erweiterung des Coulombschen Gesetzes betrachten, die dahin zielt, die elektrodynamischen Kräfte aus der nicht instantanen, sondern in ähnlicher Weise wie beim Lichte mit der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung der statischen Elektrizität abzuleiten. Es liegt dieser Anschauung bekanntlich ein Ge-

danke zugrunde, den zuerst Gauß[1]) ausgesprochen hat und Riemann[2]), sowie mit mehr Erfolg C. Neumann[3]) haben eine solche Ableitung versucht.

Die Voraussetzung, von der C. Neumann ausgeht, ist die, daß das Potential der gegenseitigen Anziehung zweier Teilchen (m_1 und m_2) das für ruhende Punkte durch $\varkappa^2 m_1 m_2 / r$ gegeben ist, einiger Zeit bedarf, um von m_1 zu m_2 zu gelangen und daher dort nicht zur Zeit t, sondern etwas später ankommt, ebenso wie das zur Zeit t in m_1 angekommene und von m_2 ausgesandte Potential von dort etwas früher ausging. Beiden Fällen entspricht eine Vergrößerung des Potentials im Verhältnis von $r : r - \Delta r$, wo Δr von der Zeitdifferenz abhängig ist, die das Potential zu seiner Fortpflanzung benötigt. Das Anziehungspotential ist daher

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r - \Delta r} = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r(1 - \Delta r/r)}$$

und stimmt nach gehöriger Entwicklung, durch die es in

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

(worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation oder der elektrischen Anziehung bedeutet) formal mit dem Weberschen Gesetz überein.

„Man kann, wie dies Gerber getan hat, die Rechnung C. Neumanns dadurch verallgemeinern, d. h. den Ausdruck für das Potential noch um eine zweite zu bestimmende Konstante erweitern, daß man

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)^\lambda}$$

1) Gauß Werke. Bd. 5. p. 627. Nachlaß: „Aus einem Briefe von Gauß an W. Weber" aus dem Jahre 1845.

2) B. Riemann, „Ein Beitrag zur Elektrodynamik" in den Ges. Abh. 1858.

3) C. Neumann, „Prinzipien der Elektrodynamik". Festschrift zum Jubiläum der Universität in Bonn. 1868. Siehe auch die Kritik von Clausius „Über die von Gauß angeregte neue Auffassung der elektrodynamischen Erscheinungen", Ann. d. Phys. 135. 1868; ferner C. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig 1896. Besonders Kap. VIII „über das Hamiltonsche Prinzip und das effektive Potential".

setzt. Man erhält so (die Rechnung ganz im Sinne C. Neumanns durchführend)

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

als ein neues, dem Weberschen Gesetze analoges Fernkraftgesetz, das zwei Konstanten enthält, die sich den Beobachtungen anpassen können. Die Berechnung der Bewegung der Planeten unter der Annahme, daß an Stelle des Newtonschen Gesetzes dieses erweiterte tritt, führt zu dem Resultate, daß säkularen Störungen die Länge des Perihels sowie die mittlere Länge unterworfen sind, daß aber bloß die erstere ausschlaggebend ist, indem die letztere das Quadrat der Exzentrizität als Faktor erhält und daher wegen der Kleinheit dieser stets unmerklich bleibt. Die säkulare Störung in der Länge des Perihels ist

$$\Delta\pi = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n^2 a^2}{c^2}$$

(worin n die mittlere tägliche Bewegung und a die Bahnachse des Planeten bedeuten) und muß, soll sie die Anomalie in der Bewegung des Merkur beseitigen, die Gleichung

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n^2 a^2}{c^2} = 41{,}25''$$

erfüllen. Die aus dem Weberschen Gesetze allein ($\lambda = 1$) resultierende Perihelstörung unter der Annahme, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, c, identisch ist mit der des Lichtes (300000 km/sek) beträgt 13,65″. Es bleibt daher für λ die Gleichung

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2} = \frac{41{,}25}{13{,}65} = 3$$

aus der die zwei Werte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$ folgen. Wie man sieht, läßt sich unter der Annahme, daß das Potential der anziehenden Kraft zweier bewegter Teilchen durch den Ausdruck

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

gegeben ist, indem c als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation identisch angenommen werden kann mit der des Lichtes, der Widerspruch in der Bewegungstheorie des Planeten Merkur vollständig lösen. Auch für die anderen

Planeten folgen, wie die nachstehenden Zahlen es zeigen, Differenzen, die noch, etwa den Planeten Venus ausgenommen, innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler liegen:

Planet	Merkur	$\Delta\pi = 13{,}65''$ für $\lambda = 1$,	$\Delta\pi = 40{,}95''$ für $\lambda = 2$
„	Venus	2,86	8,58
„	Erde	1,27	3,81
„	Mars	0,44	1,32
„	Jupiter	0,02	0,06

„Das Grundgesetz, welches Riemann für das Webersche substituiert, lautet:

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 - \left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right].$$

Auch unter Zugrundelegung dieses ergibt sich für die Bewegung der Planeten um die Sonne nur eine Störung, die merklich werden kann, nämlich in der Länge des Perihels. Dieselbe ist doppelt so groß als die aus dem Weberschen sich ergebende, so daß, wenn man nach einem Vorschlag von Lévy[1]) beide unter Einführung einer erst zu bestimmenden Konstante λ zu einem vereinigt in der Form:

$$P = P_{\text{Weber}} + \lambda(P_{\text{Riemann}} - P_{\text{Weber}}),$$

d. h.

$$P = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}$$
$$\left[1 - \frac{1}{c^2}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \lambda\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}\right]$$

man eine Perihelstörung von der Größe

$$13{,}65'' + \lambda(27{,}30'' - 13{,}65'') = 13{,}65(1+\lambda)$$

erhält. Soll sie gleich sein 41,25", so wird $\lambda = 2$ und die Gesetze

$$P_1 = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right],$$

ebenso wie

$$P_2 = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{r}\left[1 + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

1) Lévy, Sur l'application des lois électrodynamiques au mouvement des planètes. Compt. rend. Paris 1890.

beseitigen, das Newtonsche Gesetz substituierend, mindestens eine der bisher in den Bewegungen der Planeten konstatierten Unregelmäßigkeiten, die im Perihel des Merkur, unter der gewiß einfachen Annahme, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation der des Lichtes an Größe gleich ist, ohne gar zu große Schwierigkeiten in den Bewegungen der anderen Planeten hervorzurufen. Es muß jedoch hervorgehoben werden, daß dieses einzige Ergebnis, so zutreffend es sein mag, nicht genügt, um die volle Substitution des Newtonschen Gesetzes durch eines P_1 oder P_2 nach allen Richtungen hin zu rechtfertigen. Zunächst bleibt nämlich, wie man sich leicht überzeugen kann, die Schwierigkeit bestehen, die nach von Seeliger in der Ausdehnung ihrer Gültigkeit auf den unendlichen Raum liegt, andererseits müßte auch noch die Bewegung sehr sonnennaher Kometen untersucht werden, hauptsächlich was periodische Störungen anlangt, um eine endgültige Entscheidung zu treffen."

Man sieht, daß die Aufgabe, die sich P. Gerber stellte, im wesentlichen nur darin bestand, einen physikalisch plausiblen Grund für die Verallgemeinerung des einfachen C. Neumannschen Ansatzes für das retardierte Potential

$$P = \frac{x^2 m_1 m_2}{r\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)}$$

in

$$P = \frac{x^2 m_1 m_2}{r\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

(siehe p. 18 seiner Programmabhandlung) zu finden. Inwieweit die Begründung, wie er sie durchführt, stichhaltig ist und die Physiker befriedigt, darüber enthalte ich mich jeder Entscheidung.

Nur eine Bemerkung sei mir noch gestattet. Sie zielt dahin, daß die beiden eben erwähnten Ausdrücke P_1 (nach Gerber) und P_2 (nach Lévy) die Zahl der von Wiechert in seiner Mitteilung „Perihelbewegung des Merkur und allgemeine Mechanik", Götting. Nachr. 1916, p. 125, aufgestellten Gesetze, die geeignet sind, das Newtonsche Gesetz soweit zu verallgemeinern, daß dadurch die anomale Perihelbewegung

des Merkur erklärt wird, um zwei vergrößern, wenn auch das Prinzip der Erweiterung in beiden Fällen ein anderes ist. Hier das Prinzip der Relativität von Raum und Zeit — bei Gerber und Lévy aber das der Retardation des Potentials im Sinne einer Art von Aberration, bei der aber die Glieder erster Ordnung in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation wegfallen, weil sie nichts zum effektiven Potential beitragen.

(Eingegangen 16. Juni 1917.)

5. *Elektrische Doppelbrechung in binären Flüssigkeitsgemischen;* *von C. Bergholm.*

Experimentelle Untersuchungen über die elektrische Doppelbrechung in binären Flüssigkeitsgemischen sind ausgeführt von Schmidt[1]) und Lippmann.[2]) Schmidt fand, daß die elektro-optische Konstante für Mischungen von Schwefelkohlenstoff mit Benzol, Chloroform und Nitrobenzol aus keinem einfach übersichtlichen Gesetze abzuleiten ist. Lippmanns gesamte Untersuchung erstreckt sich auf über 90 verschiedene Substanzen, die in etwa 600 verschiedenen Lösungen und Mischungen in Benzol untersucht wurden. Aus den Untersuchungen wird geschlossen, daß die elektrische Doppelbrechung eine additive Größe ist, wenn der Prozentgehalt in Mol ausgedrückt wird. Dieser Satz scheint aber nicht für alle Substanzen zu gelten. Die erste Ausnahme bilden einige Substanzen mit negativer Kerrkonstante. Die Wertepunkte für Anilin, Toluidin-ortho, Kresol-para u. a. zeigen einen Anstieg bis zu einem höchsten Punkt, dann aber eine ständige Abnahme. Die Erklärung der Erreichung des Maximums erblickt Lippmann in der Bildung von Molekülkomplexen. Die zweite Ausnahme dieses Satzes findet man bei den Mischungen von Substanzen mit hohen elektro-optischen Konstanten. Die Mehrzahl der untersuchten Substanzen besitzen jedoch ein großes elektrisches Doppelbrechungsvermögen. — Lippmann[3]) schreibt: „Den Prozentgehalt nach Volumen zu berechnen, lohnte nicht, da bestehende Gesetzmäßigkeiten bei Mischungen deutlich zu erkennen waren, wenn der Prozentgehalt der Mischungen in Mol angegeben war, aber verschleiert oder überhaupt nicht ersichtlich waren, wenn der Prozentgehalt nach Volumen angeführt war.“ Der Theorie

1) W. Schmidt, Ann. d. Phys. 7. p. 171. 1902.

2) A. Lippmann, Elektrische Doppelbrechung in Flüssigkeiten, Dissert. Leipzig 1912.

3) A. Lippmann, l. c. p. 49.

nach kann man erwarten, daß die Gesetzmäßigkeiten der elektrischen Doppelbrechung der Mischungen hervortreten, wenn der Prozentgehalt nach Volumen angegeben ist. Ich habe daher aus Lippmanns Tabellen den Prozentgehalt nach Volumen umgerechnet und die Werte in ein Koordinatensystem eingetragen. Die Abszisse gab den Prozentgehalt, der Ordinate den Wert (B) der elektro-optischen Konstante der Mischung an. Aus den erhaltenen Kurven geht folgendes hervor: Bei den Benzolmischungen von Substanzen mit hohen positiven elektro-optischen Konstanten und hohen Dielektrizitätskonstanten (K) liegen die Wertepunkte an einer Kurve, konvex gegen die Abszissenachse. Die Doppelbrechung ist daher kleiner als nach der Additivregel. Bei den Benzolmischungen von Substanzen mit kleinen negativen Kerrkonstanten und hohen Dielektrizitätskonstanten tritt die Erscheinung des Ansteigens von (B) bis zu einem Maximum deutlich zutage. Das Maximum erhält man für große Werte der Benzolkonzentration.

Aus den Untersuchungen[1]) über den Temperaturkoeffizienten der elektrischen Doppelbrechung in Flüssigkeiten geht hervor, daß das elektrische Doppelbrechungsvermögen (B) in hohem Grade von der Dielektrizitätskonstante (K), dem Brechungsindex (n) und der Dichte (d) abhängt. Der Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstante und der elektrischen Doppelbrechung wird klar, wenn man mit Cotton und Mouton annimmt, daß die elektrische Doppelbrechung auf der Orientierung der unsymmetrischen Moleküle im elektrischen Felde beruht. Die Kraft, die auf die Moleküle einwirkt ist nicht die äußere elektrische Feldstärke (E), sondern die Feldintensität (E') im Innern der Flüssigkeit.

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} P = \frac{K+2}{3} E.$$

P ist die Polarisation des Dielektrikums.

Die Phasendifferenz (Δ) wächst mit dem Quadrate der Feldstärke (E) und der Länge (l) der durchgestrahlten Schicht.

$$\Delta = B l E^2 = 9 B l \frac{E'^2}{(K+2)^2} = B' l E'^2.$$

$$B = \frac{(K+2)^2}{9} \cdot B'.$$

1) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 51. p. 414. 1916.

Die Kerrsche Konstante (B) wächst also proportional $(K+2)^2$.

Mischt man eine aktive Flüssigkeit mit einer inaktiven Flüssigkeit, wird die Eigenschaft der aktiven Moleküle nicht verändert. Die Kraft, die auf diese einwirkt, weicht von der für die reine Substanz gefundenen mehr oder minder ab. Es ist daher wahrscheinlich, daß die Doppelbrechung einer Mischung in keinem einfachen Verhältnisse zur Anzahl aktiver Moleküle per Volumeneinheit wächst.

Ist (B) die Kerrsche Konstante, (n) der Brechungsindex, (K) die Dielektrizitätskonstante der Mischung zweier Substanzen 1 und 2, deren Kerrschen Konstanten B_1 und B_2, deren Brechungsexponenten n_1 und n_2, deren Dielektrizitätskonstanten K_1 und K_2 sind, so erhalte ich mit Hilfe Langevins Orientierungstheorie folgenden Ausdruck:[1])

$$\frac{Bn}{(K+2)^2(n^2+2)^2} = \frac{n_1 B_1}{(K_1+2)^2(n_1^2+2)^2} \cdot \frac{V_1}{V_1+V_2} + \frac{n_2 \cdot B_2}{(K_2+2)^2(n_2^2+2)^2} \cdot \frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

V_1 und V_2 sind die Volumina der Bestandteile.

Mit Hilfe dieser Formel kann man die genannten Eigentümlichkeiten der elektrischen Doppelbrechung in binären Flüssigkeitsgemischen qualitativ leicht erklären. Ist B_1 sehr groß im Verhältnis zu B_2 und $K_1 > K_2$, kann man die Formel approximativ schreiben,

$$B = \frac{(K+2)^2}{(K_1+2)^2} \cdot B_1 \frac{V_1}{V_1+V_2}.$$

Da $K_1 > K_2$, wird im allgemeinen $K < K_1$, also ist

$$B < B_1 \frac{V_1}{V_1+V_2}.$$

Die Doppelbrechung dieser Mischung ist kleiner als nach der Additivregel. Ist der absolute Wert von B_1 nicht zu groß, und K_1 groß im Verhältnis zu K_2, erhält man die approximative Formel

$$B = \frac{(K+2)^2}{(K_2+2)^2} B_2 \frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

1) C. Bergholm, Arkiv f. Mat., Astr. och Fysik, Vet. Akad. Stockholm, 12, Nr. 3. 1917.

Da nun $K > K_2$, kann (B) für große Werte von $V_2/V_1 + V_2$ größer als B_2 werden. Das Maximum, das Lippmann für Mischungen von Benzol mit Toluidin-ortho, Anilin, Chlorphenol-para u. a. erhält, kann mit Hilfe der Mischungsformel erklärt werden. Die Erklärung der Erreichung des Maximums durch Bildung von Molekülkomplexen ist also überflüssig.

Messungen.

Um die aufgestellte Mischungsformel quantitativ zu prüfen, habe ich für binäre Mischungen einiger Substanzen die elektrische Doppelbrechung, die Dielektrizitätskonstante und den Brechungsindex experimentell bestimmt. Die Untersuchung der elektrischen Doppelbrechung dieser Arbeit ist vorgenommen mit Hilfe derselben optischen und elektrischen Apparatur, mit welcher ich den Temperaturkoeffizienten der elektrischen Doppelbrechung untersuchte. Die verwendete Wellenlänge war 546 $\mu\mu$. Die kleinen Temperaturschwankungen der Meßzelle um die Mitteltemperatur (15° C.) wurden abgelesen und ihr Einfluß auf der elektrischen Doppelbrechung eliminiert.

Der Brechungsindex der Mischungen wurde nach der Methode des Minimums der Ablenkung bestimmt. Das Prisma war ein massives Glasprisma mit breiten zylindrischen Kanal, dessen Enden durch zwei planparallele Glasplatten verschlossen waren. Als Lichtquelle benutze ich eine Quecksilberbogenlampe. Die Einstellungen wurden für die grüne Hg-Linie gemacht.

Die Dielektrizitätskonstanten wurden nach der Methode Nernsts gemessen. Die Eichflüssigkeit war Xylol-meta ($K = 2{,}37$). Das Leitvermögen der Flüssigkeiten war sehr klein, und das Tonminimum daher immer gut.

Die Herstellung der Mischungen wurde in folgender Weise ausgeführt. Das Gewicht eines Meßkölbchens, dessen Inhalt nach Kubikzentimetern bei 15° C. 50 ccm ist, wird bestimmt. Nachher wird das Kölbchen bis an die Marke der Reihe nach mit den Flüssigkeiten 1 und 2 der Mischung gefüllt und gewogen. Die Gewichte der Flüssigkeiten sind Q_1 und Q_2. Eine gewisse Menge P_1 Gramm der Flüssigkeit 1 wird abgewogen, durch Zufügen von P_2 Gramm der Flüssigkeit 2 wird das

Kölbchen bis zur Marke ausgefüllt. Die Prozentgehalte nach Volumen sind:

$$\frac{P_1}{Q_1} \quad \text{und} \quad \frac{P_2}{Q_2}.$$

Die Mischungen erfolgen ohne Änderung der Volumina, wenn

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = 1.$$

Die Ergebnisse der Messungen gehen aus den Tabellen und Kurven hervor. In der ersten Spalte steht der Prozentgehalt, in der zweiten der Brechungsindex (n), in der dritten die Dielektrizitätskonstante (K), in der vierten die experimentell gefundene Kerrkonstante ($B_{exp.}$), in der fünften die nach der Mischungsformel berechnete Kerrkonstante ($B_{ber.}$), in der sechsten die additive Kerrkonstante, die nach der Formel

$$B_{add.} = B_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2} + B_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2}$$

berechnet ist, in der siebenten Spalte das arithmetische Mittel der beiden Konstanten $B_{ber.}$ und $B_{add.}$

In den beiden mitgeteilten Diagrammen habe ich die experimentell gefundenen Werte der Kerrkonstante ($B_{exp.}$) durch Kreise angegeben. Die zusammenhängende Kurve ist nach der Mischungsformel berechnet und die punktierte gerade Linie gibt die nach der Additivregel berechnete Kerrkonstante ($B_{add.}$) an.

Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Xylol-meta.

Prozentgehalt nach Volumen an Xylol-meta	n	K	$B_{exp.}$	$B_{ber.}$	$B_{add.}$	$\frac{B_{ber.} + B_{add.}}{2}$
0	1,63	2,61	25,4	(25,4)	(25,4)	(25,4)
39,7	1,58	2,54	17,0	17,0	17,7	17,35
51,5	1,56	2,50	14,6	14,6	15,4	15,0
58,6	1,55	2,48	13,3	13,2	14,0	13,6
100,0	1,50	2,37	5,92	(5,92)	(5,92)	(5,92)

Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Kohlenstofftetrachlorid

Prozentgehalt nach Volumen an CCl_4	n	K	$B_{exp.}$	$B_{ber.}$	$B_{add.}$	$\frac{B_{ber.} + B_{add.}}{2}$
0	1,63	2,61	25,4	(25,4)	(25,4)	(25,4)
31,1	1,56	2,46	16,7	15,9	17,7	16,8
38,9	1,54	2,43	14,9	13,9	15,9	14,9
62,4	1,52	2,38	9,12	8,31	9,97	9,14
100,0	1,45	2,21	0,67	(0,67)	(0,67)	(0,67)

Mischungen von Chlorbenzol und Kohlenstofftetrachlorid.

Prozentgehalt nach Volumen an C_6H_5Cl	n	K	$B_{exp.}$	$B_{ber.}$	$B_{add.}$	$\frac{B_{ber.}+B_{add.}}{2}$
0	1,45	2,21	0,67	(0,67)	(0,67)	(0,67)
15,2	1,477	2,72	10,4	5,7	15,2	10,4
20,0	1,480	2,91	13,9	7,8	19,7	13,8
32,2	1,489	3,35	23,0	14,2	31,4	22,8
100,0	1,53	5,98	96,0	(96,0)	(96,0)	(96,0)

Mischungen von CS_2 und $CHCl_3$.

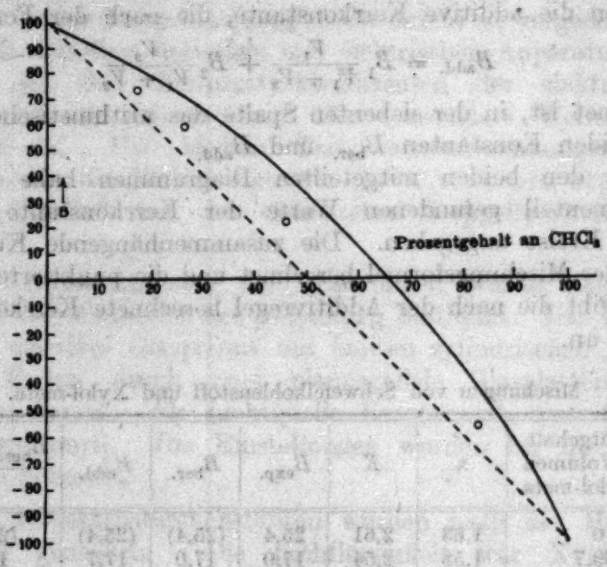


Fig. 1.

Mischungen von Chlorbenzol und Xylol-meta.

Prozentgehalt nach Volumen an C_6H_5Cl	n	K	$B_{exp.}$	$B_{ber.}$	$B_{add.}$	$\frac{B_{ber.}+B_{add.}}{2}$
0	1,50	2,37	5,92	(5,92)	(5,92)	(5,92)
20,2	1,51	3,18	19,7	15,2	24,1	19,6
39,5	1,51	3,76	34,0	26,0	41,6	33,8
100,0	1,53	5,98	96,0	(96,0)	(96,0)	(96,0)

Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Chloroform (nach Schmidt)

Prozentgehalt nach Volumen an $CHCl_3$	n	K	$B_{exp.}$	$B_{ber.}$	$B_{add.}$	$\frac{B_{ber.}+B_{add.}}{2}$
0	1,63	2,7	+ 100	(+100)	(+100)	(+ 100)
17,4	1,60	3,0	+ 73	+81,4	+65,2	+ 73,3
26,4	1,58	3,2	+ 59	+70,5	+47,2	+ 59,0
45,8	1,55	3,5	+ 22	+39,8	+ 8,4	+ 24,1
82,6	1,48	4,5	− 56	−41,5	− 65,2	− 54,0
100,0	1,45	5,1	− 100	(−100)	(− 100)	(− 100)

Mischungen von CS_2 und CCl_4.

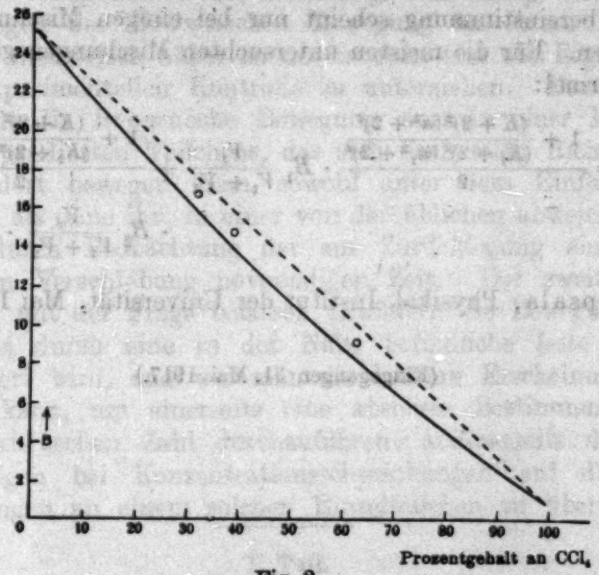


Fig. 2.

Die Werte der Dielektrizitätskonstanten für Mischung von Schwefelkohlenstoff und Chloroform sind den Untersuchungen Dobrosedows[1]) entnommen.

Wenn man den Prozentgehalt nach Volumen berechnet, gilt keinesfalls die Additivregel. Für Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Xylol-meta sind die nach der Mischungsformel berechneten Werte in quantitativer Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen Werte. Für

1) D. K. Dobrosedow, Journ. d. russ. Phys. chem. Ges. 44. p. 710. 1912.

die meisten untersuchten Mischungen gilt nicht die Mischungsformel. Der experimentell gefundene Wert der Kerrkonstante ist das arithmetische Mittel der nach der Mischungsformel berechnete Kerrkonstante und der, der nach der Additivregel berechnet wird.

Zusammenfassung.

Mit der Mischungsformel, die nach Langevins Theorie elektrischer Doppelbrechung berechnet wird, kann die Eigentümlichkeit der elektrischen Doppelbrechung in binären Flüssigkeitsgemischen qualtiativ erklärt werden. Quantitative Übereinstimmung scheint nur bei einigen Mischungen zu bestehen. Für die meisten untersuchten Mischungen gilt exakt die Formel:

$$B = \frac{1 + \frac{(K+2)^2(n^2+2)^2}{(K_1+2)^2(n_1^2+2)^2}}{2} \cdot B_1 \frac{V_1}{V_1+V_2} + \frac{1 + \frac{(K+2)^2(n^2+2)^2}{(K_2+2)^2(n_2^2+2)^2}}{2} \cdot B_2 \frac{V_2}{V_1+V_2} .$$

Upsala, Physikal. Institut der Universität, Mai 1917.

(Eingegangen 31. Mai 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Einige Untersuchungen über Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen;* von Reinhold Fürth.

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität Prag.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, einige Erscheinungen der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen theoretisch näher zu untersuchen und die Ergebnisse einer experimentellen Kontrolle zu unterziehen. Der 1. Teil behandelt die Brownsche Bewegung eines in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchens, das sich nach allen Richtungen ungehindert bewegen kann, sowohl unter dem Einfluß der Schwere als ohne ihn, in einer von der üblichen abweichenden Weise durch Beobachtung der zur Zurücklegung einer bestimmten Verschiebung notwendigen Zeit. Der zweite Teil soll sich mit der Frage befassen, inwiefern die Bewegung des Teilchens durch eine in der Nähe befindliche feste Wand modifiziert wird, und wie man die letztere Erscheinung benützen kann, um einerseits eine absolute Bestimmung der Loschmidtschen Zahl durchzuführen, andererseits die Erscheinungen bei Konzentrationsschwankungen auf die Beobachtungen an einem solchen Einzelteilchen zu übertragen.

I. Teil.

A. Theorie.

Wir betrachten ein in einer Flüssigkeit suspendiertes festes Teilchen, das durch die unregelmäßigen Stöße der Flüssigkeitsmoleküle einerseits, durch die konstante Wirkung der Schwere andererseits, in eine Bewegung versetzt wird, von der hier einige Eigentümlichkeiten näher auseinandergesetzt werden sollen. Das Prinzip dessen ich mich bedienen will, ist bereits an anderem Orte von M. v. Smoluchowski[1])

1) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124. p. 263. 1915; Phys. Zeitschr. 16. p. 319. 1915; Ann. d. Phys. 48. p. 1103. 1915; Bull. Acad. Cracowie p. 418. 1913.

angewandt worden. Anstatt nämlich die Zeitgesamtheit zu betrachten, welche die sukzessiven Lagen des Teilchens bei systematischer Beobachtung bilden, kann man eine virtuelle Gesamtheit konstruieren, so daß die relativen Häufigkeiten jeder einzelnen Lage in dieser Gesamtheit denselben Wert haben, als die relativen Verweilzeiten in den entsprechenden Lagen bei unserer Zeitgesamtheit, wie das in der statistischen Mechanik häufig gemacht wird.

Wir behandeln das Problem als nur von einer Koordinate x abhängig. Die Lage des Teilchens zur Zeit $t = 0$ sei x_0. Dann denke man sich statt dieses einen Systems eine große Anzahl analoger Systeme von gleich beschaffenen Teilchen, die sich alle zur Zeit $t = 0$ in der unendlich dünnen Schicht zwischen x_0 und $x_0 + dx$ aufhalten sollen. Die Wahrscheinlichkeit einer gewissen Lage $x_0 \ldots x_0 + dx$ unseres Teilchens zur Zeit t ist dann gegeben durch diejenige Anzahl der Teilchen der virtuellen Gesamtheit, die sich zur Zeit t im Koordinatenbereiche $x_0 \ldots x_0 + dx$ aufhalten. D. h. ich kann diese Wahrscheinlichkeit finden, indem ich die Methoden der Diffusionstheorie auf diese Gesamtheit anwende. Der Einfluß der Schwere äußert sich dabei offenbar darin, daß sich über diese Diffusion noch ein Niedersinken mit konstanter Geschwindigkeit superponiert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch das über die Quellen erstreckte Integral der Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung) mit Berücksichtigung einer Konvektion

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{1}$$

wobei D den Diffusionskoeffieienten, c die konstante Fallgeschwindigkeit durch die Schwere bedeutet. Obzwar die folgenden Entwicklungen bereits zum Teil von Smoluchowski (l. c.) angestellt wurden, will ich doch der Vollständigkeit halber auch diese hier kurz referieren.

Zunächst kann man die Lösung der Differentialgleichung (1) reduzieren auf die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

wenn

$$w = u\, e^{-\frac{c}{2D}(x - x_0) - \frac{c^2 t}{4D}} \tag{3}$$

gesetzt wird.

Um zunächst die Einstein-Smoluchowskische Formel für das mittlere Verschiebungsquadrat aus (1) abzuleiten, braucht man die Lösung der Diffusionsgleichung für den Fall eines unendlich ausgedehnten homogenen Mediums bei gegebener Anfangsverteilung. Diese ist aus der Theorie der Wärmeleitung bekannt und lautet

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4Dt}}\, d\alpha,$$

wobei $\Phi(\alpha)$ den gegebenen Anfangszustand bedeutet.

Laut unseren Voraussetzungen soll $\Phi(\alpha)\, d\alpha$ überall gleich Null sein, und für $\alpha = x_0$ gleich Eins. Dann wird

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}}.$$

Es sei zunächst $c = 0$, dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung $x - x_0$ in der Zeit t gegeben durch

$$w(x,t)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}}\, dx \tag{4}$$

und das mittlere Verschiebungsquadrat

$$\overline{(x - x_0)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)\, (x - x_0)^2\, dx = 2Dt \tag{5}$$

zwei auf anderem Wege bereits oftmals hergeleitete Formeln.

Für $c \neq 0$ lautet die Lösung gemäß (3)

$$w^*(x,t)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{(x - x_0 + ct)^2}{4Dt}}\, dx \tag{4*}$$

die mit (4) übereinstimmend wird, wenn man die Koordinatentransformation

$$x^* = x + ct$$

ausführt, d. h. wenn man die Verschiebungen in einem Koordinatensystem mißt, das sich mit der Geschwindigkeit c von oben nach unten bewegt.

Für Formel (5) tritt die analoge Formel ein

$$\overline{(x^* - x_0)^2} = 2Dt. \tag{5*}$$

Wir wollen nun eine andere Wahrscheinlichkeitsbetrachtung an unserem Teilchen anstellen, die unabhängig voneinander von Schrödinger und Smoluchowski[1]) zuerst vorgenommen wurde, im Zusammenhang mit der bekannten Weiss-Ehrenhaftschen Berechnungsmethode. Wir werden nämlich die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein Teilchen, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = b$ befand, die Ebene $x = 0$ zwischen t und $t + dt$ zum erstenmal überschreitet. Dem Umstande, daß das Teilchen in dem Momente von der Betrachtung ausscheidet, wo es die Marke $x = 0$ zum erstenmal überschreitet, wird Rechnung getragen, indem man als Randbedingung für $x = 0$ für alle Zeiten die Konzentration Null vorschreibt.

Das Quellenintegral der Differentialgleichung (2) unter dieser Randbedingung lautet, wie aus der Wärmeleitungstheorie bekannt ist,

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_0^\infty \Phi(\alpha) \left(e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4Dt}} \right) d\alpha,$$

oder unter unseren Voraussetzungen über $\Phi(\alpha)$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left(e^{-\frac{(x - b)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x + b)^2}{4Dt}} \right).$$

Die pro Zeiteinheit durch die Ebene $x = 0$ hindurchtretende Teilchenzahl bei der virtuellen Gesamtheit ist dann gegeben durch

$$D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0},$$

welche Größe also gleichzeitig die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Erstpassage liefert.

Die Berechnung ergibt

$$M(t)\, dt = \frac{b}{2\sqrt{\pi D t^3}} e^{-\frac{b^2}{4Dt}} dt. \tag{6}$$

Bezieht man noch den Einfluß der Schwere in die Rechnung ein, so muß man nach (3) die Konzentration in der Form ansetzen

1) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 16. p. 289. 1915; M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 16. p. 319. 1915; siehe auch D. Konstantinowsky, Phys. Zeitschr. 16. p. 369. 1915.

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{c^2 t}{4D} - \frac{c(x-b)}{2D}} \left(e^{-\frac{(x-b)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+b)^2}{4Dt}} \right),$$

woraus sich die analoge Wahrscheinlichkeit zu

$$(6^*) \qquad M^*(t)\,dt = D\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{b}{2\sqrt{\pi D t^3}} e^{-\frac{(b-ct)^2}{4Dt}} dt$$

berechnet.

Diese Formel kann man nun benützen, um einige zeitliche Mittelwerte zu bestimmen. *Mittlere einseitige Erstpassagezeit* wollen wir die mittlere Zeit nennen, die das Teilchen braucht, um eine in der Entfernung b senkrecht unter dem Ausgangspunkt angebrachte Marke zum erstenmal zu passieren. Sie ergibt sich

$$(7a) \qquad \bar{t} = \int_0^\infty t M^*(t)\,dt = \frac{b}{c},$$

während die analoge Größe

$$(7b) \qquad \left(\frac{1}{t}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} M^*(t)\,dt = \frac{2D}{b^2} + \frac{c}{b}$$

ergibt.

Durch Kombination von (7a) und (7b) ergibt sich die zum ersten Male von E. Weiss[1]) in etwas anderer Gestalt angewandte Formel zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten aus den Abweichungen von der gleichförmigen Fallbewegung

$$(7c) \qquad 2D = b^2 \left\{ \left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\bar{t}} \right\}.$$

Ist speziell wieder $c = 0$, so wird, wie man sieht,

$$(7d) \qquad \left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2D}{b^2} \quad \text{und} \quad \bar{t} = \infty.$$

Da also in diesem Falle (7a) sinnlos wird, kann man versuchen, das analoge Mittel für eine endliche Beobachtungsdauer T zu bilden, d. h., man bilde das Mittel aller einseitigen Erstpassagezeiten, die kleiner sind als eine gegebene Zahl T.

Die Berechnung ergibt für diese Größe

$$(8) \qquad \bar{t}_T = \frac{\int_0^T t M(t)\,dt}{\int_0^T M(t)\,dt} = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \frac{e^{-\frac{b^2}{4DT}}}{1 - \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{DT}}\right)} - \frac{b^2}{2D},$$

1) E. Weiss, Wiener Ber. 120. (2a) p. 1021. 1911.

wovon man sich durch partielle Integration leicht überzeugt. Dabei bedeutet $\Phi(y)$ das mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ multiplizierte Gausssche Fehlerintegral

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx.$$

Für große T vereinfacht sich die Formel durch Vernachlässigung kleiner Größen zu

$$\bar{l}_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{T} - \frac{b^2}{2D}. \tag{8'}$$

Betrachten wir nun folgende Wahrscheinlichkeit: Das Teilchen gehe wieder zur Zeit $t = 0$ vom Punkte $x = b$ aus. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß das Teilchen im Zeitintervall $t \ldots t + dt$ die Ebene $x = 0$ *oder* $x = 2b$ zum ersten Male überschreite. Dabei sei $c = 0$ angenommen. Zur analogen Ableitung aus der Diffusionsgleichung (2) braucht man ihr Quellenintegral unter der Bedingung, daß in $x = 0$ und in $x = 2b$ ständig die Konzentration $u = 0$ herrschen soll. Die Lösung bietet die Behandlung des Problems der Temperaturverteilung als Funktion von Ort und Zeit in einer Platte von unendlicher Breite und der Dicke $2b$, an deren Endflächen ständig die Temperatur Null herrscht.

Sie lautet[1]):

$$u = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2b} \int_0^{2b} f(\alpha) \sin\frac{n\pi\alpha}{2b}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2b} \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der pro Zeiteinheit aus den beiden Grenzebenen diffundierenden Teilchen

$$\left\{ \begin{array}{l} N(t)\,dt = D\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=2b}\right\} dt = \\ \qquad\qquad \frac{\pi D}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{n\pi}{2}\, e^{-D\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2} dt. \end{array} \right. \tag{9}$$

1) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl. 2. p. 112.

Durch Ausrechnung kann man leicht kontrollieren, daß die ermittelte Wahrscheinlichkeit tatsächlich der Bedingung genügt:

$$\int_0^\infty N(t)\,dt = 1.$$

Formel (9) kann man benützen, um die *mittlere doppelseitige Erstpassagezeit*, also jene Zeit zu bestimmen, die das Teilchen im Mittel braucht, um eine *oder* die andere von zwei im Abstande b vom Ausgangspunkte rechts und links angebrachten Marken zum ersten Male zu überschreiten.

Es ergibt sich

$$\vartheta = \int_0^\infty t\,N(t)\,dt = \frac{b^2}{2D}, \tag{10}$$

woraus für die Bestimmung von D folgt:

$$2D = \frac{b^2}{\vartheta}. \tag{10'}$$

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch die Wahrscheinlichkeit einer *Wiederkehr* des Teilchens im nachstehenden Sinne behandeln:

Wir fragen nach der Größe der Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen unter dem Einflusse der Brownschen Bewegung allein, von seinem Ausgangspunkte zur Zeit $t = 0$ ausgehend, in dem Zeitelement $t \ldots t + dt$ wieder dahin zurückkehrt, nachdem es sich nach irgendeiner Seite *mindestens* um die Strecke b vom Ausgangspunkte entfernt hatte.

Da es uns auch hier wieder nur auf die mittlere Wiederkehrzeit ankommt, können wir uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit ersparen, wenn wir bedenken, daß diese mittlere Wiederkehrzeit offenbar gleich sein muß der Zeit, die das Teilchen im Mittel braucht, um vom Ausgangspunkte eine der beiden Marken b, gleichgültig welche, zu erreichen, vermehrt um die im Mittel benötigte Zeit, um sich von da nach einer *bestimmten* Richtung, nämlich in der entgegengesetzten, um die Strecke b zum ersten Male zu entfernen. Es ist also diese Wiederkehrzeit gegeben durch

$$\tau = \vartheta + \bar{t}_{T-\vartheta},$$

wenn wieder T die maximale Beobachtungsdauer bezeichnet. Auch hier haben wir $c = 0$ gesetzt. Für unbeschränkte Be-

obachtungsdauer wächst τ über alle Grenzen. Für endliche Beobachtungsdauer erhalten wir

$$(11) \qquad \tau_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \frac{e^{-\frac{b^2}{4D\left(T-\frac{b^2}{2D}\right)}}}{1-\Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D\left(T-\frac{b^2}{2D}\right)}}\right)} \sqrt{T-\frac{b^2}{2D}},$$

was für große Beobachtungszeiten T durch Vernachlässigung kleiner Größen übergeht in

$$(11') \qquad \tau_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{T}.$$

Damit wollen wir die Betrachtungen dieses Kapitels schließen und in dem nächsten die experimentelle Verifikation der aufgestellten Formeln vornehmen.

B. Die Versuchsanordnung.

Um die in A. aufgestellten Formeln einer experimentellen Kontrolle zu unterziehen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen:

Die untersuchte Suspension bestand entweder aus einer nach Perrin[1]) durch Lösung von Gummigutt in Alkohol und nachherige Ausfällung durch starken Wasserüberschuß hergestellten Gummiguttemulsion (oder ähnlichen Mastixemulsion), oder einer durch Zerstäubung von Quecksilber im elektrischen Gleichstromlichtbogen unter Wasser hergestellten Quecksilberemulsion nach der Bredig-Ehrenhaftschen Methode.[2]) Die Emulsion wurde in eine unter dem Namen „Objektnetzmikrometer" bekannte Zeisssche Kuvette zur Zählung von Blutkörperchen gebracht, mit einem Deckglas abgeschlossen und die Ränder mit Paraffin überstrichen. Dann wurde die Kuvette auf dem Tisch eines horizontal gestellten Merkschen Mikroskops mittels der Befestigungsvorrichtung angebracht. Zur Beobachtung diente das Objektiv 6 und das Okular 4 dieses Instrumentes bei völlig ausgezogenem Tubus. Dieses

1) J. Perrin, Die Brownsche Bewegung und die wahre Existenz der Moleküle, Dresden 1910; Die Atome. Leipzig und Berlin 1914.

2) G. Bredig, „Anorganische Fermente"; F. Ehrenhaft, Akad. Anzeiger Nr. XXV, 1908; siehe auch R. v. Ettenreich, Wiener Ber. (IIa) 121.

optische System hatte eine Vergrößerung von 430 lin. und eine n. A. = 0,74. In dem Huygenschen Okular befand sich ein Okularraster mit einer quadratischen Teilung in 60·60 Elemente. Durch Vergleich mit einem Zeisschen Objektmikrometer war die Distanz zweier benachbarter Linien des Rasters zu $19{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm festgestellt worden. Bei den im nächsten Kapitel folgenden Meßergebnissen ist aber, wenn nichts ausdrücklich vermerkt ist, diese Größe als Einheit angenommen. Als Lichtquelle diente eine vor dem Mikroskop aufgestellte 32kerzige Metallfadenlampe, deren Licht vor dem Passieren der Emulsion noch ein Wasserfilter durchsetzte. Die ganze Anordnung war auf einem Fundamentpfeiler erschütterungsfrei aufgestellt.

Zur Registrierung des Durchganges eines Teilchens durch einen Teilstrich des Rasters diente der von Weiss bei der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung verwendete elektromagnetische Doppelstiftschreiber, der in der im vorigen Kapitel zitierten Arbeit von E. Weiss erwähnt ist. Durch ein Metronom mit Quecksilberkontakt wurde der eine Hebel des Schreibers in Intervallen von 1 Sek. betätigt, der andere durch einen im Bereiche des Beobachters befindlichen Morsetaster. Wenn es nötig war, die Richtung des Durchganges des Teilchens durch einen Teilstrich ebenfalls zu markieren, wurde so verfahren, daß die Passage nach einer Seite durch einen einfachen Punkt, die nach der anderen Seite durch einen Doppelpunkt auf dem Morsestreifen markiert wurde.

Durch Beobachtung der Durchgänge durch die Vertikalstriche des Rasters bekommt man die Analyse der Brownschen Bewegung in der Horizontalen, das ist also *ohne* Einfluß der Schwere, durch die des Durchganges durch die Horizontalstriche die Analyse der Bewegung in der Vertikalen, also unter dem Einflusse der Schwerkraft. Da bei der verwendeten Vergrößerung die Teilchen nicht als Punkte erscheinen, muß man bei Anstellung der Beobachtungen ein für allemal vereinbaren, einen bestimmten Rand des Teilchens bei seinem Durchgange durch die Teilstriche zu markieren.[1])

1) Die verwendeten Apparate gehören dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag an, woselbst auch die Versuche ausgeführt wurden, mit Ausnahme des Objektnetzmikrometers, das mir vom Institut für theoretische Physik an derselben Universität zur Verfügung gestellt wurde.

C. Die Beobachtungen.

Wie man aus dem vorigen Kapitel ersehen haben wird, ist meine Versuchsanordnung dahin eingerichtet worden, nicht, wie es bei Beobachtungen über Brownsche Bewegung üblich ist, die Lage des Teilchens in äquidistanten Zeitpunkten festzustellen, sondern die Zeiten zu messen, die die Partikel braucht, um die Entfernung zwischen gegebenen Marken zu durchlaufen. Ich habe diese Beobachtungsmethode gewählt, weil sie erstens experimentell viel leichter zu realisieren ist als die übliche, die, um genaue Resultate zu liefern, der Methoden der Kinematographie und Mikrophotographie bedarf, zweitens aber, weil die auf Grundlage dieser Beobachtungsmethode theoretisch zu erwartenden Wahrscheinlichkeitsergebnisse einer ausreichenden experimentellen Kontrolle noch nicht unterzogen worden sind.[1])

I.

Um zunächst eine Kontrolle der Formeln ohne Einfluß der Schwere zu erhalten, wurden Beobachtungen an Mastixemulsionen in der Horizontalen auf die beschriebene Weise

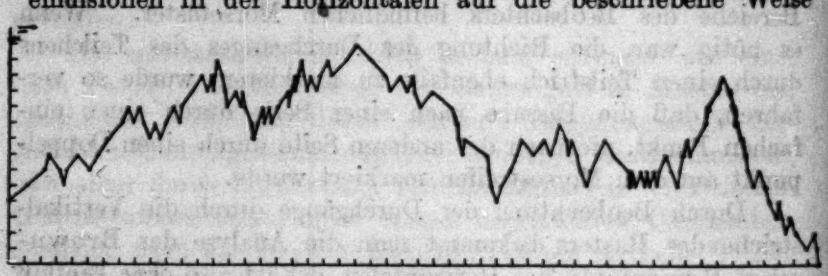


Fig. 1.

angestellt. Um die erhaltene Beobachtungsreihe bequem diskutieren zu können, habe ich sie von dem Morsestreifen auf eine graphische Darstellung übertragen, in welcher die Ordinaten die (ganzzahligen) Verschiebungen der Teilchen, die Abszissen die beobachteten Zeiten bedeuten. Fig. 1 stellt

1) Die Formeln (4) und (5) bzw. (4*) und (5*) wurden unter anderem geprüft von: J. Perrin und seinen Schülern Dabrowski und Chaudesaignes, „Die Atome", The Svedberg, „Die Existenz der Moleküle"; v. Ettenreich, l. c.; J. Nordlund, Zeitschr. f. physik. Chem. 87. p. 40ff. 1914; K. Seelis, Zeitschr. f. physik. Chem. 86. p. 682ff. 1913; Zangger und Böhi, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 56. 1911.

die graphische Darstellung einer solchen Beobachtungsreihe über 518 Sek. dar. An dieser Reihe können wir nun eine große Anzahl der Betrachtungen des Abschnittes A. studieren. Wir wollen zunächst unsere Formel (7d) benutzen, um mit ihrer Hilfe den Wert des Diffusionskoeffizienten zu ermitteln, der uns dann dazu dienen soll, die übrigen Formeln zu verifizieren. Da bei der Brownschen Bewegung ohne Einwirkung äußerer Kräfte jede Lage gleich wahrscheinlich ist, können wir von jedem Punkt unserer Kurve als Ausgangspunkt ausgehen und gemäß den Bedingungen für die Formel (7d) jene Zeit ermitteln, die nötig ist, damit sich das Teilchen beispielsweise um b Teile nach links bewegt. Von allen diesen Werten bilden wir die reziproken und berechnen das Mittel. Dieselbe Prozedur haben wir für die Bewegung nach rechts anzustellen; aus beiden so erhaltenen Werten bilden wir wieder das Mittel. Die entstehende Größe ist unser gesuchtes $\overline{(1/t)}$. Für jedes ganzzahlige b erhalten wir auf diese Weise das zugehörige $\overline{(1/t)}$. Wegen der Beschränktheit der gesamten Beobachtungsreihe kann das Verfahren nicht auf zu große Werte von b ausgedehnt werden, wir begnügen uns im folgenden mit den Werten $b = 1, 2, 3$, an denen die Richtigkeit der Formel (7d) bereits zu ersehen ist. Nachstehende Tab. 1 enthält die zu den einzelnen b gehörigen Werte von $\overline{(1/t)}$ und die Produkte $b^2\overline{(1/t)}$, die nach der Formel konstant sein müssen; die Forderung ist mit genügender Genauigkeit erfüllt. Der halbe Mittelwert der genannten Produkte liefert das gesuchte D.

Tabelle 1.

b	$\overline{\left(\frac{1}{t}\right)}$	$b^2\overline{\left(\frac{1}{t}\right)}$	
1	0,228	0,228	
2	0,058	0,232	$D = 0{,}116$
3	0,026	0,233	

Mit dem Werte für $D = 0{,}116$ wollen wir nun Formel (8) für $\bar{t}_T$ verifizieren. Der Vorgang, den man hier zu verfolgen hat, ist analog dem vorher beschriebenen, nur daß man bei der Mittelbildung alle Werte $t > T$ wegzulassen hat. Für je drei Werte von T und b ist in Tab. 2 der aus den Beobachtungen ermittelte und der aus Formel (8) folgende Wert

von t nebeneinander gestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung durchaus befriedigend.[1])

Tabelle 2.

T	b	$\bar{t}$ (beob.)	$\bar{t}$ (ber.)
50	1	9,95	10,03
	2	18,46	18,3
	3	29,57	24,1
100	1	15,42	15,1
	2	30,30	27,6
	3	41,08	37,8
150	1	19,42	18,8
	2	37,90	34,9
	3	54,57	48,3

Nun können wir leicht auch Formel (6) einer Kontrolle unterziehen, indem wir sie in der integrierten Form hinschreiben

$$(6a) \qquad M_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} M(t)\,dt = \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D\,t_1}}\right) - \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D\,t_2}}\right),$$

wo Φ die auf p. 182 auseinandergesetzte Bedeutung hat. Wir teilen die Zeit t in gewisse Intervalle t_s und haben abzuzählen, wieviele beobachtete Zeiten unserer Statistik bei einem bestimmten b in die einzelnen Intervalle hineinfallen. In der nachstehenden Tab. 3 sind für $b = 1$ die auf diese Weise aus den Beobachtungen resultierenden und die aus Formel (6a) berechneten Häufigkeitszahen n (beob.) und n (ber.) nebeneinandergestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung wenigstens für die kleinen t-Werte eine befriedigende.[2])

Tabelle 3.

$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)	$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)
0—10	152	144	50—100	20	18
10—20	36	37	100—200	22	13
20—30	13	17	200—300	7	7
30—50	19	18	300—500	1	2

1) Daß die theoretischen t-Werte gegen die experimentellen etwas zurückbleiben, läßt auf einen zu großen Wert von D schließen, doch habe ich mit Absicht den aus Formel (7d) folgenden Wert zugrunde gelegt, da dieser Formel eine größere experimentelle Zuverlässigkeit zukommt als Formel (8).

2) Für die großen t-Werte ist bessere Übereinstimmung nicht zu verlangen, da hier die Unsicherheit infolge der Beschränktheit der Beobachtungsreihe naturgemäß viel größer ist.

Wir gehen nun zur Bestimmung der mittleren doppelseitigen Erstpassagezeit über, wie sie sich aus derselben Beobachtungsreihe ergibt, die wir bis jetzt verwendet haben. Wir verfahren zu ihrer Bestimmung ebenso, nur daß wir jetzt von einem Punkte ausgehend immer diejenige Zeit aus Fig. 1 bestimmen müssen, die bis zum nächsten Durchgang durch den $b$ten Teilstrich rechts *oder* links vom Ausgangspunkte vergeht. Aus allen diesen Werten für ein bestimmtes b haben wir wieder das Mittel zu nehmen, das unser ϑ der Formel (10) darstellt. Nachstehende Tab. 4 enthält für einige Werte von b die zugehörigen ϑ und b^2/ϑ, welch letztere nach (10) konstant und zwar gleich $2D$ sein müssen.

Tabelle 4.

b	ϑ	$\frac{b^2}{\vartheta}$	
1	3,73	0,267	
2	15,09	0,265	
3	33,39	0,269	$D = 0{,}133$
4	59,17	0,269	
5	94,09	0,265	
6	138,57	0,259	

Der aus dieser Art der Beobachtung erschlossene Wert von D steht, wie man sieht, in verhältnismäßig guter Übereinstimmung mit dem früher gewonnenen.

Mit diesem Werte von D wollen wir nun auch noch Formel (9) für die relative Häufigkeit einer doppelseitigen Erstpassagezeit mit den Beobachtungen vergleichen. Auch hier schreiben wir die Formel in der integrierten Form an:

$$(9a) \qquad N_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \left(e^{-D\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t_1} - e^{-D\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t_2} \right).$$

Wir gehen so vor wie bei Formel (6a), indem wir auch hier wieder $b = 1$ setzen, Tab. 5 enthält wieder für eine bestimmte Intervalleinteilung die beobachteten und berechneten Häufigkeitswerte nebeneinander. Auch hier kann man die Übereinstimmung beider konstatieren.

Tabelle 5.

$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)
0—2	31	32
2—4	58	42
4—6	27	26
6—8	15	16
8—10	6	10
10—16	4	12

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir schließlich noch die Formel (11) für die mittlere Wiederkehrzeit einer Probe unterwerfen. Wir entnehmen unserer Kurve, von jedem Punkte als gleichwahrscheinlichen einzeln ausgehend, die Zeit, nach deren Ablauf die Kurve die gleiche Ordinate zum ersten Male wieder berührt. Infolge der Eigentümlichkeit der Beobachtungsmethode stellen diese Zeiten im Mittel direkt die von uns definierten Wiederkehrzeiten für $b = 1$ dar, da aufeinanderfolgende Durchgänge durch einen Vertikalstrich, ohne daß sich das Teilchen in der Zwischenzeit bis mindestens zum nächsten bewegt hätte, nicht notiert werden. Dabei ist die Mittelbildung wieder so vorzunehmen, daß alle Werte $\tau > T$ wegzulassen sind. Unsere Beobachtungsreihe ergibt für $T = 100$

$$\tau_{\text{beob.}} = 18{,}97 \text{ sec},$$

während die Berechnung nach Formel (11)

$$\tau_{\text{ber.}} = 18{,}84 \text{ sec}$$

ergibt, die in ausreichendem Grade übereinstimmen.

II.

Um nun auch noch die in A. abgeleiteten Formeln für die Brownsche Bewegung in der Vertikalen, also unter dem Einflusse der Schwerkraft, einer Prüfung zu unterziehen, wurden ähnliche Beobachtungen in der in B. näher auseinandergesetzten Weise auch in der Vertikalen an Gummigutt- und Quecksilberemulsionen angestellt. Von der großen Anzahl von Beobachtungsreihen soll hier eine einzige an Quecksilber angeführt und näher diskutiert werden, da eine noch unaufgeklärte Anomalie die weiter unten kurz gestreift werden wird, erst noch ihrer Aufklärung zugeführt werden soll, weswegen ich die Veröffentlichung dieser Reihen bis dahin auf-

schiebe. Die folgende Tabelle enthält die dem Telegraphenstreifen entnommenen Passagezeiten beim Durchgange durch die Horizontalstriche des Rasters. Um eine größere Anzahl von Beobachtungen zu erhalten, ließ ich das Teilchen zunächst über die ganze Strecke von 60 Teilen fallen, worauf das Objektnetzmikrometer mittels der Objektstellschrauben des Mikroskops soweit gehoben wurde, bis dasselbe Teilchen wieder (im Mikroskop gesehen) am unteren Ende der Okularskala angelangt war, und darauf die Ablesung wiederholt. Die mitgeteilte Reihe enthält auf diese Weise 118 Beobachtungen, die auf 0,1 sec abgerundet sind.

Tabelle 6.

t:							
1,1	0,5	1,0	0,6	0,8	0,9	0,5	1,7
0,8	0,4	0,4	0,4	0,5	1,0	0,6	0,8
0,9	0,6	0,7	0,7	0,4	0,3	0,7	0,5
0,8	0,7	0,8	1,2	0,4	0,4	0,7	0,8
0,9	0,5	0,5	0,6	0,8	0,7	0,5	0,6
0,7	0,4	0,5	0,4	0,7	0,7	0,5	0,3
0,6	1,2	0,5	0,4	0,4	0,6	0,6	0,5
0,5	0,8	0,7	0,8	0,5	0,7	0,9	0,8
0,4	0,6	0,6	0,5	0,9	0,9	1,0	0,6
0,4	0,3	0,4	0,9	0,5	0,5	0,9	0,7
0,4	0,4	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	1,3
1,0	0,7	0,4	0,8	0,5	0,6	0,5	0,7
0,5	0,9	0,6	0,7	0,8	0,5	0,5	0,6
0,9	0,9	0,4	0,7	0,5	0,4	0,6	$\bar{t} = 0{,}656$
1,7	0,6	0,7	0,5	0,4	0,4	1,4	

Wir wollen diese Statistik zunächst benutzen, um die Richtigkeit der Relation (7c) zu prüfen und aus ihr den Wert des Diffusionskoeffizienten D und der mittleren Fallgeschwindigkeit c zu entnehmen.

Der Wert der letzteren ergibt sich zunächst durch Mittelbildung über alle t zu

$$c = \frac{1}{\bar{t}} = 1{,}5245 \text{ Teilstr./sec}.$$

Das Mittel der reziproken Fallzeiten liefert $(\overline{1/t})$ und damit das Mittel zur Bestimmung von $2D$ aus (7c).

Addiert man je zwei aufeinanderfolgende t-Werte, so erhält man die entsprechenden Fallzeiten für die doppelte Fallstrecke $b = 2$, analog für $b = 3{,}4\ldots$ Man kann so für beliebige b, sofern sie klein sind, gegen die gesamte Fallstrecke

die entsprechenden Werte von $\bar{t}$ und $\overline{(1/t)}$ ausrechnen und in Formel (7c) einseteen. Tab. 7 enthält für $b = 1$ bis $b = 9$ die Werte von $\overline{(1/t)}$ und $1/\bar{t}$, sowie von

$$b^2\left\{\left(\frac{\bar{1}}{t}\right) - \frac{1}{\bar{t}}\right\},$$

welch letztere sich als Konstante ergeben soll. Die Forderung ist, wie man sieht, annäherungsweise erfüllt, doch dürfte zur Erreichung der gleichen Genauigkeit, als in der Horizontalen, jedenfalls eine weit größere Anzahl von Beobachtungen nötig sein, da die Stopfehler hier naturgemäß eine größere Rolle spielen als dort.

Tabelle 7.

b	$\left(\frac{\bar{1}}{t}\right)$	$\frac{1}{\bar{t}}$	$b^2\left\{\left(\frac{\bar{1}}{t}\right) - \frac{1}{\bar{t}}\right\}$	
1	1,7295	1,5245	0,205	
2	0,8259	0,7622	0,254	
3	0,5382	0,5082	0,270	
4	0,3940	0,3811	0,205	
5	0,3151	0,3049	0,255	$D = 0{,}121$
6	0,2611	0,2541	0,253	
7	0,2225	0,2178	0,232	
8	0,1944	0,1906	0,248	
9	0,1725	0,1694	0,254	

Als Mittelwert ergibt sich daher der Wert des Diffusionskoeffizienten zu

$$D = 0{,}121\,,$$

gemessen aus den Abweichungen von der gleichförmigen Fallgeschwindigkeit.

Nach Schrödinger[1]) ist für längere Beobachtungsreihen der mittlere relative Fehler bei der Messung des Diffusionskoeffizienten auf diesem Wege nahezu $\sqrt{\frac{2}{n}}$, wenn n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Das ergibt für unseren Fall 13 Proz., während sich aus Tab. 7 der mittlere relative Fehler der D zu 7,6 Proz. berechnet, also vollkommen innerhalb der zulässigen Genauigkeitsgrenze bleibt.

Mit den erlangten Werten von c und D wollen wir nun noch Formel (6*) über die Häufigkeit eines bestimmten Wertes

1) E. Schrödinger, l. c. p. 295.

der Fallzeit t kontrollieren. Tab. 8 enthält die nach (6*) berechneten Werte von $M^*(t)$, die man in diesem Falle wegen der Kleinheit der Zeitintervalle in der nicht integrierten Form anwenden kann, indem man $M^*(t)$ mit der Länge des Zeitintervalles multipliziert. Dieses ist infolge der Art der vorgenommenen Abrundung gleich 1 Sek. Tab. 8 enthält außerdem noch die aus diesen relativen Häufigkeiten folgenden absoluten unter n (ber.) und die wirklich beobachteten Häufigkeiten unter n (beob.). Man sieht, daß im ganzen und großen Übereinstimmung herrscht. Eine bessere ist infolge der bereits auseinandergesetzten Gründe nicht zu erwarsen.

Tabelle 8.

t	$M^*(t)$	n (ber.)	n (beob.)
0,3	0,635	7	3
0,4	1,450	17	22
0,5	1,800	21	25
0,6	1,675	20	17
0,7	1,342	16	17
0,8	0,990	12	12
0,9	0,679	8	11
1,0	0,452	5	4
1,1	0,292	3	1
1,2	0,183	2	2
1,3	0,116	1	1
1,4	0,071	1	1
1,5	0,044	1	0

Fig. 2 enthält die graphische Darstellung der Tab. 8, indem die gezeichnete Kurve den theoretischen, die kleinen

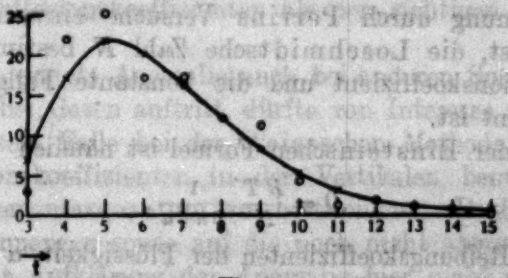


Fig. 2.

Kreise den beobachteten Häufigkeitswerten entsprechen. Aus der Darstellung ist wohl zu ersehen, daß die theoretische Kurve die Versuchsergebnisse wirklich ausgleicht.

Ich will nun noch kurz auf die am Eingang dieses Abschnittes erwähnte Anomalie eingehen. Ich habe an derselben Quecksilberpartikel, auf die sich die vorangehende Untersuchung bezog, auch Beobachtungen über die Brownsche Bewegung in der Horizontalen in der im vorigen Abschnitt näher erläuterten Weise angestellt und daraus nach Formel (10′) über die mittlere doppelseitige Erstpassagezeit den Diffusionskoeffizienten in der Horizontalen bestimmt, der sich als wesentlich größer herausstellte. Während wir in der Vertikalen erhielten $D = 0{,}121$, ergibt sich für die Horizontale $D = 0{,}195$, was einem Unterschied von rund 60 Proz. gleichkommt. Und diese Anomalie zeigt sich tatsächlich bei allen 10 vorläufig von mir angestellten Beobachtungsreihen an Quecksilberemulsionen und zwar immer im gleichen Sinne, so daß hier eine systematische Ursache zugrunde liegen muß, die noch der Aufdeckung harrt. Ich bemerke, daß in der bereits zitierten Arbeit Ettenreichs, der die Verschiebungen der Teilchen in äquidistanten Zeitpunkten mißt, ein gleicher Unterschied, und zwar im selben Sinne bei der größten Anzahl der angestellten Beobachtungen konstatiert wurde, was darauf schließen läßt, daß die Anomalie nicht etwa auf die besondere Art der von mir verwendeten Beobachtungsmethode zurückzuführen ist.

Da offenbar nur einer der beiden Werte des Diffusionskoeffizienten richtig sein kann, wäre nun zu entscheiden, welcher dies ist. Unter Annahme der Kugelgestalt der Tröpfchen, die aus dem mikroskopischen Bilde als sicher angenommen werden kann, läßt sich nun doch vermittels des Stokesschen Gesetzes, dessen Gültigkeit für Kugeln dieser Größenordnung durch Perrins Versuche einwandfrei nachgewiesen ist, die Loschmidtsche Zahl N bestimmen, wenn der Diffusionskoeffizient und die konstante Fallgeschwindigkeit bekannt ist.

Nach der Einsteinschen Formel ist nämlich

$$D = \frac{RT}{N}\,\frac{1}{6\pi\zeta a},$$

wo ζ den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit, a den Radius des kugelförmigen Teilchens bedeutet. Ferner ist

$$c = \frac{1}{6\pi\zeta a}\,\frac{4\pi}{3}\,a^3(d-d_0)g = \frac{2}{9}\,\frac{d-d_0}{\zeta}\,g\cdot a^2,$$

wo d die Dichte des Teilchens, d_0 die der Flüssigkeit bedeutet.

Aus der letzteren Formel folgt

$$a = \sqrt{\frac{9\,\varepsilon\,\zeta}{2g\,(d - d_0)}},$$

was in die erste eingesetzt

$$D = \frac{R\,T}{N}\,\frac{\sqrt{2g\,(d - d_0)}}{18\,\pi\,\sqrt{\zeta^3\,\varepsilon}}$$

ergibt, oder für N den Wert

$$N = \frac{R\,T}{D}\,\frac{1}{18\,\pi}\,\sqrt{\frac{2g\,(d - d_0)}{\zeta^3 \cdot \varepsilon}}. \tag{12}$$

Darin haben wir für unseren Fall zu setzen:

$$T = 293,\quad R = 8{,}315 \cdot 10^7,\quad g = 981,\quad d - d_0 = 12{,}6,$$
$$\zeta = 0{,}0102,\quad \varepsilon = 1{,}524 \cdot 19{,}2 \cdot 10^{-5}$$

und entweder $D_v = 0{,}121 \cdot 19{,}2^2 \cdot 10^{-10}$,

oder $D_H = 0{,}195 \cdot 19{,}2^2 \cdot 10^{-10}$.

Durch Ausrechnung ergibt sich im ersten Falle

$$\underline{N_v = 86 \cdot 10^{22}}$$

und im zweiten Falle

$$\underline{N_H = 53 \cdot 10^{22}},$$

von denen der zweite dem Planckschen Wert

$$N = 62 \cdot 10^{22}$$

näher liegt als der erste, so daß man mit einiger Berechtigung den aus der Beobachtung in der Horizontalen berechneten Wert des Diffusionskoeffizienten als den richtigen anzusehen haben wird.

Ob die gezeigte Anomalie auch bei anderen Suspensionen, namentlich bei Gasen auftritt, dürfte von Interesse sein, da ja in eben diesem Falle bei der Weissschen Methode der Wert des Diffusionskoeffizienten in der Vertikalen benutzt wird, um das Elementarquantum zu bestimmen. Doch soll auf diese Konsequenzen sowie auf die noch nicht abgeschlossenen Versuche zur Aufklärung der Anomalie hier nicht näher eingegangen werden, sollen vielmehr einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Mit diesen Betrachtungen will ich nun den ersten Teil dieser Arbeit schließen und mich dem zweiten zuwenden.

II. Teil.

A. Versuchsanordnung und Beobachtungsmethode.

Gemäß dem am Anfange dieser Arbeit ausgesprochenen Plane soll dieser Teil sich mit der Brownschen Bewegung einer Partikel in der Nähe einer festen Wand beschäftigen. Im folgenden will ich zunächst die für die dazu nötigen Beobachtungen gebrauchte Versuchsanordnung und die Methode der Beobachtungen besprechen.

An der Aufstellung des Mikroskops wurde nichts geändert, als daß statt des Okularrasters ein bloß mit Horizontalstrichen versehenes Okularmikrometer verwendet wurde, das vorher durch Vergleichung mit einem Zeissschen Objektmikrometer geaicht worden war. Es ergab sich ein Teil des Okularmikrometers $= 1{,}135 \cdot 10^{-4}$ cm. Ferner wurde statt des Objektivs 6 das Objektiv 9 dieses Mikroskops verwendet, Okular 4 wurde beibehalten. Das derart geschaffene optische System hatte eine Vergrößerung von 930fach linear und eine N.A. $= 0{,}827$.

Statt des Objektnetzmikrometers mußte eine andere Kuvette verwendet werden, die gestattete, das Teilchen bei seiner Bewegung in der Nähe eines horizontalen Bodens zu verfolgen. Sie wurde folgendermaßen hergestellt. Eine 1 cm dicke rechteckige, geschliffene Glasplatte von 5×6 cm mit einem u-förmigen Ausschnitte von 2 cm Breite und 3,5 cm Länge, die von einer unbrauchbar gewordenen Kuvette stammte, wurde auf einer Seite durch eine Glasplatte, auf der anderen durch eine Hartgummiplatte abgeschlossen, die mit Pizein verkittet war. Die Hartgummiplatte war etwa in der Mitte des u-förmigen Ausschnittes mit einem kreisförmigen Loch von 12 mm Durchmesser versehen, das mit einem Deckgläschen von innen abgeschlossen war, und in das der Objektivkopf des Mikroskops bequem hineinpaßte. An dieses Fenster war von innen ein Glaswürfel von 12 mm Seitenlänge angekittet, dessen obere Kante das Fenster gerade halbierte. Auf die obere horizontale Fläche des Würfels wurde endlich ein ebenes Deckgläschen so aufgekittet, daß es sich an das Fenster mit seiner Schmalseite vollkommen anlegte. Dieses Deckglas bildete den horizontalen Boden, und die geschilderte Anordnung ermöglichte es, mit dem stark vergrößernden Objektiv so nahe heranzugehen, als es der kurze Frontabstand desselben erforderte. Bei Scharfeinstellung auf die

Vorderkante des Bodens erschien dieser trotz der starken Vergrößerung als vollkommen eben, was für die anzustellenden Messungen eine notwendige Vorbedingung ist.

Die Befestigung am Mikroskop geschah durch entsprechend konstruierte Klammern, so daß man durch Verdrehen der Stellschrauben des Tischchens noch die Möglichkeit hatte, den Boden genau horizontal zu stellen, und an eine beliebige Stelle des Gesichtsfeldes zu bringen. Die Einstellung wurde in der Weise vorgenommen, daß der als Horizontalstrich sichtbare Boden mit einem Teilstrich des Okularmikrometers übereinstimmte.

Nun wurde in die Kuvette eine Gummiguttemulsion gebracht und einige Stunden der Sedimentation überlassen. Nach dieser Zeit sah man, daß die am Boden abgesetzten Teilchen daselbst nicht in Ruhe waren, sondern wie Gummibälle lebhaft auf- und abtanzten, indem sie durch den Glasboden vollkommen elastisch reflektiert wurden. Es wurde nun ein geeignetes Teilchen aufgesucht und auf seinem (durch das Horizontalstehen des Bodens verbürgten) vertikalen Wege im Laufe der Zeit verfolgt, indem wieder die Durchgänge durch die Teilstriche des Okularmikrometers mit Hilfe des Doppelstiftschreibers markiert wurden, und zwar eine Überschreitung von unten nach oben (im Mikroskop gesehen umgekehrt) durch einen Punkt, eine solche von oben nach unten durch zwei Punkte und eine Berührung des Bodens durch drei Punkte, um eine Verwechslung beim nachherigen Auswerten des Telegraphenstreifens zu vermeiden.

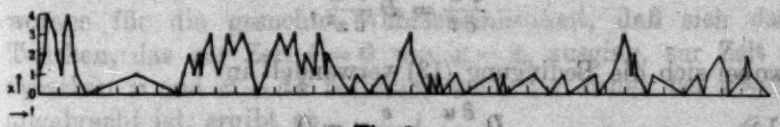


Fig. 8.

Zur bequemen Weiterverwertung der erhaltenen Resultate wurde der Inhalt des Streifens wieder graphisch dargestellt. Eine solche Darstellung zeigt für ein Gummigutteilchen Fig. 8, die der nachfolgenden Diskussion zugrunde gelegt ist. Als Ordinaten sind hier die Entfernungen vom Boden, in Teilen des Okularmikrometers gemessen, als Abszissen die entsprechenden Passagezeiten aufgetragen; die so erhaltenen Punkte sind zur Orientierung durch gerade Linien verbunden,

die aber keineswegs die Bahn des Teilchens während dieser Zeit bedeuten sollen.

In den später vorkommenden Berechnungen ist immer, wenn nichts ausdrücklich vermerkt ist, als Längeneinheit ein Teil des Okularmikrometers zugrunde gelegt.

B. Sedimentation.

Wir wollen nun zunächst theoretisch untersuchen, wie die Brownsche Bewegung des Teilchens durch Anbringung des Bodens geändert wird. Die betreffende Betrachtung ist von M. v. Smoluchowski[1]) bereits angestellt worden; sie soll hier kurz der Vollständigkeit halber wiederholt und durch eine ähnliche Überlegung ergänzt werden.

Wir gehen wieder von der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

aus, zu der aber nun noch die Zusatzbedingung hinzukommen muß, daß die gesamte Strömung der Substanz an der Stelle $x = 0$, wo wir uns den Boden angebracht denken wollen, verschwinden muß.

$$D\frac{\partial w}{\partial x} + c\,w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0. \tag{13}$$

Durch Einführung der Funktion (8) kann man die Lösung von (1) wieder reduzieren auf die von (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wobei sich die Bedingung (13) verwandelt in

$$D\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2}u = 0. \tag{14}$$

Die Lösung von (2) unter der Randbedingung (14) ist identisch mit der aus der Theorie der Wärmeleitung bekannten Lösung der Aufgabe, wie sich die Temperatur im Innern eines nach einer Richtung unendlich ausgedehnten Körpers ändert, der nach der anderen Richtung durch die Ebene $x = 0$ begrenzt ist, längs derer er mit der Umgebung von der Tem-

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 588ff. 1916.

peratur Null in Berührung steht. Die Anfangsverteilung sei gegeben. Diese Lösung lautet[1])

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_0^\infty \left\{ \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4Dt}} + \Phi(-\alpha) e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4Dt}} \right\} d\alpha ,$$

wo $\Phi(-\alpha)$ zu bestimmen ist aus der Gleichung

$$\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) + \frac{c}{D} e^{\frac{c}{2D}\alpha} \int_0^\alpha \Phi(\xi) e^{-\frac{c}{2D}\xi} d\xi .$$

Über die Funktion $\Phi(\alpha)$ ist wieder die Voraussetzung zu machen, die bereits in Teil I, A ausgesprochen wurde.

Es ist daher

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x + x_0)^2}{4Dt}} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \cdot \frac{c}{D} \int_{x_0}^\infty e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4Dt} + \frac{c\alpha}{2D} - \frac{cx_0}{2D}} d\alpha$$

was nach einigen einfachen Umformungen übergeht in

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x + x_0)^2}{4Dt}} \right] + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{\frac{c^2 t}{4D} - \frac{cx}{2D} - \frac{x_0 c}{2D}} \int_{\frac{x + x_0 - ct}{2\sqrt{Dt}}}^\infty e^{-z^2} dz ,$$

woraus für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß sich das Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ von $x = x_0$ ausging, zur Zeit t zwischen x und $x + dx$ befindet, wenn der Boden bei $x = 0$ angebracht ist, ergibt zu

$$(15) \quad \left\{ w(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x + x_0)^2}{4Dt}} \right] e^{-\frac{c}{2D}(x - x_0) - \frac{c^2 t}{4D}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x + x_0 - ct}{2\sqrt{Dt}}}^\infty e^{-z^2} dz \right.$$

1) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, p. 96f, Braunschweig 1901.

Diese Formel geht für große t, d. h. wenn die Sedimentation eingetreten ist, in folgende über:

$$w(x) = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}}, \tag{16}$$

in der, wie man sieht, die Aussage über den Ausgangspunkt des Teilchens natürlicherweise nicht mehr enthalten ist. Gemäß den im vorigen Abschnitte erläuterten Versuchsbedingungen hat man auf die Resultate der Beobachtung in unserem Falle Formel (16) anzuwenden.

Die Formel ist übrigens identisch mit der Perrinschen Höhenverteilungsformel, wenn für D der aus dem Gleichverteilungssatz folgende Wert eingesetzt wird. Die Perrinsche Beobachtungsmethode der Höhenschichtung ist die Übertragung der hier für eine Zeitgesamtheit abgeleiteten Formel auf eine Raumgesamtheit. Die Idee, statt der großen Teilchenzahl bei Perrin, die Zeitgesamtheit der Lagen eines Teilchens zu untersuchen, ist ebenfalls zum ersten Male von Smoluchowski[1]) ausgesprochen worden, obzwar ich bemerken möchte, daß ich den Plan der Ausführung dieser Versuche gefaßt hatte, bevor ich von der erwähnten Abhandlung Smoluchowskis Kenntnis erhielt.

Aus Formel (16) ersieht man, daß w sein Maximum hat für $x = 0$, d. h. wie zu erwarten, bildet der Boden die wahrscheinlichste Lage des Teilchens während langer Zeiten. Dagegen erkennt man aus der Formel gleichfalls daß die mittlere Entfernung des Teilchens vom Boden endlich und von Null verschieden ausfällt, und zwar

$$\bar{x} = \frac{c}{D} \int_0^\infty x e^{-\frac{cx}{D}} dx = \frac{D}{c}, \tag{17}$$

$\bar{x}$ wird von Smoluchowski als „Dicke der Sedimentationsschicht" bezeichnet.

Um nun an unserer Beobachtungsreihe die Ergebnisse vorstehender Theorie zu prüfen, bemerken wir, daß die Wahrscheinlichkeit des Aufenthaltes des Teilchens zwischen den Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ offenbar gleich ist der relativen Verweilzeit des Teilchens im besagten Intervalle, die man ja

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 591. 1916.

aus Fig. 8 direkt ablesen kann, indem man alle Zeiten addiert, die man erhält, indem man die Abszissendifferenz zwischen Ein- und Austrittsstelle der Kuve in das Intervall mißt. Um die Resultate mit Formel (16) zu vergleichen, schreibe ich sie in folgender integrierten Form:

$$w(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{\varepsilon x}{D}} = e^{-\frac{\varepsilon}{D}x_1} - e^{-\frac{\varepsilon}{D}x_2}.$$

Setzen wir $x_2 = k = 1 + x_1$, d. h. berechnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Aufenthaltes zwischen dem Teilstriche k und $k+1$ des Mikrometers und bezeichnen diese mit w_k, so erhalten wir

$$w_k = e^{-\frac{\varepsilon}{D}k} - e^{-\frac{\varepsilon}{D}(k+1)} = (1 - w_0)^k w_0. \tag{16a}$$

Aus der folgenden Tab. 9, die in der ersten Spalte die Intervalle der Okularmikrometerteile, in der zweiten die beobachteten relativen Verweilzeiten, in der dritten die aus (16a) unter Zugrundelegung des gefundenen w_0 berechneten Werte von w enthält, sieht man, daß im großen und ganzen zwischen den beobachteten und berechneten Werten Übereinstimmung herrscht, daß also die angewandte Methode der relativen Verweilzeiten auf die Sedimentation gerechtfertigt erscheint.

Tabelle 9.

Intervall	w_k (beob.)	w_k (ber.)
0—1	0,656	0,656
1—2	0,196	0,226
2—3	0,124	0,078
3—4	0,024	0,023
4—5	0,000	0,008

Aus Formel (16a) entnehmen wir

$$w_0 = 1 - e^{-\frac{\varepsilon}{D}},$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{D} = -\log(1 - w_0).$$

Für unsren Fall ergibt sich

$$\frac{D}{\varepsilon} = 0{,}937.$$

Wir können noch auf einem anderen Wege zu dem Werte von D/c kommen, indem wir nach (17) den durchschnittlichen Aufenthalt des Teilchens zu bestimmen suchen. Zu diesem Zwecke bestimme ich aus Fig. 8 die Anzahl der Durchgänge der Kurve durch die Geraden mit den Ordinaten 0, 1, 2 ... und habe nun, um die durchschnittliche Ordinate zu finden, jede der Zahlen 0, 1, 2 ... mit ihrer derart gefundenen Häufigkeit zu multiplizieren und durch die gesamte Zahl zu dividieren. Dabei ist zu beachten, daß jede Spitze unserer Kurve als doppelter Durchgang zu zählen hat, da er nach der Beobachtungsmethode tatsächlich einem solchen entspricht.

Die Ausrechnung ergibt

$$\bar{x} = 1{,}298 = \frac{D}{c} .$$

Für die spätere Berechnung nehmen wir aus den beiden gefundenen Werten das Mittel und setzen

$$\bar{x} = \frac{D}{c} = 1{,}118$$

in Längeneinheiten des Okularmikrometers.

Gelingt es nun, außerdem noch die Fallgeschwindigkeit c allein zu ermitteln, so besitzen wir einen Wert von D, den man wieder im Vereine mit c zur Ermittelung der Loschmidtschen Zahl benützen kann, wie es Smoluchowski (l. c.) vorschlägt.

Den Wert der Fallgeschwindigkeit c kann man nun aber ermitteln, ohne eigene Versuche an demselben Teilchen dazu anstellen zu müssen, was mit experimentellen Schwierigkeiten verbunden wäre, die man so umgehen kann. Wir können nämlich annehmen, daß die reflektierende Wirkung des Bodens verschwunden ist, wenn sich das Teilchen in einer vom Boden genügend weit entfernten Spitze unserer Kurve in Fig. 8 befindet. Bestimmen wir dann aus der Figur die Zeit, die es braucht, um zum ersten Male den Boden zu erreichen und teilen diese Zahl durch die gesamte Fallstrecke, so erhalten wir das Reziproke der gesuchten Fallgeschwindigkeit, wenn wir für eine größere Anzahl von Spitzen die Berechnung durchführen und aus den gefundenen Werten das Mittel nehmen. Zur Berechnung herangezogen wurden die am weitesten vom Boden entfernten Spitzen $x = 4$ und $x = 3$, aus denen sich

im Mittel für die Fallzeit über einen Teilstrich ergibt $\bar{t} = 5{,}24$ oder

$$c = \frac{1}{\bar{t}} = 0{,}1905.$$

Um nun zum Werte für die Loschmidtsche Zahl zu gelangen, brauche ich bloß Formel (12) anzuwenden, die durch Einführung von x an Stelle von D/c die Form annimmt:

$$N = \frac{RT}{18\pi\bar{x}}\sqrt{\frac{2g(d-d_0)}{\zeta^3 c^3}}, \tag{12a}$$

in der die Buchstaben die früher erklärte Bedeutung haben.

Zur Berechnung haben wir nun zu setzen:

$$R = 8{,}315\cdot 10^7,\ T = 298,\ g = 981,\ d - d_0 = 0{,}194,\ \zeta = 0{,}0102,$$
$$\bar{x} = 1{,}118\cdot 1185\cdot 10^{-4},\ c = 0{,}1905\cdot 1{,}185\cdot 10^{-4}.$$

Durch Einsetzen in Formel (12a) ergibt sich

$$N = 64\cdot 10^{22},$$

was mit den auf anderem Wege erhältlichen Werten in bester Übereinstimmung steht.

Was die Methode anlangt, möchte ich noch bemerken, daß sie, wie bereits Smoluchowski erwähnt, einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der Perrinschen bedeutet, der gegenüber sie sich durch bedeutend größere Einfachheit auszeichnet. Mir scheint aber der von mir benutzte Weg des Markierens der Passagen durch die Teilstriche eines festen Mikrometers gegenüber der von Smoluchowski vorgeschlagenen Methode der Aufzeichnung der Lage des Teilchens in äquidistanten Zeitpunkten einen Vorteil zu besitzen, da sie erstens experimentell viel einfacher zu realisieren ist und zweitens die aufgenommene Reihe direkt gleichzeitig auch den Wert der Fallgeschwindigkeit liefert, ohne daß man dazu eigene Versuche an demselben Teilchen anstellen müßte, was wieder eine experimentelle Erleichterung bedeutet.

Die bis jetzt angestellten Betrachtungen illustrieren den sich nach genügend langer Zeit bei einer großen Anzahl von Teilchen einstellenden statistischen Gleichgewichtszustand und zeigen, daß man ihn auch durch Beobachtung einer Zeitgesamtheit an einem Einzelteilchen darstellen kann. Da dieser Gleichgewichtszustand das Maximum der Entropie darstellt, demonstrieren also die mit der Theorie übereinstimmenden Versuchsergebnisse die „Irreversibilität".

Gerade die Beobachtung des Einzelteilchens gibt nun aber auch die Möglichkeit, die im Gegensatze zum 2. Hauptsatze stehende prinzipielle Reversibilität im Laufe der Zeit vor Augen zu führen. Wie man aus der Kurve 3 ersieht, ist der Boden allerdings als Aufenthalt extremer Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet, doch werden von dem Teilchen entgegen dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik innerhalb genügend langer Zeit tatsächlich auch Punkte in größerer Entfernung vom Boden erreicht, wobei sich das Teilchen entgegen der Schwere bewegen muß und daher auf Kosten der inneren Energie des umgebenden Mediums Arbeit leistet. Da die Entropie des Systems in diesem Falle einfach eine monotone Funktion des Bodenabstandes ist, kann man qualitativ die Kurve direkt als Entropiekurve auffassen, wodurch auf eine in die Augen springende Weise die Auffassung der Entropie im Boltzmannschen Sinne als Zustandswahrscheinlichkeit plausibel wird. Die Kurve hat ganz den Charakter der vielumstrittenen Boltzmannschen *H*-Kurve, eine Kurve, von der Boltzmann bekanntlich die scheinbar paradoxe Behauptung aufstellte, daß sie überall ein Maximum besitzen müßte. Nun sieht man tatsächlich, daß die Kurve überall, wo sie sich etwas weiter von der Ruhelage entfernt, fast sofort wieder nach abwärts geht. Indem man berücksichtigt, daß ja nur die eingetragenen Punkte tatsächlich beobachtet sind, und daß der Charakter der Kurve in den Zwischenpunkten gar nicht bekannt ist, hindert nichts, dieselbe Struktur, wie sie an der ganzen Kurve sichtbar ist, auch an jedem zwischen zwei Beobachtungspunkten befindlichen Kurvenstück in ähnlicher Weise ausgeführt zu denken. Vom mathematischen Standpunkte hat die auf diese Weise beliebig weit geführte Verfeinerung keine Schwierigkeit und es realisiert dann tatsächlich unsere Kurve das, was sich Boltzmann unter seiner *H*-Kurve vorstellt. Vom physikalischen Standpunkte scheint es allerdings, als ob man bei genügender Verfeinerung schließlich doch zu einer differenzierbaren Kurve gelangen müßte, wenn die Vorstellung der kinetischen Theorie ihren Sinn behalten soll. Doch spielt das für die Illustration durch unseren Fall keine Rolle, wie ja die Behauptung Boltzmanns auch nicht in dem streng mathematischen Sinne aufzufassen ist.

Um die Erscheinung der Reversibilität an den Beobachtungen am Einzelteilchen auch theoretisch zu verfolgen, wollen

wir uns die Aufgabe stellen, die Zeit zu bestimmen, die das Teilchen im Mittel braucht, um von dem willkürlich gewählten Ausgangspunkt x_0 nach aufwärts zum ersten Male bis zum Punkte $x = l$ zu gelangen. Die Rechnung soll auf ähnlichem Prinzip, wie in den vorausgehenden Fällen, durch Aufsuchung des den Randbedingungen angepaßten Quellenintegrals der Diffusionsgleichung gelöst werden.

Es handelt sich also um Lösung der Gleichung (2) unter der Randbedingung (14); zu dieser kommt nun aber noch die Bedingung hinzu, daß das Teilchen zur Zeit t zum ersten Male zum Punkte l gelangt sein soll. Er muß also für $x = l$ $u = 0$ sein. Es gelten also die Randbedingungen:

$$(18)\qquad \begin{cases} \text{für } x = 0 & D\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{2}u = 0, \\ \text{„ } x = l & u = 0, \\ \text{„ } t = 0 & u = \Phi(\alpha). \end{cases}$$

Die Lösung ergibt sich analog dem Problem aus der Theorie der Wärmeleitung, wenn eine Platte, in der die Temperaturverteilung zur Zeit Null gegeben ist, an beiden Begrenzungsebenen gegen den umgebenden Raum Wärme ausstrahlt. Dieser Fall ist von Kirchhoff[1]) ausführlich behandelt worden, an dessen Ausführungen ich mich hier anlehne.

Ich setze zunächst

$$u = e^{-\alpha^2 D t}\left(\cos\alpha x - \frac{\varepsilon}{2D\alpha}\sin\alpha x\right),$$

wo α eine noch zu bestimmende willkürliche Konstante bedeutet. Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung (2) und der ersten Randbedingung. Damit auch die zweite befriedigt werde, muß sein

$$e^{-\alpha^2 D t}\left(\cos\alpha l - \frac{\varepsilon}{2D\alpha}\sin\alpha l\right) = 0,$$

oder

$$(19)\qquad \cos\alpha l = \frac{\varepsilon}{2D\alpha}\sin\alpha l.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der transzendenten Gleichung (19) mit α_n, so lautet die allgemeine Lösung

$$(20)\qquad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 D t}\left(\cos\alpha_n x - \frac{\varepsilon}{2D\alpha_n}\sin\alpha_n x\right),$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme. p. 30. Leipzig 1894.

wo die A_n so zu bestimmen sind, daß auch noch die Anfangsbedingung befriedigt wird.

$$\Phi(x) = \sum A_n \left(\cos \alpha_n x - \frac{c}{2D\alpha_n} \sin \alpha_n x\right) = \sum A_n X_n .$$

Wenn wir zur Abkürzung setzen

$$X_n = \cos \alpha_n x - \frac{c}{2D\alpha_n} \sin \alpha_n x .$$

Es handelt sich nun darum, die Koeffizienten A_n zu bestimmen. Man geht hier analog vor, wie bei der Entwicklung einer Funktion in eine Fouriersche Reihe. Man überzeugt sich leicht von folgenden Identitäten:

$$\int_0^l X_n X_m \, dx = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n$$

und

$$\int_0^l X_n^2 \, dx = \frac{\alpha_n^2 + \frac{c^2}{4D^2}}{2\alpha_n^2} l - \frac{c}{4D\alpha_n^2},$$

daher ist

$$\int_0^l \Phi(x) X_n \, dx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^l X_m X_n \, dx = A_n \left(\frac{\alpha_n^2 + \frac{c^2}{4D^2}}{2\alpha_n^2} l - \frac{c}{4D\alpha_n^2}\right),$$

woraus man bei gegebenem Φ die A_n bestimmen kann.

Durch Einsetzung in (20) erhält man unter Berücksichtigung unserer Voraussetzungen über $\Phi(x)$

$$(21) \quad \begin{cases} u = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \\ \left\{ e^{-\alpha_n^2 D t} \, \frac{2D\alpha_n \cos \alpha_n x - c \sin \alpha_n x}{(4D^2\alpha_n^2 + c^2) l - 2Dc} \left(2D\alpha_n \cos \alpha_n x_0 - c \sin \alpha_n x_0\right) \right\}, \end{cases}$$

woraus sich das gesuchte w durch Einsetzung in

$$w = u \, e^{-\frac{c}{2D}(x - x_0) - \frac{c^2 t}{4D}}$$

ergibt.

Analog wie bei den Betrachtungen über die Erstpassagezeiten im I. Teil dieser Arbeit erhalten wir daraus endlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit (unter Berücksichtigung von [19]):

$$(22)\quad \begin{cases} K(t)\,dt = -D\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=l} dt = \dfrac{2D}{c}\, e^{-\frac{c}{2D}(l-x_0)-\frac{c^2 t}{4D}} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ e^{-\alpha_n^2 D t}\, \frac{\alpha_n \cos \alpha_n l}{l-\frac{2Dc}{4D^2\alpha_n^2+c^2}}\,(2D\alpha_n \cos\alpha_n x_0 - c\sin\alpha_n x_0)\right\} dt. \end{cases}$$

Durch Ausrechnung kann man sich in der Tat überzeugen, daß $\int_0^\infty K(t)\,dt = 1$ erfüllt ist.

Der gesuchte Mittelwert der Zeit also, die das Teilchen braucht, um vom Ausgangspunkte x_0 entgegen der Schwere bis zum Punkte $x = l$ zu gelangen, ist daher gleich

$$\bar{l} = \int_0^\infty K(t)\,dt = \frac{32D^2}{c}\, e^{-\frac{c}{2D}(l-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos\alpha_n l (2D\alpha_n \cos\alpha_n x_0 - c\sin\alpha_n x_0)}{(4D^2\alpha_n^2+c^2)[(4D^2\alpha_n^2+c^2)l - 2Dc]}.$$

Die Formel läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man eine Funktion so finden kann, daß ihre Entwicklung nach den Größen X_n gerade die obenstehende Gestalt hat. Die etwas umständliche Rechnung übergehe ich und schreibe gleich das Resultat an, von dem man sich nachträglich überzeugen kann, daß es mit der oberen Formel identisch ist:

$$(23)\qquad \bar{l} = \frac{1}{c}\left\{ x_0 - l + \frac{D}{c}\left(e^{\frac{c}{D} l} - e^{\frac{c}{D} x_0}\right)\right\}.$$

Wir wollen die Formel in etwas anderer Gestalt schreiben, indem wir $l = x_0 + b$ setzen, d. h. wir fragen nach der Mittelzeit, die das Teilchen braucht, um sich vom Punkte x_0 zum ersten Male um die Strecke b nach aufwärts zu bewegen.

$$(23a)\qquad \bar{l} = \frac{1}{c}\left\{ -b + \frac{D}{c}\, e^{\frac{c}{D} x_0}\left(e^{\frac{c}{D} b} - 1\right)\right\}.$$

Durch Entwicklung von $e^{\frac{c}{D} b}$ nach Potenzen des Exponenten leitet man für den Grenzfall $c = 0$ die Formel ab:

$$(23b)\qquad \bar{l}_0 = \frac{b^2}{2D} + \frac{b x_0}{D}.$$

Diese Formel geht für $x = 0$ in die für die mittlere *doppelseitige* Erstpassagezeit über, was man von vornherein allein vermöge des Spiegelungsprinzips hätte voraussagen können, während für große Werte von x_0 auch $\bar{l}_0$ sehr groß

wird, wie es die Formel für die mittlere *einseitige* Erstpassagezeit verlangt, denn in diese muß ja (23b) bei genügender Entfernung vom Boden jedenfalls übergehen.

Formel (23b) speziell kann man natürlich auch auf einfacherem Wege erhalten, wenn man gleich zu Anfang der Rechnung $c = 0$ einführt.

Formel (23a) läßt sich an den Versuchsergebnissen unmittelbar verifizieren, indem man aus Fig. 8 die Zeiten bestimmt, die zwischen der Passage der Kurve durch einen Teilstrich k bis zu der durch den Teilstrich $k+1$ verlaufen, und aus ihnen das Mittel nimmt. Tab. 10 enthält für verschiedene k die beobachteten und die aus Formel (23a) berechneten Werte von $\bar{t}$ nebeneinander. Man sieht, daß mit Ausnahme von $k = 2$ die Übereinstimmung recht befriedigend ist, daß daher die angewandte Überlegung auf diesen Fall zulässig erscheint.

Tabelle 10.

k	$\bar{t}$ (beob.)	$\bar{t}$ (ber.)
0	6,97	5,2
1	25,81	25,0
2	22,82	73,5
3	190,25	192

Damit wollen wir nun die Betrachtungen über die Sedimentation abschließen und uns den eingangs erwähnten über die Erscheinungen der Schwankungen zuwenden.

C. Schwankungserscheinungen.

Hat man eine große Anzahl ähnlicher Substanzteilchen, die dem Einfluß der Brownschen Bewegung unterworfen sind, so kann man makroskopisch, wie bereits ausführlich erörtert, die Veränderungen ihrer Konzentration als Funktion von Ort und Zeit erhalten durch Lösung der (makroskopischen) Diffusionsgleichung. Die Übertragung auf die Bewegung eines Einzelteilchens hat uns gelehrt, daß die innerhalb langer Zeiträume von einem solchen Teilchen dargestellte Zeitgesamtheit sich analog verhält. Gleichzeitig sehen wir aber, daß innerhalb kurzer Zeitstrecken die Sache gerade umgekehrt ist; die Bewegung des Teilchens läßt sich dann mittels der makroskopischen Überlegungen nicht mehr verfolgen, der Vorgang wird vollständig ungeordnet.

Die Theorie der Konzentrationsschwankungen, wie sie von Smoluchowski und anderen[1]) aufgestellt wurde, hat gezeigt, wie man noch diese scheinbar regellosen Schwankungen einem statistischen Gesetze unterordnen kann und für die Größe und Geschwindigkeit dieser Schwankungen Formeln aufgestellt. Diese Formeln für die Konzentrationsschwankungen in einer Emulsion sind aber natürlich weit allgemeinerer Natur und lassen sich jedenfalls auf jede Reihe von Zahlengrößen anwenden, wenn dieselben so beschaffen sind, daß man sie als statistische Abweichungen einer Durchschnittsgröße auffassen kann.

Die Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen, wie sie im ersten Teil dieser Arbeit dargestellt wurde, ist nicht von dieser Art; denn die Verschiebungen des Teilchens aus seiner Anfangslage sind nicht statistische Abweichungen von einer Durchschnittslage, da jeder Teilchenlage gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt. Wohl aber lassen sich auf die Beobachtungen des II. Teiles über die Bewegung in der Nähe des Gefäßbodens diese Formeln anwenden, da wir ja gesehen haben, daß tatsächlich die Entfernung des Teilchens vom Boden einen Durchschnittswert besitzt, und daß sich die Entfernung im allgemeinen jedenfalls als statistische Abweichung von diesem Durchschnittswert darstellen läßt.

Man kann daher versuchen, die Formeln für die Konzentrationsschwankungen auf diese Erscheinungen zu übertragen, indem man statt der durchschnittlichen Teilchenzahl pro Volumeinheit die durchschnittliche, und statt der beobachteten Teilchenzahl die beobachtete Entfernung vom Boden einführt, gemessen in Teilstrichen des Okularmikrometers. Wenn die Übereinstimmung auch nicht immer quantitativ streng ist, so ist jedenfalls die qualitative Zulässigkeit dieser Übertragung aus dem folgenden ersichtlich.

Für die relative Häufigkeit einer bestimmten Abweichung von der Durchschnittslage ergibt sich bei der erwähnten Übertragung folgende Formel:

$$w(n) = \frac{e^{-\nu}\,\nu^n}{n!}, \tag{24}$$

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 560ff. 1916; siehe daselbst auch ausführliche Literaturangaben.

worin n die beobachtete, ν die durchschnittliche Bodendistanz bedeutet. Für ν hatten wir im vorigen Kapitel gefunden:

$$\nu = 1{,}298\,.$$

Unter Zugrundelegung dieses Wertes ergibt sich für $n = 1, 2 \ldots$ Formel (24), die Werte k (ber.), während die aus Fig. 8 entnommenen Häufigkeiten, die zur Berechnung von ν bereits herangezogen wurden, die Werte k (beob.) der folgenden Tab. 11 liefern.

Tabelle 11.

n	k (beob.)	k (ber.)
0	40	42
1	56	55
2	34	36
3	20	15
4	4	5
5	0	1

Bezeichnet man dasjenige, was der „Verdichtung" bei Konzentrationsschwankungen entspricht, mit

$$\delta = \frac{n - \nu}{\nu},$$

so erhält man nach Smoluchowski (l. c.) folgende Formel für diejenige Größe, die man auch nach der Übertragung als „mittlere Schwankung" bezeichnen wird:

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \tag{25}$$

während $\overline{\delta}$ selbstverständlich gleich Null sein muß. Berechnet man aus den Angaben der Tab. 11 die Werte δ^2 und die ihnen zukommenden relativen Häufigkeiten und bildet so die Größe $\overline{\delta^2}$, so ergibt sich

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{0{,}682} = 0{,}826\,,$$

während mit Benützung des früher gefundenen Wertes ν folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0{,}877\,.$$

Die Formeln für die „Schwankungsgröße" bleiben also auch auf diese Übertragung anwendbar.

Wir wollen nun auch noch die Resultate betreffend die „Schwankungsgeschwindigkeit" auf unseren Fall anwenden. Die betreffenden Formeln lauten so:

Bezeichnet man mit $\overline{\Delta_n}$ die in der Zeit t eintretende durchschnittliche Änderung der Teilchenzahl des Kolloids bei der Ausgangszahl n, so ist

$$\overline{\Delta_n} = (\nu - n)\, P, \tag{26}$$

wo P eine vom speziellen Mechanismus der Emulsion abhängige Funktion ist. Ist ferner $\overline{\Delta^2}$ das allgemeine Änderungsquadrat bei beliebiger Ausgangszahl, so gilt

$$\overline{\Delta^2} = 2\,\nu\, P. \tag{27}$$

Man kann $\overline{\Delta_n}$ als die Änderungsgeschwindigkeit auffassen, und als solche habe ich sie auf folgende Weise auf den hier behandelten Fall übertragen.

Von einer bestimmten Höhe n ausgehend, bestimme ich aus Fig. 8 die Zeiten, die notwendig sind, damit sich das Teilchen zum Nachbarteilstriche bewegt, wobei ich diese positiv rechne, wenn das Teilchen sich *gegen* die Durchschnittshöhe *hin* bewegt hat, negativ dagegen, wenn es sich *von* dieser *entfernt* hat. Macht man ferner die vereinfachende Annahme, daß sich das Teilchen in der Zwischenzeit geradlinig und gleichförmig bewegt[1]), so stellen die reziproken Werte dieser Zeiten die Änderungsgeschwindigkeiten, also die Größen Δ_n dar, und ihr Mittelwert das gesuchte $\overline{\Delta_n}$. Auf ähnliche Weise erhält man die Werte von $\overline{\Delta^2}$.

Die Berechnung ergab folgende Werte:

$$\frac{\Delta_3}{3-\nu} = 0{,}275, \quad \frac{\Delta_2}{2-\nu} = 0{,}201, \quad \frac{\Delta_0}{0-\nu} = 0{,}277,$$

die nach Formel (26) konstant gleich P sein sollten; die Forderung ist annähernd erfüllt und ergibt als Mittelwert für P den Betrag

$$P = 0{,}251.$$

Die Berechnung von $\overline{\Delta^2}$ ergibt

$$\overline{\Delta^2} = 0{,}582,$$

während sich mit Benutzung des oben angeführten Wertes von P und ν ergibt:

$$2\,P\,\nu = 0{,}561.$$

1) Diese Annahme, die natürlich sicher unrichtig ist, muß man nicht machen, wenn man die auf diese Weise erhaltenen Werte der Δ_n als mittlere Werte der Änderungsgeschwindigkeit im erwähnten Intervalle ansieht.

Es liefert also ersichtlicherweise auch Formel (27) annähernd das richtige Resultat.

Zum Schlusse wollen wir noch den von Smoluchowski eingeführten Begriff der Wiederkehrzeit auf unseren Fall übertragen. Unter der Wiederkehrzeit Θ versteht er die im Mittel notwendige Zeit, damit das betrachtete System einen zur Zeit Null innegehabten Zustand, der vom normalen abweicht, zum ersten Male wieder annimmt. Dabei muß man beachten, ob die Beobachtung intermittierend (in gleichen Intervallen etwa) oder kontinuierlich vorgenommen wird. Für unseren Fall haben wir die Formel für kontinuierliche Beobachtung anzuwenden; sie lautet folgendermaßen:

$$\Theta_n = K\left(\frac{n!}{e^{-\nu}\nu^n} - 1\right)\frac{1}{n+\nu}, \tag{28}$$

wo K eine vom speziellen Mechanismus abhängige Konstante ist.

Die Berechnung wurde so vorgenommen, daß für eine Anzahl von Werten n die Wiederkehrzeiten Θ_n, die sich aus Fig. 3 ja direkt ablesen lassen, bestimmt wurden und aus ihnen für jedes n das Mittel genommen wurde. Diese Mittelwerte sind in Tab. 12 als Θ_n (beob.) eingetragen. Unter Zugrundelegung dieser Werte berechnete ich nun die Ausdrücke:

$$\frac{\Theta_n(n+\nu)}{\frac{n!}{e^{-\nu}\nu^n} - 1},$$

die nach Formel (18) konstant sein sollen. Jeder dieser Ausdrücke wurde nun als Gewicht mit der ihm zukommenden Häufigkeitszahl (Formel 24) multipliziert und alle diese Wert addiert. Die Summe gibt dann den wahrscheinlichsten Wert von K, der sich zu $K = 8{,}69$ ergab.

Mit diesem Werte für K wurden nun aus Formel (28) die Werte Θ_n (ber.) der Tab. 12 ausgerechnet. Man sieht auch hier wieder, wie bei den vorangehenden Beispielen, daß die Übertragung der Formeln auf den hier behandelten Fall zu durchaus befriedigenden Übereinstimmungen führt.

Tabelle 12.

n	Θ_n (beob.)	Θ_n (ber.)
0	18,72	20,6
1	6,70	7,42
2	11,01	9,29
3	18,72	19,0
4	93,60	50,3

Mit diesen Betrachtungen, die sich wohl noch ausdehnen ließen, will ich meine Arbeit vorläufig abschließen; die in ihrem Verlaufe erwähnten ungeklärten Ergebnisse bilden den Gegenstand fortgesetzter Untersuchungen und sollen erst nach deren endgültigem Abschlusse veröffentlicht werden.

Prag, im Juni 1917.

(Eingegangen 7. Juli 1917.)

2. *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation.* *Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung von P. Gerber*[1]*;* *von M. von Laue.*

Obwohl gleichzeitig von berufener astronomischer Seite in diesen Annalen dargelegt wird, daß der von Gerber aufgestellte Ausdruck für das Gravitationspotential bei folgerichtiger Anwendung nicht zu Gerbers Bewegungsgleichungen und somit auch nicht zu seiner Formel für die Perihelbewegung führt[2]) wollen wir hier doch die Frage aufwerfen, inwiefern seine Überlegungen überhaupt einen Zusammenhang zwischen den Planetenbahnen und der Ausbreitung der Gravitationswirkungen herstellen. Wir müssen uns freilich versagen, seinen Überlegungen Schritt für Schritt nachzugehen, um ihre Unrichtigkeit zu beweisen; es fordern gar zu viele Punkte darin zum Widerspruch heraus, und andere Stellen sind wiederum viel zu unklar und verwaschen. Wir wollen uns vielmehr zunächst nur an den mathematischen Ausdruck für das Gravitationspotential

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

halten.

Hierin ist r der *im gleichen Augenblicke herrschende* Abstand des angezogenen vom anziehenden Körper, und die Geschwindigkeit dr/dt, mit der er sich ändert, bezieht sich ebenfalls auf den gleichen Zeitpunkt. Breitet sich aber die Gravitation mit endlicher Geschwindigkeit aus, so kann der physikalische Zustand am Ort des angezogenen Körpers nicht bestimmt sein durch die *gleichzeitige* Lage und Geschwindigkeit des anziehenden, sondern nur durch seine Lage und

1) P. Gerber, Ann. d. Phys. 52. p. 415. 1917.
2) H. v. Seeliger, Ann. d. Phys. 53. p. 131. 1917.

Geschwindigkeit *in einem bestimmten früheren* Augenblick. Denken wir uns z. B. den anziehenden Körper aus dem Ruhezustand durch einen äußeren Eingriff plötzlich in Bewegung gesetzt, so muß eine endliche Zeit vergehen, bis sich dies an einem entfernten Orte bemerkbar macht. Die verzögerten Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\left[r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\right]_{t-\frac{r}{c}}}, \qquad \mathfrak{a} = \frac{e}{4\pi}\left[\frac{\mathfrak{v}}{r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}\right]_{t-\frac{r}{c}},$$

welche die Elektrodynamik für eine mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Punktladung e aufstellt[1]), geben dies durch den Index $t - r/c$ zu erkennen, da er bedeutet, daß sowohl für r wie für $\mathfrak{v}$ die zu der früheren Zeit $t - r/c$ geltenden Werte zur Berechnung des Potentials für die Zeit t zu benutzen sind. *Gerbers Ansatz für das Gravitationspotential ist also mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit unvereinbar.*

Die Sache liegt ähnlich wie beim Weberschen Grundgesetz der Elektrodynamik, mit welchem Gerbers Potentialansatz überhaupt eine gewisse Ähnlichkeit hat. Obwohl das „effektive Potential" des Weberschen Gesetzes

$$\frac{ee'}{r}\left[1+\frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

die Lichtgeschwindigkeit c enthält, verficht Weber durchaus den Standpunkt der Fernwirkung.[2])

Sodann behandelt Gerber bei seiner Aufstellung und Verwertung der Bewegungsgleichungen den anziehenden Körper, die Sonne, als im Koordinatenanfang ruhend. Das zugehörige Gravitationsfeld wird dann naturgemäß zeitlich unveränderlich, ob nun die Ausbreitung der Gravitation Zeit erfordert oder nicht. Wie soll sich unter diesen Umständen in der errechneten Bewegung des Planeten eine Wirkung der Ausbreitungsgeschwindigkeit äußern?

Freilich weiß Gerber, daß in dieser Annahme eine Vernachlässigung steckt, und er versucht dies durch die Abänderung der Sonnenmasse wieder gut zu machen, welche man in der Newtonschen Theorie dazu benutzt.[3]) Diese

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz, Encykl. d. mathemat. Wissensch. 5. Artikel 14, Nr. 17.

2) Vgl. hierzu Encykl. d. mathem. Wissensch. 5. Artikel 12, Nr. 6 u. 7.

3) P. Gerber, l. c. p. 437 unten.

Korrektion findet in der alten Theorie ihre Berechtigung durch den Impulssatz, demzufolge die Summe aus dem Impuls der Sonne und dem des Planeten unveränderlich, und zwar gleich Null ist. Dies aber beruht wieder auf der Fernwirkung der Gravitation, denn nur bei Fernwirkung kann jede Änderung des Sonnenimpulses *sofort* durch eine Änderung des Planetenimpulses ausgeglichen werden. Sonst bedarf es dazu, wenn es überhaupt einen Ausgleich gibt, der vom Abstand abhängigen Übertragungszeit. Ist somit in Gerbers Theorie diese Korrektion unberechtigt, insofern ja gerade eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit eingeführt werden soll, so ist sie andererseits nicht imstande, diese Geschwindigkeit mathematisch einzuführen, da sie mit ihr nicht zusammenhängt. *Selbst wenn die Ausgangsformel für das Potential die Ausbreitungsgeschwindigkeit zum Ausdruck brächte, könnte bei der weiteren Behandlung, die Gerber seinem Problem angedeihen läßt, die errechnete Planetenbewegung deren Einfluß nicht zeigen.*

Wenn die Einsteinsche Theorie der Gravitation[1]) die richtige Perihelbewegung für den Merkur liefert, so liegt dies, da auch sie dabei die Sonne als ruhend ansieht, nicht an der Art, wie sich nach ihr die Gravitation ausbreitet, sondern an anderen ihrer Züge. Wir möchten in diesem Zusammenhange auch darauf hinweisen, daß die Nordströmsche Theorie der Gravitation, trotzdem sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c annimmt, die Perihelbewegung sogar mit dem verkehrten Vorzeichen liefert.[2])

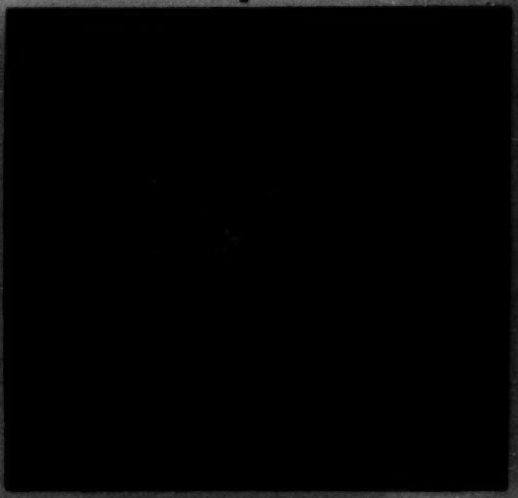
1) A. Einstein, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1916. p. 688.

2) S. Nordström, Ann. d. Phys. 42. p. 533. 1913; 43. p. 1101. 1914; vgl. auch M. v. Laue. Jahrbuch der Radioactiv. u. Elektronik 14. Heft 3. 1917. (Im Erscheinen begriffen.)

(Eingegangen 28. Juni 1917.)

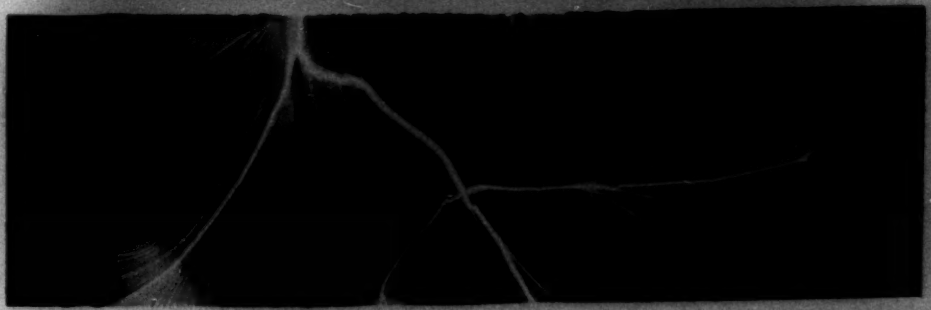
1

2



3

4



Max. Toepler.

Max. Toepler.

3. *Über den inneren Aufbau von Gleitbüscheln und die Gesetze ihrer Leuchtfäden;* von *Max Toepler.*

(Hierzu Tafel I und II.)

Gleitbüschel und Gleitfunken sind von mir in früheren Arbeiten eingehend untersucht.[1]) Das Interesse wendete sich hierbei bisher überwiegend der Tatsache zu, daß man mit Spannungen, die im Vergleiche zu den für Entladung im freien Raume erforderlichen klein sind, doch lange Gleitfunken erzwingen kann (z. B. mit 60 K. V. bis zu 2 m lange Funken). Dementsprechend beziehen sich die bisher aufgefundenen Gesetzmäßigkeiten fast ausschließlich auf die Gesamtdimensionierung (Länge und Breite) in ihrer Abhängigkeit von der Höhe der Spannung, der Art der Spannung (konstant oder wechselnd), der Natur der Oberfläche auf der das Gleiten stattfindet, des Materials und der Dicke des Isolators.

Eine eingehende Analyse der Struktur der Gleitbüschel fehlt meines Wissens noch. Mit Hilfe des Anblickes läßt sich bei so kurz dauernden und in den Einzelheiten sehr lichtschwachen Erscheinungen wenig erreichen; bekannt ist aber[2]),

1) M. Toepler, Abh. Isis, Dresden 1897; Wied. Ann. 66. p. 1061. 1898; Ann. d. Phys. 21. p. 193. 1906; 23. p. 867. 1907; Abh. Isis, Dresden 1907; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. p. 422. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 743. 1907; Ann. d. Phys. 25. p. 745. 1908.

Daß es sich bei Bildung von Gleitbüscheln auf rückwärts metallisch belegten Isolatorplatten (Glas, Glimmer usw.) noch um Phänomene handelt, die *wesentlich in der Luft* am Isolator erfolgen, wurde dadurch bewiesen, daß die gleitende Entladung dieselbe Ausdehnung und Ausbildung besitzt auf glatten, gerauhten, befeuchteten oder auch mit Schwefelmennige Pulver bestäubten Isolatoroberflächen, unabhängig (bei gleichbleibender Kapazität der ebenen Oberflächeneinheit) vom Material des Isolators.

2) Vgl. z. B. die Aufnahmen von H. Pflaum, Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga 40. 1898, Taf. IV u. V, daselbst auch eine Zusammenstellung der Literatur.

daß man sehr schöne Spuren mit vielen Einzelheiten der sogen. Lichtenbergschen Figuren, erhält, wenn man die Gleitbüschel direkt auf der Schichtseite photographischer Platten entstehen läßt.

Aus den angeführten Messungen wissen wir, daß die einfachste Art von Gleitbüschelbildung dann eintritt, wenn man an die Gleitpole ganz *plötzlich* eine Spannung anlegt, welche dann wenigstens für die kurze Zeit der Gleitbüschelbildung *konstant* bleiben muß.

1. Versuchsanordnung.

Es bedeutet in der Skizze, Fig. 1, *M* eine vielplattige Toeplersche Influenzmaschine, *F* eine regulierbare Funkenstrecke zwischen Messingpolkugeln von je 6 cm Durchmesser,

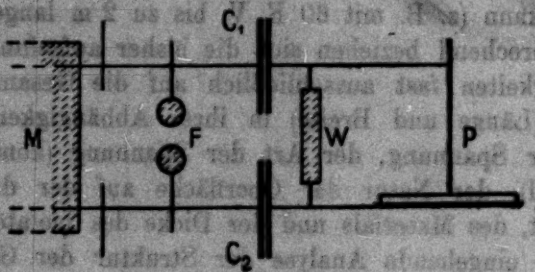


Fig. 1.

C_1 und C_2 zwei Kapazitäten von je 80000 cm, *W* einen Flüssigkeitswiderstand von etwa 5—10 Millionen Ohm; neben diesen Widerstand war das Gleitsystem, Gleitpol *P* und rückwärts belegter Glasblock *G*, geschaltet. Alle Leitungen der Versuchsanordnung bestanden aus möglichst kurzen, mindestens 0,2 cm starken Kupfer- oder Messingdrähten, gegen Ausstrahlung durch übergezogene Glasrohre geschützt, sie wurden möglichst selbstinduktionslos verlegt.

Das an *W* nebengeschaltete Gleitsystem bestand aus dem Gleitpole *P*, einem 20 cm langen 0,2 cm dicken Kupferstabe mit abgerundetem Ende; dieser stand senkrecht auf der obenliegenden Schicht der photographischen Platte *G*; deren Rückseite war *voll*, d. h. nach allen Richtungen hin gegenüber dem Gleitpole der Schichtseite mit Stanniol belegt, welches

den zweiten Pol des Systems bildete.[1]) Um den Einfluß der *Kapazität der Plattenoberflächeneinheit* festzustellen wurden nicht nur photographische Platten verschiedener Dicke (in den Tabellen die Platten von 0,1—0,2 cm) benutzt. Es wurde weiter dann eine, zwei, schließlich vier Glasplatten noch zwischen die photographische Platte und das Stanniol zwischengelegt. Die schmalen Zwischenräume wurden hierbei mit Äthylalkohol ausgegossen; da letzterer ein Nichtleiter von großer Dielektrizitätskonstante (gleich 26 gegenüber der des Glases von etwa 6) ist, so müssen hierdurch die aufeinandergeschichteten Platten dielektrisch *wie ein einziger Glasblock* wirken. In der Tab. I sind die Dicken von 0,2—0,4 cm durch eine Zusatzscheibe, die Dicken 0,4—0,5 cm durch zwei Scheiben, die letzte Dicke 0,56 cm durch drei Scheiben erhalten. In Tab. II und V war nichts zwischengelegt; in Tab. III und VI eine einzige 0,496 cm dicke 30 × 40 cm große Spiegelglasscheibe auf 30 × 30 cm großer Stanniolfläche, in Tab. VII waren zwei von der Gesamtdicke 0,784 cm in Tab. IV und VIII waren vier solche Spiegelglasplatten, geschnitten aus ein und derselben großen Spiegelglasscheibe mit der Gesamtdicke 1,508 cm zwischengelegt. Die elektrostatische Abdichtung erfolgte auch hier mit Äthylalkohol.

Der zwischen die Batterieaußenbelege geschaltete Widerstand W ermöglicht deren Ladung. Bricht dann bei F ein Funken aus, so entsteht beiderseits W, also auch an den Gleitpolen *plötzlich* eine Spannung. Die wirksame Kapazität der Versuchsanordnung betrug 40000 cm, war also so groß, daß durch das Abfließen von Elektrizität zur Bildung von Gleitbüscheln um P herum auf G keine wesentliche Herabsetzung der Spannung eintrat. Die Spannung am Gleitpole

1) Mit dieser Versuchsanordnung erhielt ich die regelmäßigst gebauten Gleitspuren.

Wird an Stelle der rückwärtigen vollen Belegung als Gegenpol auch wieder ein Metallstab gewählt, so entsteht auf beiden Seiten der Glasplatte gleichzeitig je ein Gleitbüschel; diese beeinflussen sich in ihrer Ausbildung, so daß letztere wenig regelmäßig ausfällt.

Legt man auf die Nichtschichtseite der Platte einen Stanniol*streifen*, so erscheint die Gleitfigur auf der Schichtseite in Richtung des Streifens lang ausgezogen; durch diesen Kunstgriff erhält man auch nur wenig regelmäßig gebaute, aber, wie früher gezeigt, besonders *lange* Gleitbüschel (und Gleitfunken).

springt also bei Ausbruch des Funkens F plötzlich (etwa innerhalb 10^{-7} sec)[1]) auf den der Funkenlänge F entsprechenden, also angebbaren Betrag. Da die Wachstumsgeschwindigkeit von Gleitbüscheln sehr groß ist (selbst 110 cm lange Gleitbüschel bilden sich innerhalb $20 \cdot 10^{-6}$ sec)[2]), so ist also trotz Vorhandenseins von W die Spannung am Gleitpole P dann weiterhin während der Gleitbüschelbildung als *konstant* anzusehen.[3])

II. Messungen an negativen Gleitfiguren.

Auf einer Reihe von Platten wurden Serien von Aufnahmen derart gemacht, daß an jede folgende Platte unter sonst ungeänderten Versuchsbedingungen jeweils eine etwas höhere Spannung angelegt wurde. Die Photogramme[4]) zeigen keine Folge von gleichartig gestalteten Spuren kontinuierlich wachsender Größe. Nur bei kleinen Spannungen zeigten sich kreisförmige Bilder (System zahlreicher radialer Fäden wie Photogramm 1 und 2), deren Durchmesser einfach mit der Spannung wuchs. Von einer bestimmten, wenn auch quantitativ nicht ganz festliegenden Spannung an, erscheint dann plötzlich ein zweites halbkreisförmiges Büschel an das Kreisbüschel um den Gleitpol irgendwo seitlich angesetzt, verbunden mit dem Gleitpole durch einen geradlinigen das Kreisbüschel radial durchsetzenden Ladungskanal. Weiterhin erhält man dann bei noch

---

1) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 221. 1906.

2) Vgl. l. c. p. 214.

3) Dauert die Spannung nur kurze Zeit an, oder sinkt sie z. B. wegen ungenügender Größe der Kapazitäten C_1 und C_2 beim Abfließen von Elektrizität zur Ladung der Gleitspur (oder durch W hindurch), so wird Wachstum und Ausbildung der Gleitspur beeinflußt, vgl. l. c., p. 208, sowie besonders M. Toepler, Ann. d. Phys. 23. p. 868, Fig. 1. 1907.

Hr. S. Mikola, Physik. Zeitschr. 18. p. 158. 1917, hat in seiner Veröffentlichung über Lichtenbergsche Figuren keine Angabe über die Größe der von ihm benutzten Kapazität gemacht. Es ist wohl zu vermuten, daß die quantitativen und auch qualitativen Abweichungen seiner Resultate gegen meine hier angegebenen, wie sie bei den positiven Polbüscheln sich ergeben (siehe Abschnitt V), sich daraus erklären, daß bei Mikola die Spannung während der Büschelbildung nicht konstant blieb.

4) Einige Photogramme sind auf Tafel I und II in natürlicher Größe dargestellt.

höheren Spannungen Aufnahmen mit zwei, drei oder mehr aneinandergereihten Büscheln, wie z. B. die Photogramme 3, 4, 5 und 6 zeigen, und wie in Fig. 2 schematisch dargestellt ist. Schließlich bekommt man die Fläche um den Gleitpol weithin nach allen Seiten bedeckende ausgedehnte Gleitbüschelspuren, aus lauter einzelnen Büscheln aufgebaut, die perlschnurartig auf die sie durchsetzenden Ladungskanäle (Funkenstücke) aufgereiht erscheinen. *Die Aufladung der Fläche um den Gleitpol P erfolgt also in den einzelnen Gleitbüscheln nicht in einem kontinuierlichen Ergusse, sondern ruckweise, mit Wachstumsstufen.*

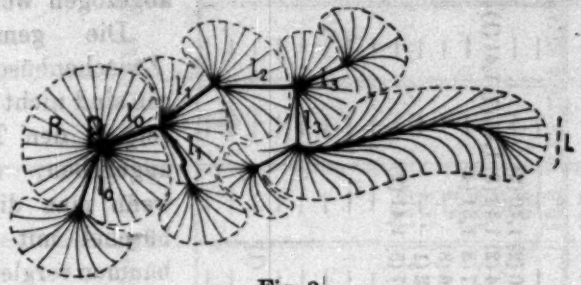


Fig. 2.

Eine voll entwickelte Spur besteht also (vgl. die schematisierte Fig. 2) aus einem kreisförmigen *„Polbüschel"* um den Gleitpol *P* herum (Radius *R*) und einer Anzahl von *„Gleitbüscheln"*, in Fig. 2 deren zwei, ein kurzes und ein längeres. Letztere bestehen bei voller Ausbildung jeweils aus einem *„Gleitbüschelstiele"* l_0, den *„Zwischenbüscheln"* (Längen l_1, $l_2 \ldots l_n$) und den *„Endbüscheln"* auf Hauptstamm und Seitenästen. Wie Fig. 2 andeutet, lassen sich die Größen *R*, l_0, l_1, $l_2 \ldots l_n$ auf jeder einzelnen Photographie mit einiger Sicherheit feststellen. Ferner die gesamte *„Gleitbahnlänge"* *L* jedes einzelnen Gleitbüschels, gemessen vom Pole aus längs des längsten Ladungskanales bis zum fernsten geladenen Punkte. Die früher gemessene *„Gleitbüschellänge"* *f* bedeutet die Luftlinie vom Pole zum fernstgeladenen Plattenpunkte.

Zu den Angaben der nachstehenden Tabb. I—IV ist noch zu bemerken:

Die Größe *R* bedeutet den Radius des Polbüschels, d. h. der radialen Lichtfäden, soweit deren Wachstum nicht durch Gleitbüschel behindert wurde, also bei Vorhandensein letzterer

nur nach Richtungen hin, in denen sich keine Gleitbüschel angelagert finden, z. B. Fig. 2 nach links oben.

Tabelle I.

δ zwischen 18° und 21° C.; b zwischen 74 cm und 75 cm.

a	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l	$l_0/\sqrt{a}$	$l/\sqrt{a}$
0,127	1,74 (4)	1,44 (5)	1,44 (2)	1,41 (2)	—	—	—	1,43 (9)	4,88 (4)	4,02 (9)
0,149	1,58 (2)	1,44 (3)	1,40 (5)	1,44 (2)	1,40 (2)	1,40 (2)	—	1,41 (12)	4,09 (2)	3,66 (12)
0,164	1,89 (5)	1,47 (5)	1,38 (4)	1,53 (3)	1,54 (2)	1,43 (3)	1,41 (1)	1,46 (19)	4,67 (5)	3,61 (19)
0,169	1,67 (3)	1,39 (6)	1,30 (3)	1,33 (3)	1,37 (3)	1,31 (4)	—	1,35 (19)	4,06 (3)	3,27 (19)
0,173	1,76 (2)	1,54 (4)	1,55 (4)	1,72 (3)	1,26 (3)	—	—	1,56 (14)	4,22 (2)	3,78 (14)
0,193	1,75 (3)	1,43 (7)	1,43 (4)	1,44 (5)	1,32 (1)	—	—	1,42 (17)	3,98 (3)	3,24 (17)
0,193	1,74 (2)	1,53 (2)	1,32 (2)	1,52 (4)	1,47 (5)	1,41 (2)	—	1,47 (15)	3,96 (2)	3,34 (15)
0,200	1,61 (2)	1,57 (2)	—	—	—	—	—	1,57 (2)	3,60 (2)	3,51 (2)
0,254	2,6 (2)	1,77 (2)	1,83 (2)	1,88 (2)	—	—	—	1,82 (6)	5,16 (2)	3,62 (6)
0,306	2,65 (2)	1 99 (3)	1,93 (3)	—	—	—	—	1,96 (6)	4,79 (2)	3,55 (6)
0,321	2,4 (1)	2,0 (1)	—	—	—	—	—	2,0 (1)	4,23 (1)	3,53 (1)
0,421	2,88 (4)	2 30 (2)	—	—	—	—	—	2,30 (2)	4,44 (4)	3,55 (2)
0,424	2,53 (4,	2,23 (3)	2,05 (2)	2,15 (2)	2,0 (1)	—	—	2,14 (8)	3,89 (4)	3,28 (8)
0,453	2,28 (3)	2,08 (3)	—	—	—	—	—	2,08 (8)	3,39 (3)	3,10 (8)
0,563	2,98 (2)	2,70 (1)	—	—	—	—	—	2,70 (1)	3,97 (2)	3,60 (1)

Da der Gleitpol P eine Dicke von 0,2 cm besaß, so ist bei den Angaben für R und l_0 in allen Tabellen (auch Tabb. V—VIII) von dem *Zentral*abstande jeweils 0,1 cm abgezogen worden.

Die gemessenen Zwischenbüschellängen sind nicht alle einzeln in den Tabellen angegeben, sondern, wenn man die Gleitbüschel mit Stammbäumen vergleicht, bestehend je aus einer Reihe von Generationen in Hauptlinie und Seitenästen, dann bedeuten l_1, $l_2 \ldots l_n$ jeweils die Mittelwerte der Längen der einzelnen Zwischenbüschelgenerationen auf der betreffenden Platte.

Mit vergrößerter Dicke der Glasschicht und damit vergrößerter Ausdehnung aller Gebilde wächst im allgemeinen auch die Unsicherheit der Festlegung der Größen l_0, l_1, l_2 usw.; vor allem sei darauf hingewiesen, wie wenig öfters der Verlauf des durchgehenden Ladungskanals den *Einzelheiten* des Aufbaues folgt (vgl. z. B. Phot. 5 an der Gabelungsstelle rechts oben), so daß aus Kenntnis des ersteren allein auf letztere nicht zurückzuschließen

Tabellen II und III (unten).

δ zwischen 18,5° und 19,1° C.; b zwischen 74,0 und 75,4 cm.

F	P	a	R	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	L	l	$l_0/\sqrt{a}$	$l/\sqrt{a}$	Bemerkungen
0,50	17,1	0,108	1,81 (3)										
		0,111	1,84 (3)										
		0,110	1,83 (6)										
0,75	25,2	0,157	1,90	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	vgl. Photogramm 1
		0,161	2,20	1,86 (1)	1,73 (3)	1,45 (2)	1,50 (1)	1,30 (1)	9,1	1,56 (7)	4,64 (1)	1,56 (7)	vgl. Photogramm 3
		0,168	2,00										
		0.160	2,03 (3)										
0,50	17,1	0,511	1,23 (4)										
0,75	25,2	0,527	1,90										
1,00	32,6	0,516	2,55	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	vgl. Photogramm 2
		0,569	2,50										
		0,543	2,53 (2)										
1,25	39,7	0,578	3,17	2,80 (3)									
1,40	43,8	0,542	—	3,06 (5)	2,90 (2)	3,0 (1)	2,7 (1)	. . .	13,2	. . . .	. . . .	. . . .	Ausschnitt Photogr. 4
		0,547	3,70	3,10 (4)	2,8 (1)	2,70 (3)			11,4				
		0,547	3,86	3,30 (1)	2,7 (1)				8,3				
		0,548	3,41	3,17 (3)	2,73 (3)	2,8 (1)	2,4 (1)	. . .	16,3	. . . .	. . . .	. . . .	Ausschnitt Photogr. 5
		0,561	3,83	3,43 (3)	3,4 (1)				9,3				
		0,575	3,50	3,05 (2)	—				6,3				
		0,553	3,66 (5)	3,16 (18)	2,86 (8)	2,78 (5)	2,55 (2)		10,8	2,79 (15)	4,25 (18)	3,75 (15)	
1,50	46,4	0,531	3,70	3,15 (2)	3,03 (2)				12,8				
		0,542	3,75	3,30 (4)	2,9 (1)	2,7 (1)	2,75 (2)		14,5				
		0,543	—	3,09 (8)	2,59 (2)	2,58 (3)	2,54 (3)		14,8				
		0,574	3,90	3,13 (3)	3,20 (2)	3,00 (2)	2,95 (2)	. . .	16,3	. . . .	. . . .	. . . .	Ausschnitt Photogr. 6
		0,548	3,78 (3)	3,09 (17)	2,91 (7)	2,74 (6)	2,72 (7)		14,6	2,79 (20)	4,17 (17)	3,77 (20)	

wäre.[1]) In solchen Fällen sind die Längen l_1, l_2 usw. natürlich sachgemäß als Größe der Teilbüschel aufzufassen und abzuschätzen, nicht als Ladungskanalstücke zwischen zwei Knickstellen.

Außer den voranstehend definierten Größen R, l_0, l_1, $l_2 \ldots l_n$, L enthalten die Tabellen noch Angaben über:

δ die Zimmertemperatur in Celsiusgraden,
b den Luftdruck in cm Quecksilber,
F die Primärfunkenlänge in cm bei F in Fig. 1,
P die ausgelöste Spannung am Gleitpole P in Kilovolt,
a die Dicke in cm des Glasblockes zwischen photographischer Schicht oben und Stanniolbelegung unten,
l den Mittelwert in cm jeweils aller l_1, $l_2 \ldots$ bis l_n.

Die den einzelnen Mitteln in Klammern zugesetzten Ziffern bedeuten die *Anzahl* der Einzelwerte, aus denen jeweils das Mittel gezogen werden konnte.

Tabelle IV.

$\delta = 18{,}0°$ C.; $b = 74{,}4$ cm.

F	P	a	R	$(P-4):R$
0,50	17,1	1,626	1,00 bis 1,05	14,1 bis 12,5
0,75	25,2	1,632	1,65 „ 1,70	12,8 „ 12,5
1,00	32,6	1,620	2,35 „ 2,50	12,2 „ 11,4
1,25	39,7	1,696	2,55 „ 2,90	14,0 „ 12,3
1,50	46,4	1,666	3,10 „ 3,40	13,7 „ 12,4
1,50	46,4	1,688	3,00 „ 3,45	14,1 „ 12,2
1,75	52,8	1,683	3,50 „ 4,00	13,9 „ 12,2

III. Zusammenfassung der Messungsergebnisse für negative Gleitfiguren.

Für das Polbüschel ist aus den Tabellen zu errechnen: Der Radius R (in cm) des Polbüschels wächst mit der Spannung P (in Kilovolt) am Gleitpole nach den Interpolationsformeln

$$(1a)\quad \begin{cases} P-2 = 11{,}4 \cdot R \text{ für die Plattendicke } \ldots a = 0{,}16 \text{ cm} \\ P-3 = 11{,}6 \cdot R \text{ „ „ „ } \ldots a = 0{,}55 \text{ „} \\ P-4 = 12{,}2 \cdot R \text{ bis } 13{,}9 \cdot R \text{ für die Dicke } a = 1{,}66 \text{ „} \end{cases}$$

1) Photographien von Blitzen zeigen auch nur die verstärkten Ladungskanäle, aus ihnen ist also kaum auf die feinere Struktur des blitzbildenden Prozesses zu schließen.

Bedenkt man, daß auf den dicksten Platten die gemessenen Werte R wegen der hier eintretenden Unschärfe der Begrenzung der Gleitspuren eher zu klein als zu groß, der Faktor neben R also zu groß ausfallen konnte, so erkennt man, daß der Einfluß der Plattendicke auf diesen Faktor *auffallend gering* ist.

R ist stets größer als l_0. Da die radialen Nachbarfäden neben l_0 an ihren l_0 überragenden *Enden* meist seitlich abgedrängt erscheinen, so folgt, daß im Augenblicke des Durchbruches von l_0 *alle* Radialfäden des Polbüschels um P noch die gleiche Länge, nämlich l_0 besaßen, und daß erst weiterhin (während des Weiterwachsens der Spannung in P und damit der Gleitfigur über l_1, l_2 usw. bis ans Ende sich die ungehinderten Radialfäden des Polbüschels bis zur Länge R weiterbildeten. Das für R gefundene Spannungsgesetz gilt also auch für l_0. *Im Augenblicke des Durchbruches* der weitergleitenden Plattenladung durch den Faden l_0 des Polbüschels hindurch herrscht also am Gleitpole eine Spannung

$$P_0 = 11{,}5 \cdot l_0 + 2{,}5 \text{ Kilovolt.} \tag{2}$$

Dabei hängt aber, soweit sich bisher erkennen ließ, die Gleitbüschelstiellänge l_0, also auch die Durchbruchsspannung P_0 *nicht* von der gesamten an P auftretenden, also nach Durchbruch noch erreichten Spannung P ab.

Es ist l_0 von der Glasplattendicke a abhängig, oder als physikalisch wohl bedingender Größe von der Kapazität c der Plattenflächeneinheit. Es ergibt sich (k Dielektrizitätskonstante des Glases)

aus Tabelle I (mit überwiegend kleinem a) . . . . $l_0 = 4{,}220 \cdot \sqrt{a}$

aus Tabellen II u. III (mit überwiegend großem a) $l_0 = 4{,}210 \cdot \sqrt{a}$

im Gesamtmittel also (aus 78 Einzeldaten)

$$l_0 = 4{,}216 \sqrt{a} = 4{,}216 \sqrt{\frac{k}{4\pi c}}, \tag{3}$$

hierin sind l_0, a und c in Zentimetern gerechnet.

Die Kombination von (2) und (3) ergibt für die Spannung P_0, bei der der Gleitbüscheldurchbruch erfolgt,

$$P_0 = 48{,}5 \sqrt{a} + 2{,}5 \text{ Kilovolt.} \tag{4}$$

Diese Durchbruchsspannung ist nun freilich in Wirklichkeit recht schwankend; sie lag

für $a = 0{,}16$ cm bei etwa 24 KV, die Formel gibt 22 KV
„ $a = 0{,}55$ „ „ „ 39 „ „ „ „ 38 „
„ $a = 0{,}96$ „ „ „ 48 „ „ „ „ 50 „

Die Zwischenbüschellängen *auf jeder Platte* sind nicht nur für jede Generation, sondern auch, wie die Tabellen zeigen, von Generation zu Generation, also allesamt gleich; eine *kleine* Abnahme der Größe mit wachsender Ordnungszahl der Generationen ist vielleicht zu bemerken. Dabei ist die Länge des einzelnen Zwischenbüschels unabhängig davon, ob seine Gestalt einen großen (bis mehr als 180° Öffnung) oder kleinen (bis unter 30°) Fächer, Kreissektor bedeckt.

Für die Abhängigkeit der untereinander gleichen Zwischenbüschellängen l_1, l_2 usw., also auch ihres Mittelwertes l von der Plattendicke a folgt

aus Tabelle I . . . . . $l = 3{,}494 \cdot \sqrt{a}$
aus Tabellen II und III . . . $l = 3{,}781 \cdot \sqrt{a}$

als Gesamtmittel (aus 176 Einzeldaten)

$$l = 3{,}562 \cdot \sqrt{a} = 3{,}562 \sqrt{\frac{k}{4\pi c}}, \tag{5}$$

hierbei sind wieder l, a und c in cm gewertet.

Bei sehr kleiner Kapazität der Plattenflächeneinheit wird also die Gleitspur aus sehr großen Büscheln bestehen.[1])

Von einer Angabe der Größe des auf jedem Aste jeweils *letzten* Büschels wurde abgesehen; der Radius dieses Büschels ist *meist*

1) Bei der *Blitz*bildung verändert ein Vorwärtswachsen des Büschels plötzlich das Potential des jeweils erreichten *Raum*elementes. Die Bedingungen für das Weiterwachsen stehen also in gewisser Analogie mit denen bei gleitender Entladung; an Stelle der flächenhaften Ausdehnung tritt die Raumerfüllung und an die Stelle der Kapazität der Oberflächeneinheit tritt die meist vergleichsweise wohl *sehr kleine* Aufnahmefähigkeit der Raumeinheit für Elektrizität bei der Potentialänderung. Das Vorwachsen der blitzbildenden Umladung des Raumes ist also in Analogie gleichfalls als *ruckweise* vor sich gehend anzunehmen, dabei aber die Ausdehnung der Ruckstufe als beträchtlich größer, als wie bei den untersuchten Gleitphänomenen. Aus den Beobachtungen eines Perlschnurblitzes habe ich geschlossen (Meteorol. Zeitschr. p. 225. 1917), daß in diesem Falle die Ruckstufen (d. h. die Zwischenbüschelgrößen l_n) je 7,5 m betrugen.

nahe ebenso groß, wie die Längen l_1, l_2, l_3 usw., selten nur ist er kleiner. Öfters aber sind die letzten Büschel langgestreckt; ihre Breite ist dann nahezu $2 \cdot l$, ihre Länge dann meist nahe ein ganzzahliges Vielfaches von l, so daß anzunehmen ist, daß mangels Seitenästen eine zwar vorhandene Unterteilung nur nicht in Erscheinung getreten ist.

Die Gleitbahnlänge L und Gleitbüschellänge f sind bisher für rückwärts *voll* belegte Platten nicht gemessen. Bei den starken Schwankungen dieser Größen von Fall zu Fall kann nur ein ausgedehntes Beobachtungsmaterial einigermaßen sichere Schlüsse ziehen lassen. Solches (Längen f zwischen 10 cm und 120 cm und Glasdicken von 0,1—0,8 cm) liegt nur vor für gleitende Entladung auf Platten mit einem 2 cm breiten Stanniol*streifen* auf der Rückseite; hierfür ergab sich[1]) die Interpolationsformel

$$f = \beta \cdot P^{4} \cdot c^{3/4}. \tag{6}$$

Für f in cm, P in Kilovolt, c in cm war bei *positiven* Gleitbüscheln $\beta = 4 \cdot 10^{-6}$ gefunden; für *negative* ist nur bekannt, daß sie demselben Gesetze gehorchen aber mit etwas kleinerer Konstanten. Bei kleinen Längen f, also auch beim ersten Durchbruche kann der Unterschied von Voll- oder nur Streifenbelegung nicht viel ausmachen; reicht die Interpolationsformel (6) bis zum Durchbruche, so ist Anschluß an die in vorliegender Arbeit aufgestellten Gleichungen 2 und 3 für den Durchbruch zu erwarten. Identifiziert man, um dies zu prüfen f mit l_0 und P mit P_0 und eliminiert mit Hilfe der Gleichungen 3 und 2 (diese ohne die nur kleine additive Konstante) so wird

$$\beta = \frac{\left(\frac{4\pi}{k}\right)^{3/4}}{4{,}22^{3} \cdot 11{,}5^{4}} \tag{7}$$

also von c unabhängig, d. h. Gleichung 6 schließt sich in ihren Exponenten von P und c an die Gleichungen 2 und 3 an. Setzt man die Dielektrizitätskonstante k des Glases gleich 6, so erhält man β zu $2{,}30 \cdot 10^{-6}$, also auch quantitativ nicht stärkere Abweichung als zu erwarten.

Zu den Werten $L = 9{,}1$, 10,8 und 14,6 der Tabb. II und III gehören $f = 5{,}7$, 8,9 und 11,6 cm, aus denen sich mit Gleichung (6) rechnet β zu $2{,}74 \cdot 10^{-6}$, $2{,}97 \cdot 10^{-6}$ und $3{,}13 \cdot 10^{-6}$.

1) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 206. 1906.

IV. Bemerkenswerte Einzelheiten der negativen Gleitspuren.

Zu richtiger Ausdeutung der feinen Einzelheiten der Photogramme ist zweierlei zu berücksichtigen; die Photogramme sind *Summationsfiguren* zeitlich nicht ganz zusammenfallender Vorgänge, und sie geben das Gesamtphänomen nur *mit eigentümlichen Defekten*. Letztere entstehen dadurch, daß von den lichtschwächeren Gebilden (Leuchtfäden) nur die eine photographische Spur hinterlassen, welche an der photographischen Schicht *unmittelbar* anliegen. Der gesamte Leuchtprozeß liegt aber z. T. etwas oberhalb der Platte und dies um so mehr, je kleiner die Kapazität der Plattenflächeneinheit ist. Dabei ist aber andererseits von Vorteil, daß nach dem Gesamtmechanismus der Bildung gleitender Ladung[1]) der Gleitprozeß die Platte möglichst lückenlos durch der Platte *möglichst naheliegende* Strömungsbahnen laden wird, daß also Überkreuzungen nur in seltenen Fällen eintreten werden, so daß, wo solche auftreten, meist auf eine relativ beträchtliche Zeitdifferenz zu schließen sein wird.

Soweit der *Anblick* von negativen Gleitbüscheln und vor allem auch von analogen negativen Raumbüscheln (negativer Streifenentladung) erkennen läßt, *bestehen alle* diese *negativen Büschel*, also alle Systemteile einer ausgedehnten Gleitfigur (mit Ausnahme natürlich der *funken*förmigen, starken Ladungskanäle), *letzten Endes aus Leuchtfäden mit ihrer ganzen Länge nach nahe konstanter Dicke und Helligkeit* oder aus Bündeln solcher. Diese bildeten sich bei ihrem Entstehen jeweils in Richtung des momentanen elektrischen Feldes und erscheinen dem entsprechend öfters auch gekrümmt. Noch besser erkennt man sie in gasverdünnten Räumen (5—1 cm Quecksilberdruck), wo die Fäden wesentlich länger und dicker sind. Bei Atmosphärendruck beträgt die Leuchtfadenbreite etwa 0,02 cm. Das Aussehen der photographischen Spur scheint dieser Auffassung zunächst an vielen Stellen völlig zu wider-

1) Vgl. M. Toepler, Wied. Ann. 66. p. 1061. 1898. Nach angelegter Spannung fließt aus dem Pole Elektrizität auf die Platte; die jeweilige Ladung deformiert das ursprüngliche Feld; eine Weiterladung, ein Weiterwachsen des Gleitphänomens findet dort und dorthin statt, wo und wohin die Feldkomponente in Richtung der Plattenoberfläche hinreichend groß geworden ist; weiter vom Pole ab rührt das Feld ganz überwiegend von den schon auf die Platte geflossenen Elektrizitätsmengen her, das Feldstärkenmaximum liegt dicht auf der Plattenoberfläche.

sprechen. Ich habe jedoch kaum eine Stelle gefunden, welche unter Berücksichtigung der genannten Summationswirkung und der möglichen Defekte sich nicht als Superposition von Leuchtfäden ausdeuten ließe, viele Stellen dagegen die sehr dafür sprechen. So erscheinen z. B. ganz *homogen* geschwärzte Kreissektoren an der Peripherie fast immer in einzelne Fäden *zerfasert*, wie dies die Photogramme 4 und 5 an mehreren Stellen deutlich erkennen lassen, bestehen also aus lückenlos aneinander gelagerten Fäden. Merkwürdige Zeichnungen, wie sie besonders oft größere Polbüschel auf dicken Platten zeigen (vgl. Photogramm 2), wo die Leuchtfigur nicht mehr ganz eng auf der Platte aufliegt, lassen sich ungezwungen durch Annahme schwacher Überkreuzung verbunden mit Auf- und Absteigen der Fäden beim Überkreuzen erklären. Trifft ein Leuchtfaden, abgestoßen z. B. von übrigen, auf der Platte schon aufliegenden Leuchtfäden erst wo solche fehlen, d. h. in größerem Abstande, elektrostatisch auf die Platte herabgezogen, aus der Luft auf die Platte auf, so entsteht erst vom Auftreffpunkte aus ein Spurstück mit freiem Anfang und Ende. Ist das Wegstück durch die Luft kurz, so können natürlich vom Auftreffpunkt aus noch vollständig entwickelte sekundäre Gleitbüschel ausgehen, welche ihrerseits weiterwachsend, die Weiterentwicklung der auf der Glasplatte aufliegenden, also photographisch wirkenden benachbarten Leuchtfäden beeinflussen, sie zur Seite drängen. Es sieht dann aus, als ob zwischen der Radialstrucktur „Nebenpole" vorhanden wären[1]), welche die Nachbarfäden auseinanderdrängen, wie die Photogramme 2 und 5 erkennen lassen.

Durchmustert man eine größere Reihe von Aufnahmen ausgedehnter Gleitspuren, so findet man, daß diese zwar zumeist voll entwickelte Endbüschel besitzen; man bemerkt aber auch *alle Entwicklungsstadien neuer Endbüschel.* Aus ihnen kann man ein klares Bild darüber gewinnen, wie *der Durchbruch*

1) Daß jeder solcher Nebenbüschel von dem Fußpunkte einer Strömungsbahn ausgeht, welche vom Pole nicht auf der Platte eng anliegend verlief, also nicht mit photographiert wurde, ist dadurch leicht zu beweisen, daß das gesamte Polbüschel sich in lauter (etwa 10) solche Nebenbüschel auflöst, wenn der Gleitpol nicht auf der Platte aufsteht, sondern (am besten etwa um $R/2$) über der photographischen Schicht frei in der Luft endigt.

neuer Büschel, d. h. die Entwicklung neuer Wachstumsstufen vor sich geht (vgl. Figg. 3a—3d und Photogramm 4, 5 und 6).

Fig. 3a. Der Durchbruch eines neuen Büschels durch das um A vorhandene auf dem Radius AB beginnt mit besonders dichter An- und Nebeneinanderlagerung von Leuchtfäden am Orte A oder auch etwas davon entfernt bei B_0; bei B erscheint ein kurzer Lichtpinsel.

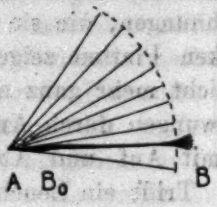


Fig. 3a.

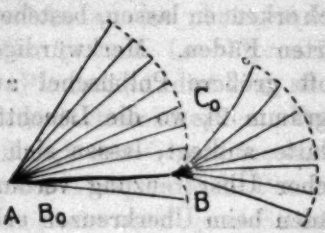


Fig. 3b.

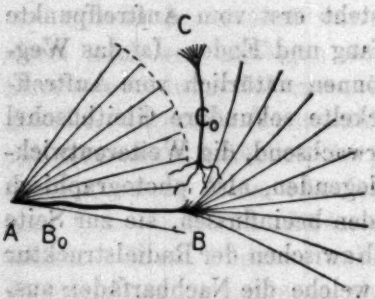


Fig. 3c.

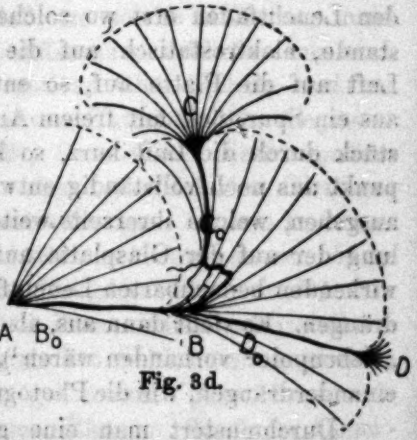


Fig. 3d.

Fig. 3b. AB wird zum Ladungskanale (Funkenstücke), das Büschel aus B wächst zu voller Länge, vgl. Phot. 4 rechts; hierbei dreht sich die Feldrichtung am Orte C_0 aus der ursprünglichen, zu A radialen Richtung in die Tangente zum Büschel um A; hierbei findet bei C_0 Zusammendrängen oder auch Überschneiden von Leuchtfäden statt; vgl. Phot. 4 links oben.

Fig. 3c. An der Verdichtungsstelle C_0 entsteht ein Funken*stück*; dieses bildet zunächst nach C zu ein *kurzes*, meist *homogen* geschwärztes, negatives Büschel, nach B zu ein positives. *Photogramm 6 zeigt ein Büschel in diesem besonders auffallenden Entwicklungszustande, ebenso Phot. 5 rechts.*

Fig. 3d. Das getrennte Funkenstück bei C_0 hat durch sein positives Büschelende hierdurch den Rückanschluß an den seit Fig. 3b fertigen Ladungskanal AB gewonnen; sein kurzes, homogenes, negatives Büschelende bei C wächst nun rasch zur normalen Größe eines Zwischenbüschels aus. Gleichzeitig oder auch vorher beginnt vielleicht schon in Richtung BD_0D die Bildung eines weiteren Durchbruches.

Beim Polbüschel beginnt der Durchbruch fast immer *dicht* am Pole. Das sonst *häufig* zu beobachtende Auftreten eines vom übrigen Ladungskanale zunächst *getrennten* Funkenstückes (wie in Phot. 6) bleibt auch auf fertigen Ladungswegen oft kenntlich an dem kurzen, *homogen* geschwärzten negativen Büschel oder, freilich seltener, an dem positiven Büschel mit seinen die regelmäßige Struktur der vorher gebildeten Nachbarstromfäden ganz *unregelmäßig überkreuzenden* spärlichen Fäden, vgl. Phot. 4 und 5 auf den Mittelstücken des Hauptladungsweges.

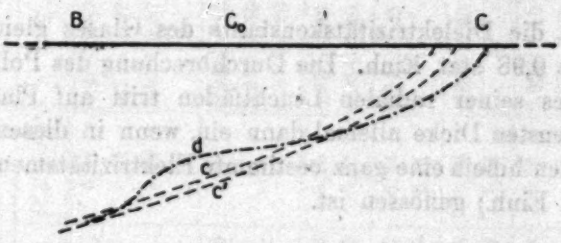


Fig. 4.

Die Bildung eines *positiven* Büschels von C_0 nach B zu wird ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß ein Funkenstück ein relativ zu den Leuchtfäden guter Leiter ist. Der *Potentialverlauf* auf der Platte von B über C_0 nach C hin (vgl. Fig. 4) der *vor* Bildung des Funkenstückes für *alle* Strombahnen in diesem Bereiche etwa den Verlauf der Kurve c besaß, verliert im Funkenkanale sein Gefälle fast völlig. Er nimmt in ihm etwa die Kurvenwerte d an, wobei dann (links von C_0 in Fig. 4) die Werte des Potentiales am positiven Funkenstückende *über* den der Nachbarfäden, auf denen jetzt der Verlauf gleich c' ist, steigen können, und daher dann nach diesen hin ein positives Büschel mit sie überkreuzenden Fäden entstehen kann.

Es genügt nach allem im wesentlichen die Annahme, daß zwei Strömungsarten auftreten, Leuchtfäden und Funken, erstere mit steigender, letztere mit fallender Charakteristik, zur Erklärung des gesamten Gleitphänomens. Der innere ionentheoretische Grund des jeden Durchbruch einleitenden *Überganges* eines Leuchtfadenstückes in ein Funkenstück ist noch unbekannt. Vielleicht gibt nachstehende Erwägung einmal einen Anhalt zu weiterer Aufklärung. Für einen radialen Leuchtfaden des Polbüschels gilt: Unabhängig von der Dicke der Glasplatte beträgt seine Breite etwa 0,02 cm, ist das Gefälle auf ihm 11,5 KV./cm. Im Augenblicke des Durchbruches hat er die Länge l_0 erreicht. Also ist in ihn *am Pole* bis zu diesem Augenblicke eine Elektrizitätsmenge E_0 hineingeflossen, die sich unter Berücksichtigung von Gleichung (3) für l_0 rechnet zu

$$E_0 = 0{,}02 \cdot \frac{11{,}5}{2} \cdot 4{,}22^2 \, \frac{k}{4\pi}; \tag{8}$$

setzt man die Dielektrizitätskonstante des Glases gleich 6, so wird $E_0 = 0{,}98$ stat. Einh. Die Durchbrechung des Polbüschels längs eines seiner radialen Leuchtfäden tritt auf Platten der verschiedensten Dicke allemal dann ein, wenn in diesen Durchbruchsfaden hinein eine ganz bestimmte Elektrizitätsmenge (etwa eine stat. Einh.) geflossen ist.

V. Größe der Polbüschel positiver Gleitfiguren.

Durch einfache Polumkehr erhält man mit der in Abschnitt I geschilderten Versuchsanordnung *positive* Gleitspuren.

Auch hier tritt bei kleinen Spannungen zunächst ein kreisförmiger Büschel radialer Struktur, ein „Polbüschel“ auf, bei höherer angelegter Spannung erscheint dies wieder plötzlich durchbrochen von dem eigentlichen Gleitprozesse. Die Spur des letzteren zeigt jedoch im starken Gegensatze zur negativen *keinen* Zerfall in *regelmäßige* Wachstumsstufen. Für eine Messung geeignet sind also nur die Größen R, allenfalls l_0, ferner L und f.

Beim Polbüschel bemerkt man außer den radialen Leuchtfäden bzw. Fadenbündeln meist noch eigentümliche kometenartige Gebilde oder auch isoliert liegende Sternchen *außerhalb*

		Tabelle V $\delta = 20{,}6°$ C. $b = 75{,}3$ cm				Tabelle VI $\delta = 18{,}6°$ C. $b = 74{,}5$ cm				Tabelle VII $\delta = 19{,}1$ bis $20{,}6°$ C. $b = 75{,}4$ cm				Tabelle VIII $\delta = 22{,}3°$ C. $b = 75{,}1$ cm					
F	P	a	R	R^*	P/R^*	a	R	R^*	$P/R;P/R^*$	a	R	R^*	$P/R;P/R^*$	a	R	R^*	$P/R;P/R^*$	F	P
0,50	17,1	0,150	2,57	2,70	6,33	0,511	2,80	—	6,11	0,903	2,87	—	5,96	1,634	3,00	—	5,70	0,50	17,1
		0,165	2,55	2,72	6,29	0,531	2,80	—	6,11	0,915	2,92	—	5,86	1,641	2,92	—	5,86		
						0,533	3,00	—	5,70	0,923	2,87	—	5,96	1,643	2,89	—	5,92		
														1,645	2,72	—	6,29		
0,75	25,2	0,162	3,30	3,90	6,46	0,530	4,00	4,55	5,54	0,929	4,15	4,40	5,73	1,660	4,15	—	6,07	0,75	25,2
										0,938	4,30	—	5,86	1,667	4,20	—	6,00		
										0,943	4,20	—	6,00						
1,00	32,6					0,514	4,90	5,30	6,15	0,931	4,90	5,70	5,72	1,679	5,15	5,40	6,04	1,00	32,6
						0,514	4,80	5,20	6,27	0,964	5,30	5,80	5,62	1,690	5,55	—	5,87		
1,25	39,7					0,515	6,00	6,15	6,44	0,944	6,25	6,90	5,75	1,687	6,55	6,80	5,84	1,25	39,7
						0,588	6,05	6,50	6,11										
1,40	43,8					0,561	6,60	6,90	6,36	0,898	6,60	7,25	6,05					1,40	43,8
						0,564	6,55	7,08	6,21										
1,50	46,4					0,557	6,50	7,10	6,54	0,903	7,10	7,70	6,03	1,670	7,20	7,80	5,95	1,50	46,4
										0,926	7,05	7,85	5,91	1,686	7,25	7,95	5,84		
1,70	51,5					0,556	7,70	8,40	6,13									1,70	51,5

der Hauptspur. Diese geben (wie die Nebenpole der negativen Polbüschel) die Auftreffspur von Leuchtfäden, welche zunächst vom Pole aus *nicht* auf der Platte auflagen, sondern erst außerhalb der Hauptspur auf die Platte herabgezogen wurden und nur in diesem ihrem letzten, auf der Platte eng aufliegenden Teile photographisch wirkten.[1]) In den nachstehenden Tabellen sind demnach *zwei* Werte für die radiale Ausdehnung der positiven Polbüschel angegeben:

R größter Radius *lückenloser* Radialfädenspuren (vermindert um 0,1 cm wegen der Polstabdicke) und

R^* Abstand des *fernsten* Sternchens vom Zentrum (vermindert gleichfalls um 0,1 cm); R^* gibt also zugleich die *größte* überhaupt vom Pole ausgehende Leuchtfadenlänge.

In den Tabellen sind auch die Werte von P/R^* (oder wo R^* nicht vorhanden von P/R) eingetragen, es gilt

$$P = 6{,}0\ R^*, \tag{1b}$$

d. h. die größte Fadenlänge ist proportional der Spannung unabhängig von der Plattendicke; sollte nach Analogie mit dem negativen Polbüschel (Gleichungen 1a) eine additive Konstante neben P vorhanden sein, so ist sie jedenfalls klein.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 16. Juni 1917.

---

1) Der Nachweis, daß diese Kometen und Sternchen tatsächlich wie angegeben entstehen, ist auch hier leicht durch Vergleich mit Aufnahmen, bei denen der Polstab oberhalb der photographischen Schicht frei in der Luft endigte, zu geben.

(Eingegangen 19. Juni 1917.)

4. *Drei optisch-meteorologische Beobachtungen; von H. Dember und M. Uibe.*

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Physik. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 68, 28. Febr. 1916.)

Anhang zum zweiten Bericht über die auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Am 21. August 1914 sahen wir auf dem Pik von Teneriffa (in 3280 m Höhe) um 11 Uhr vormittags einen sehr hellen, vollständig ausgebildeten Halo, konzentrisch zur Sonne. Der Himmel war mit hohen leichten Cirruswolken bedeckt, durch welche die Sonne noch blendend hindurchschien. Die Farbe des Raumes zwischen Sonne und Ring haben wir im Beobachtungsbuch mit „dunkel grau-blau" bezeichnet. Der sich an diesen Raum anschließende Ring war innen, der Sonne zugekehrt, von einem schmalen, rötlich braunen Saum begrenzt, dann folgte ein gelblicher Zwischenton, dem sich nach außen der bläulich-weiße helle Ring anschloß. Die Farbe der weiteren Umgebung kann wieder mit dunkel grau-blau gekennzeichnet werden und sie lief schließlich in das Grau des Cirrusnebels über.

Mit Hilfe des Wienerschen Photometers[1]), das mit Höhenkreis versehen ist, konnte unter Benutzung der Aufhellung im Gesichtsfelde des Instrumentes eine Messung des Ringdurchmessers vorgenommen werden. Es ergab sich 36° am weißen, d. h. äußeren Rande. Die Meßunsicherheit beträgt $\pm 1°$. Die Ringbreite schätzen wir auf etwa $^3/_4$ Sonnendurchmesser.

Um 11 Uhr 30 begann der Ring schwächer zu werden, verschwand erst streckenweise und um 11 Uhr 40 vollständig.

Am gleichen Tage, um 2 Uhr 20 nachmittags, erblickten wir einen zweiten, bedeutend größeren, ebenfalls um die Sonne konzentrischen Ring, an dem wir aber keine Spektralfarben

1) Vgl. F. Herxheimer, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Febr. 1912.

wahrnehmen konnten. Es war ein helles, auch etwa $^3/_4$ Sonnendurchmesser breites, weißes Band mit einem Durchmesser von $60^0 \pm 1^0$. Dieser Ring fing um 2 Uhr 28 an sich aufzulösen, und verschwand dann schnell.

Die Cirruswolken standen in beiden Fällen in einer H die mit ziemlicher Sicherheit annehmen läßt, daß sie von festen Eiskristallen gebildet wurden und daß durch Brechung in diesen die Halos entstanden sind. Für die große Höhe der Wolken spricht auch der Umstand, daß unter den Wolken, welche den 36^0-Ring trugen, deutlich erkennbar andere sehr feine Cirren hinzogen, auf denen der Ring nicht zu sehen war.

Nach der bei Pernter-Exner[1]) nach Bravais und Galle dargestellten Theorie der Halos entsprechen den hier beobachteten Durchmessern von 36 und 60^0 Eisprismen mit brechenden Winkeln, wie sie die kleine nachstehende Tabelle zeigt.

Brechender Winkel	Theoret. Halodurchmesser	Gefundener Durchmesser
$50^0\ 28'$	$34^0\ 52'$	$36^0 \pm 1^0$
$53^0\ 50'$	$37^0\ 52'$	
$73^0\ 13'$	$59^0\ 4'$	$60^0 \pm 1^0$
$76^0\ 50'$	$64^0\ 20'$	

Die beiden Halos gehören also zu denjenigen, die sich mit Hilfe der Brechung des Lichtes in Eiskristallen gut erklären lassen.[2])

Ein Nebensonnenkreis (zirkumzenitaler Bogen) war in beiden Fällen nicht zu sehen und ist auch auf einer photographischen Aufnahme des 36^0-Halos nicht erkennbar.

§ 2.

Eine farbenprächtigere Erscheinung als die Halos sahen wir auf dem Gipfel des Piks am 30. August 1914. Die Sonne stand, kurz vor Untergang, nur wenige Grade über dem Horizont. Der dunkle Pikschatten war über den Cañadaswall,

1) J. M. Pernter u. Fel. Exner, Meteorologische Optik, Wien und Leipzig 1910.

2) Die geringe, uns hier über den Gegenstand zur Verfügung stehende Literatur gestattet uns nicht, anzugeben, ob schon von anderen Beobachtern Halos gleicher Dimensionen gesehen worden sind.

welcher den Berg im Osten umgibt, gestiegen, und der Schatten der Bergspitze fiel auf das Wolkenmeer, das von der Passatwolke gebildet wurde. Um die Spitze des Bergschattens war in einer Ausdehnung von wenigen Graden ein Farbenbogen von elliptischer Gestalt zu sehen, so wie ihn die Skizze zeigt.

Der Farbenbogen[1]) bestand aus drei reinen und leuchtenden Farben: Außen rot, in der Mitte grün und innen blau. Während der nur einige Minuten betragenden Beobachtungszeit behielt der Bogen die Gestalt der wenig flachen Ellipse bei und eine Änderung der Durchmesser derselben war nicht erkennbar.

Die Luft auf dem Pik war vollständig rein, ohne jede Spur von Nebelbildung. Die relative Feuchtigkeit kann nur gering gewesen sein, denn auf dem Zeltplatz (440 m unter der Pikspitze) betrug sie zwei Stunden vor Sonnenuntergang 22 Proz. und zwei Stunden nachher 32 Proz.

Die geringe Feuchtigkeit und die Abwesenheit vom Nebel am Standort spricht gegen die Fraunhofersche Forderung[2]), daß zur Entstehung derartiger Farbenbögen auf Tropfennebeln eine primäre Beugung und dadurch Zerlegung des weißen Lichtes an den Wassertröpfchen über dem Beobachter stattfinden müsse. Auch Pernter[3]) beschreibt die Erscheinung eines Farbenbogens auf einem wagerechten Nebelboden, wobei er selbst in nebelfreier Luft stand. Die oberste Grenze des Wolkenmeeres bei unserer Beobachtung liegt etwa 1800 m hoch und war vom Beobachtungsort 15 km entfernt. Die

1) Entsprechend den Benennungen „Brocken- und Ballongespenst" kann man für die hier gesehene Erscheinung das Wort „Pikgespenst" bilden.

2) J. v. Fraunhofer, „Über die Entstehung der Höfe usw." Gesammelte Schriften p. 209.

3) J. M. Pernter u. Fel. Exner, l. c. p. 209.

Wolke bestand nur aus Wassertröpfchen; sie enthält um diese Jahreszeit keine Eiskristalle, wovon wir uns bei mehrmaligem Durchwandern der Schicht am anderen Tage überzeugt haben. Die primäre spektrale Zerlegung muß daher an den Nebeltropfen in der obersten Schicht des Wolkenmeeres stattgefunden haben, so wie es auch die von Richarz[1]) für das „Ballongespenst" und „Dolomitengespenst" gegebene Theorie verlangt.

Die beobachtete Unveränderlichkeit der Bogendurchmesser läßt auf eine Konstanz der Größe der beugenden Nebeltröpfchen und der Glanz der Erscheinung auf eine einheitliche Größe derselben schließen.

Physikal. Inst. der Techn. Hochschule Dresden und der Universität Leipzig. Güimar auf Teneriffa, 27. Nov. 1915.

1) F. Richarz, Deutsche Rundschau für Geographie 36. 1913/14; Meteorolog. Zeitschr. p. 23. 1908; Heft 6. 1912.

(Eingegangen 27. Juni 1917.)

5. *Bemerkung zu einer Arbeit von Adolf Böhi über ein Verfahren zur Messung der absoluten Potentialdifferenzen, welche beim Kontakt beliebiger Leiter auftreten;*

von G. Borelius.

An Ende des vorigen Jahres wurde in diesen Annalen[1]) eine elektrostatische Methode beschrieben, die angeblich zur Messung absoluter Elektrodenpotentiale dienen sollte. Es ist dies, soweit mir bekannt ist, der dritte Versuch, Elektrodenpotentiale elektrostatisch zu messen, der in einem kleinen Zeitraum veröffentlicht wird.

Die erste Methode wurde von mir[2]) angegeben. Ich habe zwar nie behauptet, absolute Elektrodenpotentiale messen zu können, sondern nur ihre Variationen. Aber auch dabei hatte ich auf die Variationen der Grenzpotentiale zwischen Leitern und Isolatoren nicht die nötige Rücksicht genommen und kam aus diesem Grunde zu fehlerhaften Resultaten. Später wurde ich dies gewahr und habe mit meiner Methode eben die genannten Grenzflächen näher studiert.[3])

Die nächste Arbeit dieser Art wurde von A. Ewell[4]) gemacht. Er meinte, so wie jetzt Böhi, absolute Elektrodenpotentiale gemessen zu haben. Ewell war aber, wie von J. Barnett[5]) sowie von mir[6]) nachgewiesen wurde, nur durch eine völlige Vernachlässigung der Grenzpotentiale gegenüber den Isolatoren zu diesem Resultate gekommen. Ich meine jetzt denselben Fehler in dem Gedankengang von Böhi nachweisen zu können.

---

1) A. Böhi, Ann. d. Phys. **51.** p. 643. 1916.
2) G. Borelius, Ann. d. Phys. **42.** p. 1129. 1913.
3) G. Borelius, Ann. d. Phys. **45.** p. 929. 1914 u. **50.** p. 447. 1916.
4) A. Ewell, Phys. Review **6.** p. 271. 1915.
5) J. Barnett, Phys. Review **7.** p. 331. 1916.
6) G. Borelius, Phys. Review **8.** p. 128. 1916.

Die Methode von Böhi ist die des zerlegbaren Kondensators. Wir können das Wesentlichste seiner Anordnung kurz folgendermaßen wiedergeben. Ein trichterförmiges Gefäß enthält z. B. verdünnte Schwefelsäure, die durch eine Zinkelektrode über eine Kompensationsanordnung mit der Erde verbunden ist. Über die Oberfläche der Säure ist eine Gummimembran gespannt, und darüber hängt eine Zinkscheibe, die, zur Entfernung aller Feuchtigkeit, in Öl gekocht ist und dann mit einer dünnen Schicht von z. B. festem Paraffin überzogen ist. Die Scheibe kann durch eine Wippe entweder mit der Erde oder mit einem Elektrometer verbunden werden. Die Messung geschieht in der folgenden Weise. Während die Zinkscheibe geerdet ist, wird dem Kompensationspotential ein solcher Wert P gegeben, daß, wenn die Scheibe darauf erst mit dem Elektrometer verbunden und dann von der Säureoberfläche entfernt wird, kein Ausschlag am Elektrometer entsteht. Böhi meint jetzt, daß P das Elektrodenpotential Zn/H_2SO_4 angibt.

Daß am Elektrometer kein Ausschlag auftritt, sagt nun aber aus, daß im Dielek rikum zwischen Säure und Scheibe kein elektrisches Feld besteht, und wir bekommen mit einer leicht verständlichen Bezeichnungsweise, wenn wir, von der Erde gerechnet, die Summen der Potentialsprünge zu beiden Seiten dieses Dielektrikums gleichsetzen und der Einfachheit halber die Potentialsprünge der metallischen Kontakte vernachlässigen,

$$P + H_2SO_4/Zn + \text{Luft}/H_2SO_4 = \text{Paraffin}/Zn + \text{Luft}/\text{Paraffin}.$$

Der letzte Potentialsprung kann *vielleicht* vernachlässigt werden. Die übrigen aber sicher nicht. Hierzu kommt noch, daß die Gummimembran wahrscheinlich einen störenden Einfluß auf die Messungen haben muß.

Die Methode von Böhi gibt somit ebensowenig wie irgendeine andere elektrostatische Methode *unmittelbar* Aufschluß über die Größe der absoluten Elektrodenpotentiale.

Lund, Juni 1917.

(Eingegangen 6. Juli 1917.)

6. *Zur Theorie des Rotationsspektrums;* *von Max Planck.*

(Zweite Mitteilung.)

Der Plan der folgenden Untersuchungen über das vorstehende Thema ist der, festzustellen, welche Folgerungen man aus den vorliegenden Messungen des Rotationsspektrums zu ziehen hat, falls für den Vorgang der Absorption die Gesetze der klassischen Elektrodynamik als zutreffend angenommen werden.

In meiner ersten Mitteilung[1]) hatte ich die Drehungsachsen der rotierenden Dipole als fest angenommen. Hier sollen nun die entsprechenden Resultate für Rotatoren mit freien Drehungsachsen abgeleitet und, soweit das zurzeit möglich erscheint, mit den Ergebnissen der Messungen verglichen werden.

§ 1.

Wir denken uns wieder, wie in der ersten Mitteilung, eine große Schar N von unregelmäßig im Raume angeordneten gleichbeschaffenen starren elektrischen Dipolen, deren jeder, unabhängig von den übrigen, um seinen Schwerpunkt vollkommen frei drehbar ist. Alle Dipole sind einer elektromagnetischen Strahlung ausgesetzt, die unpolarisiert und an allen Stellen des Raumes gleich beschaffen sein möge, im makroskopischen Sinne, d. h. die überall die nämliche Intensität, die nämliche spektrale Verteilung und die nämliche Richtung besitzt. Gesucht ist wiederum derjenige Teilbetrag der gesamten innerhalb eines bestimmten schmalen Spektralbezirkes auffallenden Strahlung, welcher innerhalb einer bestimmten Zeit von den N Rotatoren absorbiert, d. h. in mechanische Rotationsenergie verwandelt wird.

Es versteht sich, daß die so gestellte Frage nur dann eine bestimmte Antwort zuläßt, wenn der Zustand der Rota-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **52**. p. 491. 1917.

toren, d. h. ihre Drehungsgeschwindigkeiten und die Richtungen der augenblicklichen Drehungsachsen, zu Anfang der Bestrahlung bekannt sind. Wir wollen daher annehmen, daß die Zahl derjenigen Rotatoren, deren Drehungsgeschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ zwischen ω und $\omega + d\omega$ liegen, gegeben und gleich ist $NW(\omega)\,d\omega$, wobei

$$\int_0^\infty W(\omega)\,d\omega = 1\,, \tag{1}$$

und ferner, daß zur selben Zeit $t = 0$ alle räumlichen Richtungen der augenblicklichen Drehungsachsen gleich zahlreich vorkommen.

§ 2.

Wir wählen zur Betrachtung zunächst einen bestimmten Dipol aus und stellen die Gleichungen seiner Bewegung auf. Nennen wir, wie üblich, die beiden Winkelkoordinaten, welche die räumliche Richtung der Symmetrieachse (vom negativen zum positiven Pol gerechnet) bestimmen, ϑ und φ, ferner das Trägheitsmoment J, so ist die kinetische Energie der Drehung:

$$u = \frac{J}{2}\,\omega^2 = \frac{J}{2}\,(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) \tag{2}$$

und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \dot\vartheta}\right) - \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta} = \Theta\,, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \dot\varphi}\right) - \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \Phi\,, \end{cases} \tag{3}$$

wobei Θ und Φ die den Winkeln ϑ und φ entsprechenden Kräftekomponenten bedeuten. Dieselben ergeben sich aus dem elektrischen Moment E des Dipols und den lokalen Komponenten der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ folgendermaßen:

$$\begin{cases} \Theta = E\,(\mathfrak{E}_x \cos\vartheta\cos\varphi + \mathfrak{E}_y \cos\vartheta\sin\varphi - \mathfrak{E}_z \sin\vartheta)\,, \\ \Phi = E\,.\,(-\mathfrak{E}_x \sin\varphi + \mathfrak{E}_y \cos\varphi)\sin\vartheta\,, \end{cases} \tag{4}$$

so daß die Bewegungsgleichungen (3) vollständig lauten:

$$\begin{cases} J\ddot\vartheta - J\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 = E(\mathfrak{E}_x \cos\vartheta\cos\varphi + \mathfrak{E}_y \cos\vartheta\sin\varphi \\ \qquad\qquad - \mathfrak{E}_z \sin\vartheta)\,, \\ J\sin\vartheta\,\ddot\varphi + 2J\cos\vartheta\,\dot\vartheta\,\dot\varphi = E\cdot(-\mathfrak{E}_x \sin\varphi + \mathfrak{E}_y \cos\varphi)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Nun sei für die Zeit $t = 0$

$$(6) \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = 0, \qquad \dot{\vartheta} = 0, \qquad \dot{\varphi} = \omega_0,$$

was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und für eine beliebige andere Zeit

$$(7) \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} + \eta, \qquad \varphi = \omega_0 t + \sigma, \qquad \dot{\vartheta} = \dot{\eta}, \qquad \dot{\varphi} = \omega_0 + \dot{\sigma},$$

so daß für $t = 0$

$$(8) \qquad \eta = 0, \qquad \sigma = 0, \qquad \dot{\eta} = 0, \qquad \dot{\sigma} = 0.$$

Wir beschränken die Betrachtung auf solche Zeiten t, die zwischen 0 und τ gelegen sind, und nehmen den Zeitabschnitt τ so groß, daß während desselben der Rotator viele Umdrehungen ausführt, d. h.

$$(9) \qquad \omega \tau \gg 1,$$

aber doch andererseits so klein, daß

$$(10) \qquad \eta_\tau \ll 1 \quad \text{und} \quad \sigma_\tau \ll 1.$$

Dann berechnen sich die Werte von η und σ in erster Annäherung aus folgenden Gleichungen, welche aus (5) und (7) hervorgehen, wenn man darin die kleinen Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$(11) \qquad J\ddot{\eta} + J\omega_0^2 \eta = -E\mathfrak{E}_z,$$

$$(12) \qquad J\ddot{\sigma} = E \cdot (-\mathfrak{E}_x \sin \omega_0 t + \mathfrak{E}_y \cos \omega_0 t).$$

Die erste Gleichung ist identisch mit der eines in der Richtung der z-Achse schwingenden elektrischen Oszillators von der Eigenfrequenz ω_0; die zweite Gleichung ist identisch mit der eines um die z-Achse rotierenden elektrischen Dipols. Von beiden Gleichungen lassen sich die Lösungen direkt angeben.

§ 3.

Die von dem Rotator in der Zeit zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ aus der auffallenden Strahlung aufgenommene Energie ist

$$u_\tau - u_0 = \Delta u = \int_0^\tau (\Theta \dot{\vartheta} + \Phi \dot{\varphi})\, dt$$

und nach (4) und (7) bis auf Glieder kleinerer Größenordnung:

$$(13) \qquad \Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u,$$

wobei gesetzt ist:

$$(14)\quad \Delta_1 u = -E\int_0^\tau \mathfrak{E}_x \dot{\eta}\, dt,$$

$$(15)\quad \Delta_2 u = E\int_0^\tau \{-\mathfrak{E}_x \sin(\omega_0 t+\sigma)+\mathfrak{E}_y \cos(\omega_0 t+\sigma)\}(\omega_0+\dot{\vartheta})\, dt.$$

Wir wollen nun den Mittelwert von Δu bilden für alle diejenigen Rotatoren, welche zur Zeit $t = 0$ die nämliche Drehungsgeschwindigkeit ω_0 besitzen:

$$(16)\quad \overline{\Delta u} = \overline{\Delta_1 u} + \overline{\Delta_2 u}.$$

Das erste Glied $\overline{\Delta_1 u}$, die von einem in der Richtung der z-Achse schwingenden Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 im Mittel absorbierte Energie, ergibt sich aus einer Rechnung, die sich in meinen Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung (zweite Auflage) ausführlich mitgeteilt findet: dasselbe ist nämlich, wie die Gleichungen (14) und (11) zeigen, identisch mit dem dortigen[1]) Ausdruck (241a), wenn man darin statt der Konstanten L den Wert J/E^2 setzt. Daher erhalten wir mit Rücksicht auf die dort ausgeführten Reduktionen:

$$(17)\quad \overline{\Delta_1 u} = \frac{E^2}{J}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{C_n^2}}{\omega_0^2-\omega_n^2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0-\omega_n}\cdot\sin^2\frac{\omega_0-\omega_n}{2}\tau,$$

wo C_n und ω_n die in der Fourierschen Reihe für die elektrische Feldstärke

$$(18)\quad \mathfrak{E}_x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t+\vartheta_n)$$

auftretenden Amplituden und Frequenzen bedeuten.

Da wegen (9) nur solche Werte von ω_n für den Ausdruck (17) merklich in Betracht kommen, welche nahe gleich ω_0 sind, so kann man einfacher schreiben:

$$\overline{\Delta_1 u} = \frac{E^2}{2J}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{C_n^2}}{(\omega_n-\omega_0)^2}\sin^2\frac{\omega_n-\omega_0}{2}\tau,$$

oder, wenn gesetzt wird:

$$(18a)\quad (\omega_n-\omega_0)\tau = \xi,$$

1) l. c. p. 152.

$$(19) \qquad \overline{\Delta_1 u} = \frac{E^2 \tau^2}{2J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \sin^2 \frac{\xi}{2} .$$

Andererseits ergibt sich $\overline{\Delta_2 u}$, die von einem um die z-Achse mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Dipol im Mittel absorbierte Energie, direkt aus der Gleichung (20) meiner ersten Mitteilung[1]) als:

$$(20) \quad \overline{\Delta_2 u} = \frac{E^2 \tau^2}{4J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{\xi} (2 - 2\cos\xi - \xi \sin\xi) + 1 - \cos\xi \right\},$$

und daraus folgt nach (16) für die von allen mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Dipolen in der Zeit τ aus der auffallenden Strahlung im Mittel aufgenommene Energie:

$$(21) \quad \overline{\Delta u} = \frac{E^2 \tau^2}{4J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{\xi} (2 - 2\cos\xi - \xi \sin\xi) + 2 - 2\cos\xi \right\}.$$

§ 4.

Die gesamte von allen N Rotatoren aus der auffallenden Strahlung in der Zeit τ absorbierte Energie A ergibt sich nach (1) durch Multiplikation von (21) mit $N W(\omega_0) d\omega_0$ und Integration über ω_0, also:

$$A = N \int_0^{\infty} \overline{\Delta u} \, W(\omega_0) \, d\omega_0 ,$$

und daraus folgt nach Ausführung der Integration, ganz auf dem in meiner ersten Mitteilung beschriebenen Wege:

$$A = \frac{\pi N E^2 \tau}{4J} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n^2} \left\{ W(\omega_n) - \omega_n \frac{d W(\omega_n)}{d \omega_n} \right\},$$

oder:

$$(22) \qquad A = - \frac{\pi N E^2 \tau}{4J} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n^2} \, \omega_n^2 \frac{d}{d\omega_n} \left(\frac{W(\omega_n)}{\omega_n} \right),$$

welcher Ausdruck sich von dem früher erhaltenen, für Rotatoren mit festen Drehungsachsen gültigen nur dadurch unterscheidet, daß dort das ω_n im Nenner von $W(\omega_n)$ fehlt und

1) l. c. p. 500.

dafür ω_n statt ω_n^2 im Zähler steht. Dieser Unterschied führt zu charakteristischen Folgerungen für den hier behandelten Fall freier Drehungsachsen, die nun entwickelt werden sollen. Der Gang der Betrachtung kann dabei ganz dem früher eingeschlagenen angepaßt und daher in etwas abgekürzter Form dargestellt werden.

Wenn die auffallende unpolarisierte Strahlung in einer ebenen elektromagnetischen Welle besteht, welche pro Zeit- und Flächeneinheit innerhalb des Spektralbezirkes zwischen ω und $\omega + d\omega$ die Energie $E_\omega d\omega$ durch eine feste, den Wellenebenen parallele Ebene hindurchsendet, so ist nach (22) die gesamte Energie, welche von allen N Rotatoren innerhalb des Spektralgebietes $(\omega, d\omega)$ in der Zeit τ absorbiert wird:

$$A = -\frac{2\pi^2 N E^2 \tau}{3cJ}\,\omega^2 \frac{d}{d\omega}\left(\frac{W(\omega)}{\omega}\right) E_\omega\, d\omega\,. \tag{23}$$

Hieraus ergibt sich der Absorptionskoeffizient α_ω eines Gases, welches im Volumen V N rotierende Dipole enthält, d. h. derjenige Bruchteil, um welchen die Intensität einer in einer bestimmten Richtung fortschreitenden Strahlung von der Frequenz ω auf der Strecke 1 geschwächt wird:

$$\alpha_\omega = -\frac{2\pi^2 E^2}{3cJ}\cdot\frac{N}{V}\cdot\omega^2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{W(\omega)}{\omega}\right). \tag{24}$$

Die Absorption ist also proportional nicht etwa der Verteilungsdichte $W(\omega)$ der Rotatoren, sondern der Abnahme des Quotienten $W(\omega)/\omega$ mit wachsender Drehungsgeschwindigkeit ω. Wenn also in einem Spektralgebiete die auffallende Strahlung überhaupt nicht absorbiert wird, wie in dem Zwischengebiete zwischen zwei benachbarten Linien ω_n und ω_{n+1} des Absorptionsspektrums, wobei

$$\omega_n = \frac{nh}{2\pi J}, \tag{25}$$

so ist in diesem Gebiete die Verteilungsdichte $W(\omega)$ nicht etwa gleich Null, sondern proportional ω, während sie bei festen Drehungsachsen nach dem früher erhaltenen Resultat unabhängig ist von ω.

§ 5.

Die Frage nach der Verteilungsdichte $W(\omega)$ läßt sich auch vom rein theoretischen Standpunkte aus behandeln, und zwar auf zwei verschiedenen, voneinander unabhängigen

Wegen, und beide Wege führen bemerkenswerterweise übereinstimmend gerade zu demjenigen Resultat, welches hier aus der tatsächlichen Struktur des Rotationsspektrums abgeleitet wurde.

Der erste Weg ist rein statistischer Art. Er geht aus von der Hypothese[1]), daß ein jedes Elementargebiet des Gibbsschen Phasenraumes von den Phasenpunkten, welche die Zustände der einzelnen Molekeln repräsentieren, *gleichmäßig* erfüllt wird. Nennen wir also ein Volumelement des Elementargebiets dG, so ist:

$$W(\omega)\, d\omega = \text{const.} \int_{\omega}^{\omega + d\omega} dG. \tag{26}$$

Die Integration ist über alle Phasenpunkte zu erstrecken, die in dem von den Hyperflächen $\omega = \text{const.}$ und $\omega + d\omega = \text{const.}$ begrenzten Raume liegen.

Nun ist

$$dG = d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dp_\vartheta \cdot dp_\varphi,$$

wobei nach (2) die Impulse

$$p_\vartheta = J\dot{\vartheta}, \qquad p_\varphi = J \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}$$

und

$$\omega^2 = \frac{p_\vartheta^2}{J^2} + \frac{p_\varphi^2}{J^2 \sin^2\vartheta}. \tag{27}$$

Führt man also in dem vierfachen Integral (26) neben ϑ und φ statt p_ϑ und p_φ als Integrationsvariable die Drehungsgeschwindigkeit ω und den Winkel ψ ein, durch die Beziehungen:

$$p_\vartheta = J\omega \cos\psi \quad \text{und} \quad p_\varphi = J\omega \sin\vartheta \sin\psi, \tag{28}$$

so lautet die Gleichung (26):

$$W(\omega)\, d\omega = \text{const.} \iiint\!\!\iint d\vartheta\, d\varphi\, d\omega\, d\psi \cdot D, \tag{29}$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_\vartheta}{\partial \omega} & \frac{\partial p_\vartheta}{\partial \psi} \\ \frac{\partial p_\varphi}{\partial \omega} & \frac{\partial p_\varphi}{\partial \psi} \end{vmatrix} = J^2 \omega \sin\vartheta.$$

Da die Integration über ϑ von 0 bis π, über φ und ψ von 0 bis 2π, und über ω von ω bis $\omega + d\omega$ zu erstrecken ist, so erhellt in der Tat, daß $W(\omega)$ proportional ω ist.

1) Theorie der Wärmestrahlung, § 138, p. 137. Verh. d. D. Physik. Ges. **17**. p. 411. 1915.

§ 6.

Der zweite Weg zur theoretischen Bestimmung von $W(\omega)$ ist ein elektrodynamischer. Auf ihm ergibt sich die Verteilungsdichte dadurch, daß man $W(\omega)$ gleichsetzt derjenigen Verteilungsdichte, welche sich unter den rotierenden Gasmolekeln durch die alleinige Einwirkung der schwarzen Strahlung bei der betreffenden Temperatur herstellt. Dabei wird ein bekannter, zuerst von Einstein angegebener, dann von Fokker verallgemeinerter Satz der statistischen Dynamik benutzt, in Verbindung mit der Hypothese, daß innerhalb eines Elementargebietes der Rotationsgeschwindigkeiten keine Ausstrahlung (Emission) von Energie, sondern nur Einstrahlung stattfindet. Der Einstein-Fokkersche Satz lautet in der Anwendung auf den vorliegenden Fall und mit der hier gebrauchten Bezeichnung[1]):

$$W(\omega)\cdot\overline{\Delta\omega}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{W(\omega)\cdot\overline{(\Delta\omega)^2}\right\}=0, \tag{30}$$

gültig innerhalb des ganzen Elementargebietes der Rotationsgeschwindigkeiten zwischen ω_n und ω_{n+1}.

Zur Berechnung von $\overline{\Delta\omega}$ und $\overline{(\Delta\omega)^2}$ können wir den oben abgeleiteten Wert von Δu benutzen. Um zunächst $\overline{\Delta u}$ zu erhalten, hat man in (21) zu setzen:

$$\overline{C_n^2}=\beta\cdot\mathfrak{K}_\omega\, d\omega, \tag{31}$$

wo $\mathfrak{K}_\omega$ die der Ordnungszahl n der Fourierschen Reihe (18) entsprechende spezifische Strahlungsintensität (Flächenhelle) der schwarzen Strahlung, β einen gewissen konstanten Zahlenfaktor bedeutet, auf dessen Wert es hier zunächst nicht weiter ankommt, und dann über ω von 0 bis ∞ zu integrieren. Also:

$$\overline{\Delta u}=\frac{\beta E^2\tau^2}{4J}\cdot\int_0^\infty\frac{\mathfrak{K}_\omega\, d\omega}{\xi^2}\left\{\frac{\omega_0\tau}{\xi}(2-2\cos\xi-\xi\sin\xi)+2-2\cos\xi\right\}. \tag{32}$$

Führt man als Integrationsvariable ξ statt ω ein, mittels der Beziehungen:

$$(\omega-\omega_0)\tau=\xi,\qquad d\omega=\frac{d\xi}{\tau}, \tag{33}$$

und, wegen (9),

$$\mathfrak{K}_\omega=\mathfrak{K}_{\omega_0}+\frac{\xi}{\tau}\left(\frac{d\mathfrak{K}}{d\omega}\right)_{\omega_0}, \tag{34}$$

1) Vgl. M. Planck, Berl. Ber. vom 10. Mai 1917, p. 324, Gl. (11) und § 11.

so liefert die Ausführung der Integration:

$$\overline{\Delta u} = \frac{\beta E^2 \tau}{4J}\left\{2\pi \mathfrak{R}_{\omega_0} + \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega}\right)_{\omega_0} \omega_0 \pi\right\}. \tag{35}$$

Was ferner die Berechnung von $\overline{(\Delta u)^2}$ betrifft, so genügt es hierfür, in der Gleichung (13) für Δu nur die Glieder der höchsten Größenordnung zu berücksichtigen. Dies ergibt:

$$\Delta u = \Delta_2 u = E\int_0^\tau (-\mathfrak{E}_x \sin\omega_0 t + \mathfrak{E}_y \cos\omega_0 t)\,\omega_0\, dt, \tag{36}$$

wo für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ Fouriersche Reihen nach Art von (18) zu setzen sind.

Führt man die Integration nach t aus, erhebt den Ausdruck von Δu ins Quadrat und bildet dann den Mittelwert für alle Rotatoren mit dem nämlichen ω_0, so erhält man:

$$\overline{(\Delta u)^2} = E^2 \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \overline{C_n^2}\, \frac{\sin^2 \frac{\omega_n - \omega_0}{2}\tau}{(\omega_n - \omega_0)^2},$$

oder nach (31), (33) und (34):

$$\begin{cases} \overline{(\Delta u)^2} = \beta E^2 \omega_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\tau}\left\{\mathfrak{R}_{\omega_0} + \frac{\xi}{\tau}\left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega}\right)_0\right\} \frac{\tau^2}{\xi^2}\sin^2\frac{\xi}{2} \\ \qquad = \frac{\pi}{2}\beta E^2 \omega_0^2 \tau\, \mathfrak{R}_{\omega_0}. \end{cases} \tag{37}$$

Um nun von Δu zu $\Delta\omega$ überzugehen, bedenken wir, daß nach (2):

$$\Delta u = J\omega_0 \Delta\omega + \frac{J}{2}(\Delta\omega)^2;$$

folglich nach (35):

$$\overline{\Delta u} = J\omega_0 \overline{\Delta\omega} + \frac{J}{2}\overline{(\Delta\omega)^2} = \frac{\pi\beta E^2 \tau}{4J}\left[2\mathfrak{R}_{\omega_0} + \omega_0\left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega}\right)_0\right]$$

und nach (37):

$$\overline{(\Delta u)^2} = J^2\omega_0^2 \overline{(\Delta\omega)^2} = \frac{\pi}{2}\beta E^2 \omega_0^2 \tau\, \mathfrak{R}_{\omega_0}.$$

Dies ergibt:

$$\begin{cases} \overline{\Delta\omega} = \frac{\pi\beta E^2 \tau}{4J^2}\left[\frac{\mathfrak{R}_0}{\omega_0} + \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega}\right)_0\right], \\ \overline{(\Delta\omega)^2} = \frac{\pi\beta E^2 \tau}{2J^2}\mathfrak{R}_0 \end{cases} \tag{38}$$

und diese Ausdrücke, mit Weglassung des Index 0, in (30) eingesetzt, ergeben die folgende Differentialgleichung für $W(\omega)$:

$$\frac{W(\omega)}{\omega} - \frac{d\,W}{d\,\omega} = 0\,,$$

welche in der Tat wiederum zu der Folgerung führt, daß $W(\omega)$ proportional ω ist.

§ 7.

Von der Verteilungsdichte $W(\omega)$ im Innern eines Elementargebietes gehen wir jetzt über zur Betrachtung des Sprunges, den $W(\omega)$ bei

$$\omega = \omega_n = \frac{n\,h}{2\,\pi\,J}, \tag{39}$$

der Grenze der Elementargebiete $n-1$ und n, erleidet.

Integrieren wir nämlich die Gleichung (23) über ω von einem Werte, der sehr wenig kleiner ist als ω_n, bis zu einem Werte, der sehr wenig größer ist als ω_n, so erhalten wir die ganze in dem Spektralbezirke bei ω_n von den Rotatoren absorbierte Energie, welche ein Maß bildet für die Stärke der Absorptionslinie $\omega = \omega_n$:

$$A_n = \frac{2\pi^2 N E^2 \tau}{3\,c\,J} \cdot \omega_n \left(W_{n-1}(\omega_n) - W_n(\omega_n)\right) \bar{E}_{\omega_n}. \tag{40}$$

Diese Gleichung ist völlig identisch mit der in meiner ersten Mitteilung durch (27) bezeichneten Gleichung für die Absorption von Rotatoren mit festen Drehungsachsen; sie liefert aber dennoch ganz andere Werte für die Absorption als jene, weil hier die Verteilungsdichte W eine andere ist. Während nämlich bei festen Drehungsachsen W innerhalb eines Elementargebietes unabhängig ist von ω, hat man, wie wir gesehen haben, bei freien Drehungsachsen $W_n(\omega)$ proportional ω anzunehmen. Der absolute Wert von $W_n(\omega)$ hängt natürlich von der Temperatur ab; man findet ihn nach allgemeinen thermodynamisch-statistischen Prinzipien[1]) aus der Gleichung für die „Verteilungszahl"

$$w_n = \int_{\omega_n}^{\omega_{n+1}} W_n(\omega)\,d\,\omega = \frac{p_n \cdot e^{-\frac{\bar{u}_n}{k\,T}}}{\sum_0^\infty p_n \cdot e^{-\frac{\bar{u}_n}{k\,T}}}, \tag{41}$$

1) Verh. d. D. Physik. Ges. 17. p. 412. Gl. (18). 1915.

wobei in unserem Falle [1])

$$p_n = 2n + 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_n = \frac{h^2}{8\pi^2 J}(n^2 + n + \tfrac{1}{2}). \tag{42}$$

Durch diese Bedingungen ist $W_n(\omega)$ vollkommen bestimmt, und zwar ist:

$$W_n(\omega) = \frac{8\pi^2 J^2}{h^2} \cdot \frac{\psi^{n^2+n}}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}} \cdot \omega, \tag{43}$$

wo

$$\psi = e^{-\frac{h^2}{8\pi^2 J k T}}, \tag{44}$$

und daraus ergibt sich nach (40):

$$A_n = \frac{4\pi^2 N E^2 \tau}{3 c J} \cdot E_{\omega_n} \cdot \frac{n^2 \cdot \psi^{n^2-n}(1-\psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}. \tag{45}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich in charakteristischer Weise von dem entsprechenden für den Fall fester Drehungsachsen gültigen, in meiner ersten Mitteilung mit (30) bezeichneten.

§ 8.

Wenn wir die spektrale Intensität der auffallenden Strahlung nicht auf Frequenzen ω, sondern, wie es in der Experimentalphysik üblich ist, auf Wellenlängen λ beziehen, so ist

$$E_\omega d\omega = E_\lambda d\lambda, \quad E_\omega = E_\lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi c},$$

und, da nach (39):

$$\lambda_n = \frac{4\pi^2 c J}{n h}, \tag{46}$$

so wird die absorbierte Energie:

$$A_n = \frac{32\pi^5 N E^2 J \tau}{3 h^2} \cdot E_\lambda \cdot \frac{\psi^{n^2-n}(1-\psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}. \tag{47}$$

Sieht man von den konstanten Faktoren ab, so ergibt sich als ein Maß für die Stärke der Absorptionslinie bei $\lambda = \lambda_n$ die Zahl

$$\alpha_n = \frac{\psi^{n^2-n}(1-\psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}. \tag{48}$$

1) l. c. p. 415, § 7.

Dieser Ausdruck verschwindet für $n = 0$ und $n = \infty$, d. h. die längsten wie auch die kürzesten Wellen des Spektrums werden nicht absorbiert; dazwischen besitzt er also ein Maximum. Nehmen wir an, daß ψ nahe gleich 1 ist, was bei hinreichend hohen Temperaturen stets der Fall sein wird, so läßt sich die Lage des Maximums dadurch finden, daß man den Zähler von (48) — denn dieser allein hängt von n ab — nach n differentiiert und den Differentialkoeffizienten gleich Null setzt. Dies ergibt für die Lage der maximalen Absorption:

$$\psi^{2n} = \frac{2n-1}{2n+1},$$

oder, mit Berücksichtigung von (44) und Bildung des Logarithmus auf beiden Seiten, in erster Annäherung:

$$n_{\max.} = \frac{2\pi}{h}\sqrt{JkT}.$$

Daher nach (46):

$$\lambda_{\max.} = 2\pi c\sqrt{\frac{J}{kT}}. \tag{49}$$

Das ist die Wellenlänge maximaler Absorption.

Aber auch in bezug auf die Temperatur besitzt die Stärke der Absorption für irgendeine bestimmte Absorptionslinie λ_n ein Maximum, da (48) sowohl für $T = 0$ ($\psi = 0$) als auch für $T = \infty$ ($\psi = 1$) verschwindet. Dies erklärt sich natürlich daraus, daß im ersten Falle die Rotationsgeschwindigkeiten aller Dipole zu klein, im zweiten Falle zu groß sind, um die Strahlen der Wellenlänge λ_n merklich zu absorbieren. Bei der Berechnung der Temperatur maximaler Absorption berücksichtigen wir wiederum nur den Fall, daß ψ nahe gleich 1 ist. Dann ist angenähert:

$$\sum_0^\infty (2n+1)\psi^{n^2+n} = \int_0^\infty dn \cdot 2\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot \psi^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot \psi^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\ln\psi},$$

$$\text{also } \alpha_n = \left(\psi^{n^2+n} - \psi^{n^2-n}\right)\ln\psi$$

und es folgt für das Maximum von α_n, mittels Differentiation nach ψ, bei konstantem n:

$$\psi^{2n} = 1 - \frac{2n}{\frac{1}{\ln\psi} + n^2 + n},$$

oder, durch Bildung des Logarithmus, in erster Annäherung:

$$2n \ln \psi = - \frac{2n}{\frac{1}{\ln \psi} + n^2 + n}.$$

Hieraus:

$$\ln \psi = - \frac{2}{n^2 + n},$$

und, bei Vernachlässigung von n gegen n^2, nach (44) und (46):

$$T_{\max.} = \frac{\pi^2 c^2 J}{k \lambda_n^2}. \tag{50}$$

§ 9.

Um die Bedeutung dieser Resultate besser übersehen zu können, wollen wir jetzt auf die numerischen Verhältnisse beim Rotationsspektrum des Wasserdampfes etwas eingehen. Zwar sind die H_2O-Molekeln sicherlich nicht als einfache Dipole zu betrachten, d. h. als Rotationskörper, deren Trägheitsmoment in bezug auf die Symmetrieachse verschwindend klein ist gegen das Trägheitsmoment zu einer darauf senkrechten Achse; aber da es sich hier nur um eine vorläufige Orientierung handelt, so wird ein solcher tastender Vorstoß auf bisher noch unbetretenem Gebiete gewiß nicht als ganz unzulässig erachtet werden.

Nach Rubens und Hettner[1]) entspricht der Ordnungszahl $n = 12$ der Bjerrumschen Serie die Absorptionslinie $\lambda_n = 14{,}3\ \mu$, also nach (46) das Trägheitsmoment

$$J = 9{,}4 \,.\, 10^{-41}\ [\mathrm{g\ cm^2}],$$

dessen Wert in das auch anderweitig bekannte Gebiet der Größenordnung für molekulare Trägheitsmomente fällt.

Dieser Wert von J, in Verbindung mit der Temperatur des Wasserdampfes $T = 398$ liefert nach (44)

$$\psi = 0{,}90,$$

also immerhin der Einheit so nahe, daß eine Benutzung der obigen Formeln wenigstens für eine erste grobe Annäherung unbedenklich erscheint.

Dann liefert die Beziehung (49) für die Wellenlänge der stärksten Absorption:

$$\lambda_{\max.} = 0{,}008\ \mathrm{cm} = 80\ \mu,$$

1) H. Rubens u. G. Hettner, Berl. Ber. 1916. p. 179.

welche der Absorptionslinie mit der Ordnungszahl $n = 2$ der Bjerrumschen Serie entsprechen würde.

Ein Vergleich mit der Fig. 1 der Arbeit von Rubens und Hettner zeigt in Übereinstimmung hiermit ein starkes Anwachsen der Stärke der Absorption mit steigender Wellenlänge, d. h. mit abnehmender Ordnungszahl n.

Was ferner die Temperatur betrifft, bei welcher eine bestimmte Linie, etwa die oben betrachtete: $n = 12$, $\lambda_n = 14{,}3\ \mu$, ihre stärkste Absorption zeigt, so ergibt sich diese aus der Gleichung (50) zu:

$$T_{\text{max.}} = 3100,$$

also ungefähr 2800° C. Es ist daher für die betrachtete Linie von der Beobachtungstemperatur 125° C ab noch ein starkes Anwachsen der Absorption mit steigender Temperatur zu erwarten. Für die Absorptionslinien größerer Wellenlängen liegt dagegen die Temperatur der Maximalabsorption erheblich tiefer, da nach (50) dieselbe dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional ist; so z. B. ergibt sich für die Linie $n = 5$, $\lambda_n = 33{,}3\ \mu$:

$$T_{\text{max.}} = 580,$$

also ungefähr 300° C. Beim Erhitzen des Wasserdampfes über 300° hinaus müßte also die Stärke der Absorption dieser Linie wieder abnehmen.

§ 10.

Schließlich möge an die hier erhaltenen Resultate noch eine Betrachtung geknüpft werden, die zu einer Ableitung des Gesetzes der normalen Energieverteilung im Spektrum der schwarzen Strahlung führt und dadurch zugleich eine Prüfung der ganzen Theorie ermöglicht.

Wenn die rotierenden Dipole lediglich der ihrer Temperatur entsprechenden schwarzen Strahlung ausgesetzt sind, so ist der ganze Vorgang im statistischen Sinne *stationär*, sofern man außer der Einstrahlung auch die Ausstrahlung (Emission der Dipole) berücksichtigt. Nun habe ich vor kurzem bei anderer Gelegenheit[1]) die für den statistisch-stationären Zustand gültigen Gesetze vom Standpunkte der Quantentheorie aus untersucht, und dabei für den Sprung der Verteilungsdichte $W(\omega)$ an der Grenze zweier Elementargebiete

1) M. Planck, Berl. Ber. p. 336. Gl. (26). 1917.

eine allgemeine Formel abgeleitet, welche in den hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermaßen lautet:

$$(51)\quad \tfrac{1}{2}\overline{(\Delta\omega_n)^2}\,(W_{n-1}(\omega_n) - W_n(\omega_n)) = \tau f(\omega_n)\cdot W_n(\omega_n)\cdot \frac{d\omega_n}{dn}\,.$$

Dabei bedeutet noch $f(\omega)\,.\,\tau$ die gemäß der klassischen Theorie in der Zeit τ durch Emission bewirkte Abnahme der Winkelgeschwindigkeit ω eines rotierenden Dipols:

$$(52)\quad f(\omega)\cdot\tau = \frac{2E^2\omega^3}{3c^3J}\cdot\tau,$$

entsprechend der ausgestrahlten Energie:

$$(53)\quad \Delta\left(\tfrac{1}{2}J\omega^2\right) = \frac{2E^2\omega^4}{3c^3}\cdot\tau\,.$$

Setzt man nun in diese Bedingungsgleichung für $\overline{(\Delta\omega_n)^2}$ den Ausdruck (38), für $W_n(\omega_n)$ bzw. $W_{n-1}(\omega_n)$ den Ausdruck (43), und für $d\omega_n/dn$ nach (39) den Ausdruck $h/2\pi J$, so ergibt sich die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung:

$$(54)\quad \mathfrak{R}_{\omega_n} = \frac{4h\omega_n^3}{3\pi^2c^3\beta(\psi^{-2n}-1)}\,.$$

Hier ist nach (44) und (39):

$$(55)\quad \psi^{-2n} = e^{\frac{h\omega_n}{2\pi kT}}.$$

Der oben durch (31) definierte Zahlenfaktor β endlich ergibt sich am direktesten aus der Formel (157), Seite 106, meiner Vorlesungen über Wärmestrahlung, die so lautet:

$$\overline{C_n^2} = \frac{64\pi^2}{3c\mathfrak{T}}\mathfrak{R}_\nu\,.$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} = \frac{\Delta n}{\mathfrak{T}} = d\nu,$$

so kommt:

$$\overline{C_n^2} = \frac{64\pi^2}{3c}\mathfrak{R}_\nu\,d\nu = \frac{64\pi^2}{3c}\mathfrak{R}_\omega\,d\omega,$$

und durch Vergleich mit (31):

$$(56)\quad \beta = \frac{64\pi^2}{3c}\,.$$

Damit wird die Gleichung (54) für die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung:

$$\mathfrak{K}_\omega^* = \frac{\hbar\omega^3}{16\pi^4 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2\pi kT}} - 1}, \tag{57}$$

wie bekannt.

In der Kette der Schlußfolgerungen, welche dieser Ableitung der Strahlungsformel zugrunde liegen, ist das schwächste Glied jedenfalls die Grenzbedingung (51); doch muß bemerkt werden, daß, falls diese Bedingung sich als unzutreffend herausstellen sollte, dann jedenfalls noch mindestens eine der übrigen hier benutzten Beziehungen, wahrscheinlich sogar die ganze Theorie der Absorption, fallen gelassen werden müßte, weil ja sonst ein falsches Strahlungsgesetz resultieren würde. Die Möglichkeit eines solchen Befundes ist allerdings bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse durchaus nicht von der Hand zu weisen; derselbe wäre aber dann doch wohl von ähnlicher Bedeutung wie etwa der für die ganze Quantentheorie so wichtige Nachweis, daß die unbeschränkte Beibehaltung der klassischen Theorie mit Notwendigkeit zum Rayleighschen Strahlungsgesetz führt.

(Eingegangen 17. Juli 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen;* von *A. Rubinowicz.*

Inhaltsübersicht: Einleitung. — § 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals. — § 2. Struktur der elementaren Beugungswelle. — § 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoffschen Lösung. — § 4. Verhalten der Kirchhoffschen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme. — § 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit. — § 6. Die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene. — § 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem. — § 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Der erste Versuch, auf Grund der Wellentheorie des Lichtes eine Erklärung der Beugungsphänomene zu geben, rührt von Thomas Young (1802) her, der diese Erscheinung auf die Interferenz einer direkt einfallenden mit einer von der Schirmkante ausgehenden Lichtwelle zurückführte. Da aber die Lage der so berechneten Beugungsstreifen mit der Erfahrung nicht völlig übereinstimmte, sah sich August Fresnel (1816) veranlaßt, durch eine Erweiterung des Huygensschen Prinzipes für die Theorie der Beugung ein neues Fundament zu schaffen, das später von Kirchhoff mit Hilfe der Theorie der Wellengleichung noch fester begründet wurde. Die schließlich von Sommerfeld[1]) (1894) gegebene, völlig strenge Lösung des Beugungsproblemes für eine blanke Halbebene zeigte dann, daß in diesem Spezialfalle einerseits die nach dem Kirchhoffschen Verfahren gewonnenen Formeln für nicht zu große Beugungswinkel quantitativ hinreichend genau sind und andererseits sich in diesem Falle, in qualitativer Übereinstimmung mit der Youngschen Vorstellung, eine einfallende und eine von der beugenden Kante ausgehende zylindrische Beugungswelle unterscheiden

1) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47. p. 317. 1896 und Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46. p. 11. 1901. Diese Arbeiten werden im folgenden mit S. I und S. II bezeichnet.

läßt. Übrigens wird das Vorhandensein einer solchen Beugungswelle auch aus einzelnen nach dem Kirchhoffschen Verfahren gewonnenen Lösungen plausibel.[1]) Maey[2]) hat auch für den Fall der Halbebene direkt von der Kirchhoffschen Lösung die Beugungswelle abspalten können.

Gleichwohl ist es interessant, zu sehen, daß die Youngsche Theorie vom leuchtenden Schirmrande sich in den nach Kirchhoff behandelten Spezialfällen nicht nur zufällig bestätigt. Wie wir nämlich zeigen wollen, läßt sich die Funktion, die durch das von Kirchhoff benutzte Flächenintegral dargestellt wird, durch eine einfache Umformung spalten in eine im Sinne der geometrischen Optik zu definierende *einfallende Lichtwelle* und in eine vom Schirmrande ausgehende *Beugungswelle*. Dabei kann man sich die Beugungswelle nach einem Elementargesetze entstanden denken, welches jedem Punkte des Schirmrandes eine, allein durch die geometrische Lage des betreffenden Randelementes und der Lichtquelle bestimmte, unsymmetrische Kugelwelle zuordnet. Man überzeugt sich sodann, daß sich die Kirchhoffsche Lösung durch eine reguläre, gemäß der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

erfolgende Fortsetzung überall im Raume, wo sich der physikalische Vorgang abspielt, definieren läßt, was die Feststellung der analytischen Eigenschaften des Kirchhoffschen schwarzen Schirmes ermöglicht. Schließlich wird noch mit Benutzung der gegebenen Umformung des Kirchhoffschen Integrals die Beugung an einer Halbebene behandelt, und es zeigt sich, daß die so erhaltene Lösung mit der strengen Sommerfeldschen sehr nahe verwandt ist, ja daß sie geradezu aus den Bausteinen der letzteren sich zusammensetzen läßt.

§ 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrales.

Die wesentlichsten Tragsäulen der Kirchhoffschen Beugungstheorie sind die folgenden Tatsachen und Annahmen:

$u\,(x, y, z)$ sei eine in einem Bereiche G einmal stetig differentierbare Lösung der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0\,.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik. Leipzig 1891. p. 133.
2) E. Maey, Ann. d. Phys. 49. p. 69. 1893.

Mit $\bar{u}$ und $\overline{\partial u/\partial n}$ mögen an der Begrenzung (G) des Gebietes G die Werte der Funktion u bzw. die ihrer Ableitung nach der inneren Normalen n bezeichnet werden. Es stellt dann das über (G) erstreckte Flächenintegral

$$(1) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint_{(G)}\left\{\bar{u}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\,\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right\}df$$

eine in dem x, y, z-Raume diskontinuierliche Funktion dar, die innerhalb G gleich u und außerhalb dieses Gebietes gleich Null ist. Werden aber in dem Integral (1) für die Randwerte $\bar{u}$ und $\overline{\partial u/\partial n}$ Funktionen gewählt, die nicht einer in G regulären Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ entnommen wurden, so stellt zwar der Ausdruck (1) eine in G reguläre Lösung der Schwingungsgleichung dar, die ihr auf (G) entsprechenden Grenzwerte von u und $\partial u/\partial n$ sind aber im allgemeinen von den in (1) eingesetzten Werten $\bar{u}$ und $\overline{\partial u/\partial n}$ verschieden.

Kirchhoff macht nun die (qualitativ durch die Kleinheit der Wellenlänge nahegelegte, quantitativ aber doch nur allein durch den Enderfolg zu rechtfertigende) Annahme, daß an der beschatteten Seite des Schirmes S die Lichtausbreitung durch das Integral

$$(2) \qquad u = \frac{1}{4\pi}\iint_{F}\left\{\bar{u}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\,\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right\}df$$

gegeben wird, wo F die Beugungsöffnung, d. h. irgendeine den beugenden Schirmrand B überspannende Fläche ist. Für $\bar{u}$ und $\overline{\partial u/\partial n}$ sind hier die Werte jener Funktion zu nehmen, die bei Abwesenheit des beugenden Schirmes die Ausbreitung des Lichtes darstellt. Ist also, wie wir dies im folgenden annehmen wollen, die Lichtquelle L punktförmig und im Endlichen gelegen, so werden $\bar{u}$ und $\overline{\partial u/\partial n}$ durch die Funktion $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ bestimmt, wo ϱ die Entfernung von L bedeutet.

Das Integral (2) — wir wollen es in der Folge das Kirchhoffsche Beugungsintegral nennen — soll nun einer Umformung unterzogen werden. K sei die der geometrischen Schattengrenze entsprechende Fläche. Sie besteht aus allen an der Schattenseite des Schirmes gelegenen Punkten einer Kegelfläche, die eine durch den Lichtpunkt L hindurchgehende Gerade beim Umlaufen des beugenden Schirm-

randes B erzeugt. Nehmen wir nun in dem über F und K erstreckten Integral (1) die Randwerte u und $\overline{\partial u/\partial n}$ so an, wie dies der Funktion $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ entspricht, so erhalten wir eine diskontinuierliche Funktion

$$(3) \qquad u_E = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{F+K}\left\{\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\right\} df,$$

die nach (1) überall in dem „direkt beleuchteten" von F und K begrenzten Raume R mit $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ identisch ist, außerhalb R aber verschwindet. u_E („einfallendes u") stellt somit an der von der Lichtquelle abgewandten Seite des Schirmes eine Lichtverteilung dar, wie man sie bei Außerachtlassung der Beugungserscheinungen nach der geometrischen Optik erwartet. Beachten wir, daß K von den Kugelflächen $\varrho = \text{const}$ senkrecht geschnitten wird und demnach hier

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}\right) = 0$$

und daß ferner

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot\cos(nr) = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{ikr}\cos(nr)$$

ist, so erhalten wir aus (3) für das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) den Ausdruck

$$(4) \qquad u = u_E - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{K}\frac{e^{ik(\varrho+r)}}{\varrho}\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\cos(nr)\,df.$$

Es erübrigt jetzt noch, das hier auftretende Flächenintegral, das wir in der Folge mit u_B („gebeugtes u") bezeichnen wollen, durch eine Integration auf ein über den beugenden Rand B erstrecktes Linienintegral zurückzuführen. Als orthogonale Flächenkoordinaten wählen wir auf K die Entfernung von der Lichtquelle L, nämlich ϱ, und die Schnittlinien σ der Fläche K mit den Kugelflächen $\varrho = \text{const}$. Bezeichnen wir ein Linienelement von B mit ds und seine Entfernung von L mit ϱ_s, so ist (vgl. Fig. 1)

$$d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s}\sin(\varrho_s, ds)\,ds$$

und daher

$$df = d\varrho\,d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s}\sin(\varrho_s, ds)\,d\varrho\,ds.$$

Ist ferner r_s die Entfernung zwischen ds und dem betrachteten Aufpunkte P, so gilt auf jeder durch L und ds hindurchgehenden Geraden:

$$r^2 = r_s^2 + (\varrho - \varrho_s)^2 + 2\, r_s\, (\varrho - \varrho_s) \cos(r_s, \varrho_s)\,.$$

Da nun offenbar die Projektionen von r und r_s, die beide zu einer Geraden $\overline{Ld\sigma}$ gehören, auf das von P auf $\overline{Ld\sigma}$ gefällte Lot einander gleich sind, so ist

$$\cos(n, r) = \frac{r_s}{r} \cos(n, r_s)\,.$$

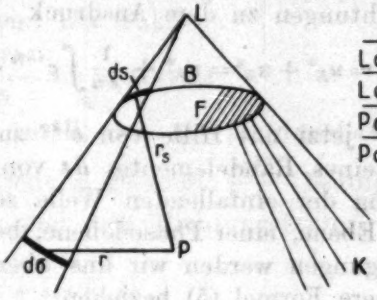


Fig. 1.

Als Winkel (ϱ_s, ds), (r_s, ϱ_s), (n, r), (n, r_s) sind dabei die Absolutbeträge der kleinsten Winkel zwischen den positiven Richtungen der betreffenden Geraden zu nehmen. Das umzuformende Doppelintegral u_B lautet demnach:

$$u_B = -\frac{1}{4\pi} \int_B ds \sin(\varrho_s, ds) \cos(n, r_s) \frac{r_s}{\varrho_s} \int_{\varrho_s}^{\infty} d\varrho\, e^{ik(\varrho + r)} \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right).$$

Nun ist

$$\int_{\varrho_s}^{\infty} e^{ik(\varrho + r)} \frac{ik}{r^2}\, d\varrho = \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)}\right) \cdot \frac{1}{(1 + [dr/d\varrho])\, r^2}\, d\varrho$$

$$= \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)}\right) \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos[r_s, \varrho_s])\, r}\, d\varrho\,,$$

und da ferner, wovon man sich leicht überzeugt,

$$\frac{d}{d\varrho} \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos[r_s, \varrho_s])\, r} = -\frac{1}{r^3}\,,$$

so ist

$$\int_{\varrho_s}^{\infty} e^{ik(\varrho + r)} \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) d\varrho = \int_{\varrho_s}^{\infty} \frac{d}{d\varrho} \left(e^{ik(\varrho + r)} \frac{1}{(r + \varrho - \varrho_s + r_s \cos[r_s, \varrho_s])\, r}\right) d\varrho$$

$$= -\frac{e^{ik(\varrho_s + r_s)}}{r_s^2 (1 + \cos[r_s, \varrho_s])}\,.$$

Es wird daher schließlich

$$(5)\quad u = u_E + u_B = u_E + \frac{1}{4\pi}\int_B \frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s}\cdot\frac{e^{ikr_s}}{r_s}\cdot\frac{\cos(n,r_s)}{1+\cos(r_s,\varrho_s)}\sin(\varrho_s,ds)\,ds.$$

Für den Fall, daß die Beugungserscheinungen durch eine ebene Welle e^{ikx} bedingt werden, führen die vorangehenden Betrachtungen zu dem Ausdruck

$$(5a)\quad u^* = u_E^* + u_B^* = u_E^* + \frac{1}{4\pi}\int_B e^{ikf_s}\cdot\frac{e^{ikr_s}}{r_s}\cdot\frac{\cos(n,r_s)}{1+\cos(r_s,x)}\cdot\sin(x,ds)\,ds,$$

wo u_E^* jetzt mit Hilfe von e^{ikx} zu bilden ist und f_s den Abstand eines Randelementes ds von einer zur Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle senkrechten und im Raume festen Ebene, einer Phasenebene, bedeutet. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns aber ausschließlich auf die allgemeinere Formel (5) beziehen.

§ 2. Struktur der elementaren Beugungswelle.

Die Darstellung der Beugungserscheinungen durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) ging von der Erfahrung aus und wurde auch an ihr durch Versuche erprobt. In einer ebensolchen Beziehung zur Erfahrung steht selbstverständlich auch seine hier gegebene Umformung (5), die, wie leicht einzusehen ist, qualitativ der Youngschen Vorstellung von dem Entstehen der Beugungserscheinungen entspricht und die mithin als eine auf empirischer Basis ruhende quantitative Präzisierung dieser Anschauung gelten kann. Es entsprechen nämlich die beiden Bestandteile, u_E und u_B, in der Funktion (5), die zunächst ebenso wie das mit ihr identische Integral (2) nur an der Schattenseite des Schirmes den Beugungsvorgang darstellen will, unmittelbar der einfallenden und der gebeugten Welle. Bezüglich u_E ist dies in der Tat nach dessen Herstellungsart klar, und was u_B betrifft, so entsteht dieses durch Superposition der Kugelwellen

$$(6)\quad du_B = \frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s}\cdot\frac{e^{ikr_s}}{r_s}\cdot\frac{\cos(n,r_s)}{1+\cos(r_s,\varrho_s)}\sin(\varrho_s,ds)\,ds$$

die alle ihren Ursprung in den einzelnen Punkten des beugenden Randes B haben.[1]) Da ein jedes du_B durch die geometrische

1) Der experimentelle Nachweis für die Existenz der Beugungswellen ist von A. Kalaschnikoff (Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 44. phys. Teil, p. 133. 1912) durch eine sehr elegante objektive Versuchsanordnung erbracht worden.

Lage von ds zur Lichtquelle L allein bestimmt wird und nicht etwa auch von der Gestalt des beugenden Schirmes S oder von dem übrigen Verlaufe des beugenden Randes B abhängt, kann (6) als ein der Youngschen Vorstellungsweise entsprechendes Elementargesetz der Beugung angesprochen werden.

Der Bau der elementaren Beugungswelle du_B ist nun sehr einfach zu überblicken. Der Faktor

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s} \cdot \sin(\varrho_s, ds)\, ds$$

bestimmt sozusagen den Anteil, den die Lichtquelle L dem Randelemente ds zur Zerstreuung überläßt; $\frac{e^{ikr_s}}{r_s}$ bedingt, daß du_s eine Kugelwelle wird; und dem Richtungsfaktor

$$\frac{\cos(n, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)}$$

ist der unsymmetrische Bau dieser Kugelwelle zuzuschreiben. du_B ist ferner überall im Raume regulär, mit alleiniger Ausnahme von ds selbst und dessen Schattengrenze, wo

$$\cos(r_s, \varrho_s) = -1$$

und daher der Richtungsfaktor im allgemeinen unendlich wird.

Nun ist die Frage von Interesse, wie sich diese Singularitäten von du_B im Verhalten der Funktion u_B an dem beugenden Schirmrande B und an der Schattengrenze K äußern. Um zunächst zu zeigen, daß u_B in allen Punkten der Kurve B, wo deren Krümmung nicht unendlich wird, auch selbst endlich bleibt, genügt es, das gleiche Verhalten für das über ein kleines geradliniges Stück von B erstreckte Integral $J = \int du_B$ nachzuweisen. (Ein etwaiges Unendlichwerden von u_B in B könnte nämlich nur durch Integralelemente bewirkt werden, die auf B in unmittelbarster Nähe des gegen B hinstrebenden Aufpunktes gelegen sind.) Zu diesem Zwecke formt man am bequemsten dieses Integral so um, wie dies bei der Betrachtung der Beugung an einer Halbebene in § 6 geschieht. Schließlich erkennt man leicht, daß u_B in K einen Sprung erleidet, der die hier vorhandene Unstetigkeit von u_E gerade kompensiert. $u_E + u_B$ wird ja an der Schattenseite des Schirmes durch das Kirchhoffsche Integral gegeben, das stets eine im ganzen Raume mit alleiniger Ausnahme der Fläche F reguläre Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ darstellt. Übrigens kann man

dieses unstetige Verhalten von u_B auch aus der in (4) enthaltenen Integraldarstellung dieser Funktion nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Schwingungsgleichung erschließen.[1])

§ 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoffschen Lösung.

Bisher haben wir die Lösung des Kirchhoffschen Beugungsproblemes nur an der Schattenseite des Schirmes betrachtet, wo sie mit der durch das Kirchhoffsche Integral definierten Funktion — die von nun an $u_{\text{Kirch.}}$ heißen möge — identisch war. An der beleuchteten Seite von S stellt nun aber $u_{\text{Kirch.}}$ den Beugungsvorgang sicherlich nicht dar. $u_{\text{Kirch.}}$ ist ja[2]) im ganzen Raume mit alleiniger Ausnahme von F regulär, besitzt also keine der Lichtquelle L entsprechende Singularität. Es läßt sich auch das nicht reguläre Verhalten von $u_{\text{Kirch.}}$ in F[2]) physikalisch in keiner Weise rechtfertigen. Den „physikalischen Zweig" der Funktion u, $u_{\text{phys.}}$, der den gesamten physikalischen Vorgang beschreiben soll, erhalten wir aber, wenn wir das an der Schattengrenze des Schirmes S gegebene

$$u_{\text{phys.}} = u_{\text{Kirch.}} = u_E + u_B$$

auf die Lichtseite von S durch die Fläche F hindurch gemäß der Schwingungsgleichung regulär fortsetzen. Das Resultat dieses Vorgehens ist an der Hand der Formel (5) sofort zu übersehen: u_B wird im ganzen Raume durch das Integral in (5) bestimmt, und u_E ist überall im schraffierten Gebiete der zweidimensional schematisierten Fig. 2 gleich Null, im nichtschraffierten gleich $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$.

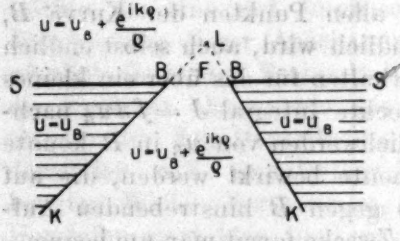


Fig. 2.

Wir sind jetzt aber auch in der Lage, die Gesamtheit *aller* Zweige der Funktion u anzugeben. Setzen wir nämlich $u_{\text{phys.}} = u_E + u_B$ etwa von der beleuchteten Seite von S her

1) Vgl. etwa F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ usw. Leipzig 1891. p. 235.

2) F. Pockels, l. c. p. 229 u. f.

durch S hindurch weiter fort, so erhalten wir einen neuen Zweig von u, der, wie dies wieder die Darstellung (5) ergibt, durch

$$u_{\text{phys.}} + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

gegeben ist. Das heißt, wird der beugende Rand B einmal in einem solchen Sinne umkreist, daß zuerst die beleuchtete und dann die beschattete Seite von S passiert wird, so wächst dabei $u_{\text{phys.}}$ um $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$. Wenn wir also B fortgesetzt umkreisen, bekommen wir für die gesamte Funktion u offenbar die Darstellung:

$$(7) \quad \begin{cases} u = u_{\text{phys.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} = u_B + u_E + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

Jetzt erkennt man auch, daß der Bereich, in dem u eindeutig ist, aus einem aus lauter gleichen Blättern sich zusammensetzenden Riemannschen Raume R_∞ besteht, der den beugenden Rand B zur einzigen Verzweigungslinie[1]) (das Analogon zum Verzweigungspunkte in der Funktionentheorie) besitzt. Wird der Zweig $u_{\text{phys.}}$ für sich allein betrachtet, so entspricht dem Schirme S eine Verzweigungsfläche[1]) (in Analogie zum Verzweigungsschnitte in der Funktionentheorie), in der $u_{\text{phys.}}$ nach (7) einen Sprung um $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ erleidet.

Wir wollen jetzt darauf hinweisen, daß die Funktion u auch noch einen anderen Zweig $u^*_{\text{phys.}}$ enthält, der ebenfalls als Lösung eines Kirchhoffschen Beugungsproblemes angesehen werden kann. Zunächst bemerken wir, daß $u_{\text{Kirch.}}$ erhalten wird, wenn wir (5) von der beschatteten Seite von S her über S hinaus fortsetzen. $u_{\text{Kirch.}}$ und (5) stimmen ja an der Schattenseite von S miteinander überein und es müssen deshalb die aus ihnen bei der gleichen regulären Fortsetzung entstehenden Zweige miteinander identisch sein. $u_{\text{Kirch.}}$ ist mithin in dem von F und K eingeschlossenen Raume durch

$$u_B + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

1) Über die analysis situs dreidimensionaler Riemannscher Räume vgl. etwa A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII, p. 395. 1897.

und außerhalb davon durch u_B allein gegeben. (vgl. Fig. 3b). F spielt hier die Rolle einer Verzweigungsfläche. Wird nun aus $u_{\text{Kirch.}}$ durch unbeschränktes Umkreisen des Randes B die gesamte Funktion u hergestellt, so erhalten wir sie jetzt offenbar in der Form:

$$u = u_{\text{Kirch.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Der hier durch $n = -1$ festgelegte Zweig $u_{\text{Kirch.}} - \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ ist nun mit der oben angekündigten Funktion $u^*_{\text{phys.}}$ identisch und beschreibt ersichtlich die Beugung der von L ausgehenden

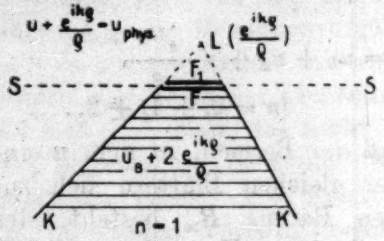


Fig. 3a.

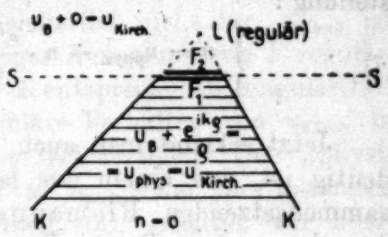


Fig. 3b.

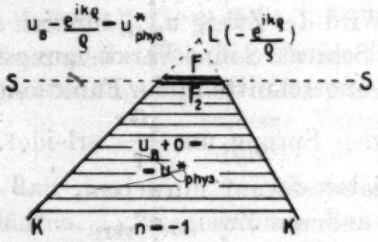


Fig. 3c.

Lichtwelle $-\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ an einem schwarzen, mit der Fläche F zusammenfallenden Schirme. Innerhalb des von F und K eingeschlossenen Raumes (vgl. Fig. 3c) wird ja $u^*_{\text{phys.}}$ durch u_B (Beugungswelle) gegeben und außerhalb dieses Raumes durch $u_B - \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ (Beugungswelle + einfallendes Licht).

Wie die drei Zweige $u_{\text{phys.}}$, $u_{\text{Kirch.}}$ und $u^*_{\text{phys.}}$ in dem Riemannschen Raume R_∞ gegeneinander gelagert sind, übersieht man am einfachsten an der Hand der obenstehenden Figuren. Die Figg. 3 a, b, c versinnlichen zweidimensional schematisiert die drei den Werten $n = 1, 0, -1$ entsprechenden Zweige

der Funktion (8). Man muß sich die drei Blätter übereinandergelegt und dann die beiden „Ufer" F_1 und ebenso F_2 miteinander verschmolzen denken. In jedem Blatte ist in dem „schraffierten" und „unschraffierten" Bereiche die hier gemäß (7) geltende Darstellung für u angegeben und bei der Lichtquelle L die in diesem Punkte auftretende Singularität in Klammern vermerkt. Es ist sofort klar, daß $u_{\text{phys.}}$ in der oberen Halbebene des Blattes $n = 1$ und der unteren des Blattes $n = 0$ enthalten ist und daß die Blätter $n = 0$ bzw. $n = -1$ den Funktionen $u_{\text{Kirch.}}$ bzw. $u^*_{\text{phys.}}$ entsprechen.

Wir bemerken noch anhangsweise, daß die durch (7) und (8) gegebene doppelte Darstellbarkeit der Funktion u der zweifachen Möglichkeit entspricht, durch eine durch B hindurchgelegte (entweder wie F ganz im Endlichen gelegene oder, wie S, auch ins Unendliche verlaufende) Verzweigungsfläche aus dem Riemannschen Raume R_∞ ein schlichtes Blatt abzusondern.

§ 4. Verhalten der Kirchhoffschen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme.

Physikalisch bemerkenswert ist die Tatsache, daß in $u_{\text{phys.}}$ an der beleuchteten Seite des Schirmes S kein Term auftritt, der als reflektiertes Licht zu deuten wäre. Der Kirchhoffsche Schirm ist also tatsächlich schwarz.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen haben aber auch die analytischen Eigenschaften festgestellt, die einem schwarzen Schirme bei der Kirchhoffschen Behandlungsweise der Beugungserscheinungen zuerteilt werden: $u_{\text{phys.}}$ erleidet in dem Schirme S einen Sprung um $\frac{e^{ikq}}{q}$ oder, allgemein gesprochen, um die Lichterregung, die auch bei Abwesenheit des Schirmes vorhanden wäre.

Es bedarf aber wohl kaum eines besonderen Hinweises, daß diesem analytischen Verhalten, das hier den Kirchhoffschen schwarzen Schirm charakterisiert, physikalisch keine irgendwie ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Wie dies besonders Voigt[1]) und Sommerfeld[2]) hervorgehoben haben, ist allen schwarzen Schirmen nur das eine Merkmal gemeinsam, daß

1) W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik. Bd. II. Leipzig 1895. p. 768.

2) S. II. p. 13.

der Energiestrom an der Oberfläche des schwarzen Schirmes stets nach innen gerichtet ist. In der Mannigfaltigkeit der durch diese Forderung festgelegten schwarzen Schirme ist der Kirchhoffsche nur dadurch ausgezeichnet, daß die Lösung des ihm entsprechenden Beugungsproblemes unmittelbar durch das Kirchhoffsche Integral (2) anzugeben ist.

In Kürze wollen wir noch auf die Frage eingehen, inwieweit das Kirchhoffsche Verfahren die Beugung an einem vollkommen blanken Schirme approximieren kann. Wir setzen im folgenden S und F als eben voraus und benutzen, wie dies Sommerfeld in seiner Vorlesung tut, in dem Kirchhoffschen Integral (2) statt $\frac{e^{ikr}}{r}$ die Greensche Funktion für den Halbraum, nämlich

$$\frac{e^{ikr}}{r} \pm \frac{e^{ikr'}}{r'}. \tag{9}$$

r' bedeutet dabei den dem r, d. h. $\overrightarrow{Pdf}$ analogen Abstand des an S gespiegelten Aufpunktes P (er heiße P'), d. h. $\overrightarrow{P'df}$. Die Verwendung der Greenschen Funktion sichert uns dabei schon von vornherein den Vorteil, daß wir das Verhalten von u bei einer von der Schattenseite her an F und S erfolgenden Annäherung vollständig überblicken können. Es wird für den Fall, daß wir in (9) das obere (untere) Zeichen nehmen $\frac{\partial u}{\partial n}$ bzw. (u) in F gleich $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$, während es, was besonders wichtig ist, in S verschwindet.

Auf demselben Wege, der zur Herleitung von (5) diente, erhält man jetzt, und zwar wieder zunächst nur an der beschatteten Seite von S, zur Beschreibung des Beugungsvorganges die Funktion

$$u_E + u_B \pm u_{B'}, \tag{10}$$

wobei u_E und u_B hier ihre frühere Bedeutung haben und $u_{B'}$ dem Werte der Funktion u_B in dem Punkte P' entspricht. Wird also (10) auf die beleuchtete Seite von S über F hinaus regulär fortgesetzt (vgl. die zweidimensional schematisierte Fig. 4), so erleidet $u_{B'}$ in der durch Spiegelung an S aus der Schattengrenze K hervorgehenden Fläche K' einen Sprung, der offenbar behoben werden kann, falls man zu (10) eine

Funktion $\mp u_E$ („reflektiertes u") hinzufügt, die in dem von K' und S eingeschlossenen (in der Fig. schraffierten) Raume gleich $\mp \frac{e^{ik\varrho'}}{\varrho'}$, sonst aber überall gleich Null ist. ϱ' ist dabei die Entfernung des Aufpunktes P von der an S gespiegelten Lichtquelle L etwa L'. Auf diese Weise erhält man die bis auf L und S nunmehr in dem ganzen physikalischen Raume reguläre Lösung der Schwingungsgleichung

$$u = u_E + u_B \pm (-u_E + u_{B'}) \tag{11}$$

die an der beleuchteten Seite von S eine reflektierte Welle u_E enthält.

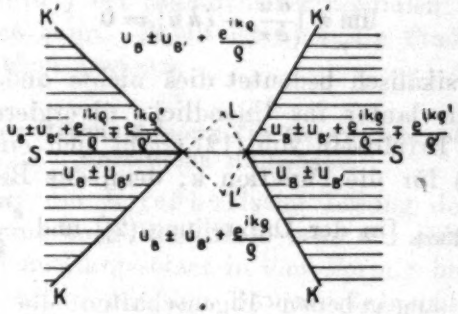


Fig. 4.

Wie bereits früher hervorgehoben wurde und wie man jetzt aus (11) auch direkt ersieht (vgl. Fig. 4), erfüllt u an der Schattenseite von S, je nach dem Vorzeichen in (9), die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{oder} \quad u = 0.$$

Gleichzeitig erkennt man aber, daß an der beleuchteten Seite von S keine dieser beiden Randbedingungen befriedigt wird. Denn wird z. B. in (9) das obere Vorzeichen vorausgesetzt, so erfüllen zwar hier die beiden Beugungswellen $u_B + u_{B'}$ die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

die einfallende und die reflektierte Welle $u_E - u_E$ genügen aber zusammengenommen jetzt der Randbedingung $u = 0$. Wir können somit sagen: In dem jetzt betrachteten Falle ist

der Schirm S zwar an beiden Seiten reflektierend, aber doch nur an der beschatteten Seite im Sinne der Randbedingungen

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

vollkommen blank.

§ 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit.

Man kann sich auch noch leicht überzeugen, daß die Funktion u in ihren durch ein endliches n bestimmten Zweigen und daher auch speziell der uns interessierende Zweig $u_{\text{phys.}}$ im Unendlichen verschwinden und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung[1])

$$\lim_{r=\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) = 0 \tag{12}$$

genügen. Physikalisch bedeutet dies nichts anderes, als daß u und $u_{\text{phys.}}$ aus lauter ins Unendliche divergierenden Wellen bestehen. Das Erfülltsein von (12) ergibt sich einfach aus der Darstellung (8) für die Funktion u; denn das Bestehen dieser Relation für $u_{\text{Kirch.}}$ [in der Darstellung (2)] und $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ ist ja unmittelbar klar.

Die oben angegebenen Eigenschaften der Lösung $u_{\text{phys.}}$ des Kirchhoffschen Beugungsproblemes hier nochmals zusammenfassend, können wir also behaupten:

Die Funktion $u_{\text{phys.}}$ wird durch eine, mit Ausnahme der Lichtquelle L und des Schirmes S im Endlichen überall stetige und einmal stetig differentierbare Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ gegeben, die sich in L wie $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ verhält, in S endlich bleibt, aber den Sprung $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ erleidet und im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung genügt.

Durch diese Eigenschaften ist die Funktion $u_{\text{phys.}}$ eindeutig bestimmt. Die Differenz U zweier den obigen Bedingungen entsprechenden Funktionen $u_{\text{phys.}}$ ist ja im schlichten Raume überall eindeutig und stetig und genügt im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung. U ist ferner, mit eventueller Ausnahme der beugenden Kanten B, überall einmal

1) A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21. p. 309. 1912. Vgl. insbesondere p. 331.

stetig differentierbar. Es läßt sich mithin U nach (1) durch das Integral

$$U = \frac{1}{4\pi}\int\int\left\{U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right\} df$$

darstellen, wobei die Integration über eine den beugenden Rand B umschließende Röhre zu erstrecken ist. Nach (1) müßte eigentlich hier noch ein über eine unendlich ferne Fläche erstrecktes Flächenintegral dazu kommen, das aber wegen der Ausstrahlungsbedingung verschwindet. Lassen wir nun den Radius der den beugenden Rand B umschließenden Röhre abnehmen, so verschwindet U, wie man dies etwa nach einem von Sommerfeld[1]) bei räumlichen Potentialen angewandten Verfahren zeigen kann. Damit ist aber die Eindeutigkeit der Lösung $u_{\text{phys.}}$ schon erwiesen,

§ 6. Die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblemes für eine unendliche Halbebene.

Es soll nun die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblemes für eine unendliche Halbebene mit Hilfe des in § 2 angegebenen Elementargesetzes in eine Form gebracht werden, die in ihrem Aufbau mit den Sommerfeldschen Lösungen für den schwarzen Schirm sehr nahe verwandt ist und sich daher für den Vergleich der beiden Theorien besonders gut eignet.

Das Ziel der folgenden Überlegungen sind dann vor allem zwei Resultate: Das erste ist die Erkenntnis, daß die „Familienähnlichkeit" der Kirchhoffschen und Sommerfeldschen Funktionen in einfachster Weise die Tatsache erklärt, daß die beiden Beugungstheorien für nicht zu große Beugungswinkel (wo allein eine exakte Beobachtung möglich ist) praktisch die gleiche Intensitätsverteilung liefern. Als zweites Ergebnis wird uns die Annahme plausibel werden, daß die Sommerfeldsche Beugungswelle durch Interferenz von, den Kugelwellen (6) ganz ähnlich gebauten, elementaren Beugungswellen entsteht.

In diesem Abschnitt soll nun eine neue Form der Kirchhoffschen Lösung für eine Halbebene hergeleitet werden. r, φ, z sei

---

1) A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII. p. 395. 1897.

ein System von Zylinderkoordinaten. Die beugende Halbebene S möge durch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben sein, so daß die beugende Kante mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammenfällt. Die Lichtquelle L und der Aufpunkt P sollen durch die Koordinaten r_0, φ_0, z_0 bzw. r, φ, z festgelegt sein und die z-Koordinate für die Punkte der beugenden Kante mit s bezeichnet werden (vgl. Fig. 5).

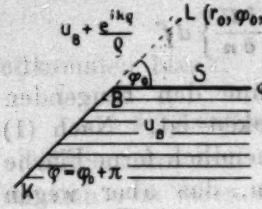


Fig. 5.

Es ist dann:

$$\varrho_s^2 = (s - z_0)^2 + r_0^2,$$
$$r_s^2 = (s - z)^2 + r^2,$$
$$\sin(\varrho_s, ds) = \frac{r_0}{\varrho_s}.$$

Da ferner die Projektionen von r_s und r auf die Normale der durch die beugende Kante und L hindurchgehenden Ebene $\varphi = \varphi_0 + \pi$ (Schattengrenze K) einander gleich sind, nämlich gleich dem Abstande des Punktes P von dieser Ebene, so ist:

$$\cos(r_s, n) = \frac{r \sin(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{r_s}.$$

Schließlich erhält man (mit Benutzung des cos-Satzes):

$$\overline{LP}^2 = r_0^2 + r^2 + (z - z_0)^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$
$$= r_s^2 + \varrho_s^2 - 2 r_s \varrho_s \cos(r_s, \varrho_s),$$

d. h.

$$\cos(r_s, \varrho_s) = \frac{s^2 - s(z_0 + z) + z z_0 + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s}$$
$$= \frac{(s - z)(s - z_0) + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s}.$$

Führen wir nun durch die Gleichung

$$(r_s + \varrho_s)^2 = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 + 2 r r_0 \cos i a$$

an Stelle von s eine neue Integrationsvariable a ein und beachten dabei, daß dann

$$\sin i a = i \frac{(s - z)\varrho_s + (s - z_0) r_s}{r r_0}$$

wird, so läßt sich (5) für den Fall der Beugung an einer Halbebene umformen in

$$(13)\qquad u = u_E - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi_0-\pi)}{\cos(\varphi-\varphi_0-\pi)-\cos ia}\,da,$$

worin $R = r_s + \varrho_s = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos ia}$.

§ 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem.

Wir wollen nun an die für unsere Schlüsse wichtigen Resultate der Sommerfeldschen Beugungstheorie[1]) erinnern. Das allgemeinste, der Behandlung durch die Sommerfeldschen Methoden zugängliche Beugungsproblem ist die Beugung des von einer punktförmigen Lichtquelle L (mit den Koordinaten r_0, φ_0, z_0) ausgestrahlten Lichtes an einem vollkommen blanken (von den beiden Halbebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \chi$ begrenzten) Keile. Die Sommerfeldsche Lösung wird nach einem Spiegelungsverfahren hergestellt und ist je nach dem Polarisationszustande des ausgestrahlten Lichtes durch

$$W = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi) \pm w(r, \varphi, z; r_0, -\varphi_0, z_0; \chi)$$

bestimmt. Im folgenden wird uns aber nur die Funktion $w = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi)$ interessieren, die nach Voigt und Sommerfeld bei beliebigem, nur der Einschränkung $\chi > \pi$ unterworfenen Winkel χ die Beugung an einem durch einen geradlinigen Rand begrenzten schwarzen Schirme beschreibt. Im nächsten Paragraphen soll dann w zum Vergleiche mit der Funktion $u_{\text{phys.}}$ herangezogen werden.

Die Funktion w wird nun durch die folgenden Eigenschaften festgelegt:

R_∞ sei ein unendlichvielblättriger Riemannscher Raum, dessen einzige Verzweigungslinie mit der z-Achse unseres Zylinderkoordinatensystems zusammenfällt, in dem also zwei Punkte, deren Koordinaten sich nur in den φ-Werten um $2\pi\nu$ ($\nu = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$) unterscheiden, als voneinander verschieden anzusehen sind.

Die Funktion w ist dann in R_∞ eindeutig und in ihrer Abhängigkeit von φ periodisch mit der Periode 2χ. Sie ist in R_∞ überall endlich, bis auf die symmetrisch um die Win-

1) Vgl. S. I und S. II. Eine kurze allgemeine Übersicht über die Sommerfeldsche Theorie der Beugung ist auch in dem Artikel von P. S. Epstein in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V_3. p. 488 enthalten.

dungsgerade angeordneten Punkte $(r_0, \varphi_0 + 2\nu\chi, z_0)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, wo die synchron schwingenden Lichtquellen L_ν:

$$\frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} \quad \left(R_\nu = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)}\right)$$

gelegen sind. In der Windungsgeraden ist zwar die Funktion w selbst und ihre Ableitungen nach φ und z, nicht aber ihre Ableitung nach r endlich. Im Unendlichen genügt w der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung.

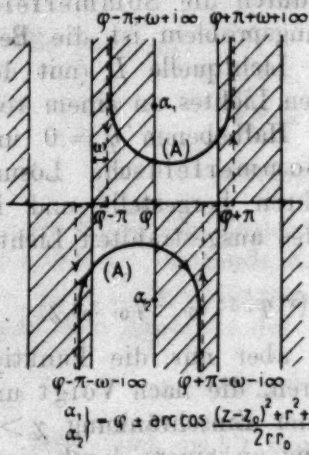


Fig. 6.

Nach dem Sommerfeldschen heuristischen Verfahren[1]) kann nun w unmittelbar in der Form

$$w = \frac{1}{2\chi}\int_{(A)} \frac{e^{ikR^*}}{R^*} \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\chi}(\varphi_0 - a)}}\, da,$$

$$R^* = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \varphi)}$$

angesetzt werden. Die Integration ist in der komplexen α-Ebene auf dem in der Fig. 6 ersichtlichen Wege (A) zu führen. Wird nun (A) in die beiden Geraden

$$\Re(a) = \varphi \pm \pi$$

deformiert[2]), so wird mit Rücksicht darauf, daß in der reellen Achse der α-Ebene in den Punkten $\varphi_0 + 2\nu\chi$ einfache Pole gelegen sind, w in die Gestalt

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu \vartheta_\nu(\varphi)\frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} + \frac{1}{2i\chi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikR}}{R}$$
$$\left[\frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi + ia)}} - \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi + ia)}}\right] da,$$

$$R_\nu = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)},$$

$$R = \sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos ia}$$

1) S. II, p. 22.
2) S. II, p. 27.

übergeführt. $\vartheta_\nu(\varphi)$ ist ein Diskontinuitätsfaktor, der nur für φ-Werte, die der Ungleichung

$$\varphi_0 - \pi + 2\nu\chi \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi$$

entsprechen, gleich Eins, sonst aber überall gleich Null ist.

Wenn wir noch beachten, daß

$$\frac{1}{1-e^{i(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{1-e^{i(\alpha-\beta)}} = \frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}-e^{-i\beta}-e^{i\beta}} + \\ + 1 = -i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta} + 1$$

ist, so wird schließlich

$$w = w_E + w_{B_1} + w_{B_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu \vartheta_\nu(\varphi)\,\frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} - \\ - \frac{1}{2\chi}\int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\varphi-\varphi_0-\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\varphi-\varphi_0-\pi)-\cos\frac{\pi}{\chi}ia}\,da + \\ + \frac{1}{2\chi}\int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R}\,\frac{\sin\frac{\pi}{\chi}(\varphi-\varphi_0+\pi)}{\cos\frac{\pi}{\chi}(\varphi-\varphi_0+\pi)-\cos\frac{\pi}{\chi}ia}\,da.$$

Wir wollen noch kurz die Deutung der Bestandteile w_E, w_{B_1} und w_{B_2} angeben, in die die Funktion w nach ihrer letzten Darstellung zerfällt. w_E („einfallende Welle") stellt die von den Lichtquellen L_ν ausgehenden Lichtwellen im Riemannschen Raume R_∞ so dar, wie man dies nach der geometrischen Optik erwartet, falls man der Verzweigungsgeraden eine schattengebende Wirkung zuschreibt. Die von einem ins Auge gefaßten Lichtpunkt $L_{\nu^*}(r_0, \varphi_0 + 2\nu^*\chi, z_0)$ ausgestrahlte Welle

$$\frac{e^{ikR_{\nu^*}}}{R_{\nu^*}}$$

wird nämlich an der Windungsgeraden sozusagen aufgeschlitzt und erleidet (wegen des Diskontinuitätsfaktors $\vartheta_{\nu^*}(\varphi)$) an den „Schattengrenzen"

$$\varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu^*\chi \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu^*\chi$$

einen Sprung von

$$\frac{e^{ikR_{\nu^*}}}{R_{\nu^*}}$$

auf Null. Die Unstetigkeiten der ganzen Funktion w_E liegen demnach in den beiden Ebenenfächern („Schattengrenzen")

$$(14)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu\chi \\ \text{b)}\ \varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi \end{cases} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Von den beiden Integralen („Beugungswellen") w_{B_1} und w_{B_2} ist w_{B_2} im ganzen Raume R_∞ bis auf die Schattengrenzen (14b) stetig und erleidet hier einen Sprung, der die an diesen Stellen liegenden Unstetigkeiten von w_E gerade kompensiert. Analog ist w_{B_1} den Schattengrenzen (14a) zugeordnet.

§ 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Die Analogie zwischen u (13) und der Funktion w für den Fall der Beugung an einer schwarzen Halbebene ist nun sofort einzusehen. Der erste in (13) auftretende Term u_E entspricht der unendlichen Summe w_E, und der zweite Term u_B wird mit w_{B_1} identisch, falls wir hier $\chi = \pi$ setzen. Es fehlt dagegen in u ein zu w_{B_2} analoges Integral.

Wir wollen nun zusehen, wie sich schon auf Grund der jetzt auseinandergesetzten Verwandtschaft von u und w die Tatsache ergibt, daß die beiden Funktionen für nicht zu große Abstände von der Schattengrenze die gleichen Beugungserscheinungen darstellen. Die Theorie der Funktion w zeigt zunächst:

I. daß die Wellen w_{B_1} bzw. w_{B_2} nur in kleinen Winkelabständen von den ihnen zugehörenden Schattengrenzen (14b) bzw. (14a) eine mit der einfallenden Welle vergleichbare Amplitude haben und daß jede dieser beiden Funktionen in einem größeren Winkelabstande von der ihr entsprechenden Schattengrenze bei einer Auswertung von w vollständig zu vernachlässigen ist;

II. daß w_{B_1} und w_{B_2} in der Nähe ihrer Schattengrenzen von dem Werte des Winkels χ praktisch nicht abhängen.

Aus I. und II. folgt nun sofort, daß die Funktionen w stets die gleichen Beugungserscheinungen beschreiben, wenn nur die beiden Schattengrenzen (14a) und (14b) nicht allzunahe aneinander liegen und daß dies auch noch in einem solchen singulären Falle gilt, falls wir nur das der einen dieser beiden Schattengrenzen zugeordnete w_{B_ν} ($\nu = 1, 2$) und den entsprechenden Term in w_E streichen. Nun ist es aber klar, daß u nichts anderes ist als eine auf die oben angedeutete Weise für

den singulären Fall $\chi = \pi$ konstruierte Funktion w und mithin dieselben Beugungserscheinungen darstellen muß wie w in einem nichtsingulären Falle. Es mag noch daran erinnert werden, wie sich w beim Zusammenfallen der beiden Schattengrenzen verhält. In einem jeden solchen singulären Falle gibt es offenbar ein ganzzahliges μ, so daß [vgl. (14a) und (14b)]

$$(\varphi_0 - \pi + 2(\nu + \mu)\chi) - (\varphi_0 + \pi + 2\nu\chi) = 2(\mu\chi - \pi) = 0$$
$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

oder

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

wird. Die beiden Integrale w_{B_1} und w_{B_2} werden dann bis auf das Vorzeichen einander gleich und tilgen sich in w gegenseitig. Dies besagt aber, daß in einem durch

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

bestimmten Winkelspiegel keine Beugungserscheinungen zu beobachten sind.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß wir die Funktion u auch ohne jede Rechnung hätten herstellen können. In § 5 haben wir ja die Eigenschaften angegeben, die u vollständig eindeutig bestimmen, und durch Betrachtung der Struktur der Funktion w hätten wir dann aus ihren Bestandteilen unmittelbar eine diesem Eindeutigkeitssatze entsprechende Funktion u angeben können.

Zum Schlusse wollen wir noch die Frage nach dem Elementargesetze der Sommerfeldschen Beugungswellen w_{B_1} und w_{B_2} streifen. Indem wir in w_{B_1} und w_{B_2} durch die in § 6 benutzte Substitution in entsprechender Weise statt a die Integrationsvariable s einführen, erhalten wir ein Elementargesetz, das für den Sonderfall $\chi = \pi$ mit dem von uns als Youngsches bezeichneten übereinstimmt. Offenbar kommt aber diesem übrigens ziemlich kompliziert gebauten Elementargesetze, außer für den gerade betrachteten Keil, keine weitere Bedeutung zu. Selbst für $\chi = 2\pi$, d. h. im Falle der Halbebene läßt sich dieses Elementargesetz zur synthetischen Lösung neuer Beugungsprobleme nicht unmittelbar verwenden. Die Ursache dafür besteht darin, daß bei exakter Behandlung im Sommerfeldschen Sinne nicht mehr der Sprung von u bzw. $\partial u/\partial n$ am Schirme in Betracht gezogen wird, sondern die Lösung u selbst (bzw. $\partial u/\partial n$) hier ganz bestimmte Bedingungen

$$\left(u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right)$$

zu erfüllen hat. Die dadurch verursachte Schwierigkeit kann man sich am einfachsten im zweidimensionalen Falle klar machen, wo sie im wesentlichen bereits vorhanden ist, wenn man etwa aus den einfallenden, reflektierten und den (der Lösung für die Halbebene entsprechenden) Sommerfeldschen Beugungswellen das Beugungsproblem für einen Spalt oder

Fig. 7a.

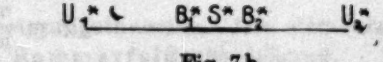


Fig. 7b.

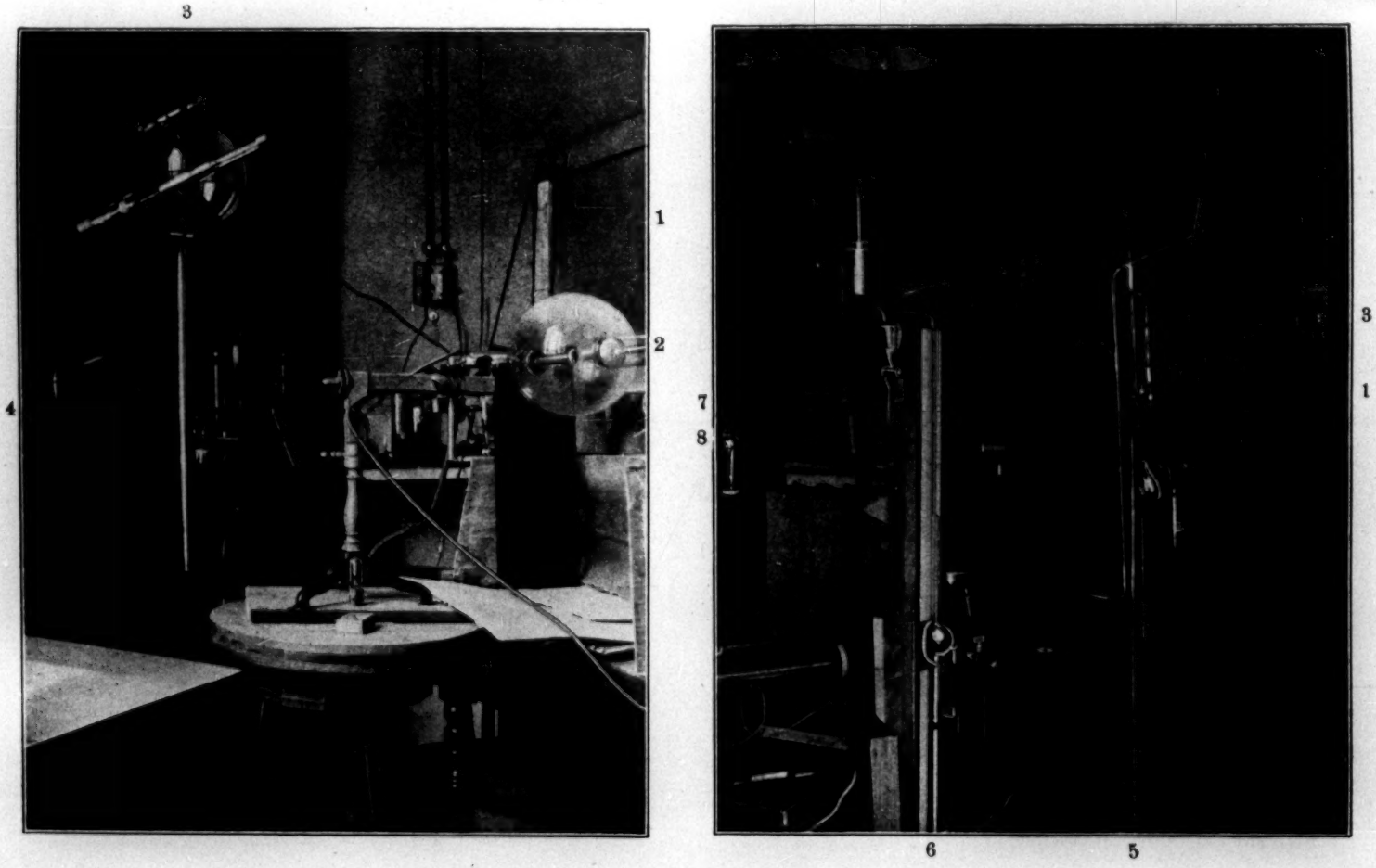
einen beugenden Streifen lösen will. Im Falle des Spaltes (Fig. 7a) wird dann durch die von der beugenden Kante B_1 (B_2) ausgehende Beugungswelle die Randbedingung an dem Schirme S_2 (S_1) nicht erfüllt, während im Falle des Streifens (Fig. 7b) die von der beugenden Kante B_1^* (B_2^*) ausgehende Welle zwar die Randbedingung an dem Schirme S^* befriedigt, in der Geraden $B_2^* U_2^*$ ($B_1^* U_1^*$) hingegen sich unzulässigerweise unstetig verhält.

München, Inst. f. theoret. Physik, im Juli 1917.

(Eingegangen 28. Juli 1917.)

Nachschrift bei der Korrektur.

Die zu Anfang des § 4 erwähnte Tatsache, daß $u_{phys.}$ in dem Schirme S einen Sprung um den Wert der Lichterregung erleidet, die hier bei Abwesenheit des Schirmes S vorhanden wäre, läßt sich folgendermaßen einfach erschließen: Die die Lichterregung darstellende Funktion ist nach (1) gleich dem über die ganze Fläche $\mp + S$ erstreckten Kirchhoffschen Integrale; $u_{phys.}$ ist mithin gleich der, die Lichterregung darstellenden Funktion vermindert um das über S erstreckte Kirchhoffsche Integral; und dies ist eine Darstellung von $u_{phys.}$, die im ganzen Definitionsbereiche dieses Zweiges der Funktion u gilt. Da nun das über die Fläche S erstreckte Integral in S den erwähnten Sprung erleidet — eine Folgerung der zu Anfang des § 1 angeführten Sätze — während die die Lichterregung darstellende Funktion in S regulär bleibt, ist die obige Behauptung auf diese Weise wohl einfach erwiesen.



1 Bleiwand. 2 Röntgenröhre. 3 Gundelachsche Ventilröhre. 4 Gasunterbrecher. 5 Quecksilberluftpumpe. 6 Mac Leod-Manometer. 7 Versuchsrohr. 8 Standardrohr.

2. *Untersuchungen über die Absorption harter Röntgenstrahlen in Gasen;* *von Minna Lang.*

(Hierzu Tafel III.)

(Frankfurter Dissertation.)

Erster Teil.

Vorgeschichte der Arbeit.

§ 1. Einleitendes.

In seiner ersten Mitteilung hat Röntgen[1]) die Vermutung ausgesprochen, daß die Durchlässigkeit einer Substanz für X-Strahlen in erster Linie von ihrer Dichte abhängt. Später glaubte man, das von Lenard für Kathodenstrahlen aufgestellte Gesetz der Massenproportionalität im Absorptionsmechanismus auch für X-Strahlen erfüllt zu sehen. Die Literatur der vergangenen Jahre ist überreich an Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen. Die Ergebnisse sind vielfach widersprechend, besonders für gasförmige Medien, was wohl auf unzureichende Versuchsmethoden zurückzuführen ist. — Die vorliegende Arbeit hat es sich zur Aufgabe gemacht, die vielen Ergebnisse wertvoller Untersuchungen der letzten 20 Jahre vom modernen Standpunkte des Absorptionsmechanismus zu diskutieren und mit eigenen Resultaten auf Grund neuerer Meßtechnik zu vergleichen. Seitdem man weiß, daß X-Strahlen und γ-Strahlen wesensgleich sind und sich nur durch verschiedene Impulsbreiten unterscheiden, war es von Interesse, die Absorptionsmessungen für eine harte X-Strahlung zu wiederholen und in Parallele zu setzen zu den entsprechenden Messungen für γ-Strahlen. Für feste Substanzen ist diese Aufgabe von Winawer[2]) erledigt worden, im folgenden werden die analogen Untersuchungen auf einige gasförmige Medien übertragen.

1) W. Röntgen, I. Mitteilung: Würzburger Sitzungsber. 1895. p. 137—141.

2) B. Winawer, Phys. Zeitschr. 15. p. 942. 1914.

§ 2. Bestimmung des Absorptionsvermögens durch den Absorptionskoeffizienten.

Für eine korpuskulare sowohl als eine elektromagnetische Strahlung bestimmt man die Größe der Absorption, welche die Strahlung auf dem Wege durch den Körper erfährt, eindeutig durch den Absorptionskoeffizienten, vorausgesetzt, daß die Strahlung in sich homogen ist. Sei J die auffallende Intensität der Strahlung, sei $-dJ$ die Intensitätsabnahme, welche die Strahlung auf dem Absorptionswege dx im Körper erfährt, dann ist diese Intensitätsabnahme sowohl der durchsetzten Substanzlänge dx als auch der auffallenden Intensität J proportional, in Zeichen

$$-dJ = \mu J\, dx,$$

$$-\frac{dJ}{J} = \mu\, dx.$$

μ ist der *Absorptionskoeffizient.*

Angenommen, die Strahlen durchsetzen die Substanz auf dem Wege von der Länge l, die auffallenden und austretenden Intensitäten seien bestimmt zu J und J', dann beträgt die gesamte Intensitätsabnahme auf dem Wege l

$$-\int_J^{J'} \frac{dJ}{J} = \mu \int_0^l dx,$$

$$\log \text{nat}\, J - \log \text{nat}\, J' = \mu\, l,$$

$$\frac{J'}{J} = e^{-\mu \cdot l}.$$

$e^{-\mu l}$ bestimmt somit das Verhältnis der Intensitäten, wenn die Strahlen durch Substanz und Vakuum gegangen sind. Durch diese Beziehung ist die Methode des Experimentes angezeigt. Die Messungen erfolgen einfach in der Weise, daß in den Gang der Strahlen ein Rohr von bekannter Länge gebracht wird und die Strahlungsintensitäten bei Vakuum und Gasfüllung von bestimmtem Druck beobachtet werden. Aus der mathematischen Ableitung ergibt sich demnach als Definition von μ: der *Absorptionskoeffizient eines Mediums* mißt die Absorption pro Dickeneinheit, also pro cm Weglänge der Strahlen. Er besitzt demnach die Dimension cm^{-1}.

Vielfach bestimmt man das Absorptionsvermögen eines Körpers durch seinen „*Massenabsorptionskoeffizienten*". Dabei

versteht man unter Massenabsorptionskoeffizienten den Quotienten aus Absorptionskoeffizient und Dichte der Substanz. Dieser Massenabsorptionskoeffizient μ/ϱ mißt also die Absorption eines Körpers pro Masseneinheit und hat demnach die Dimension $cm^2\,g^{-1}$.

§ 8. Historischer Abriß der Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen an gasförmigen Medien.

Unter allen Körpern sind die gasförmigen zuletzt auf ihr Absorptionsvermögen gegenüber X-Strahlen untersucht worden, wohl deswegen, weil bei den geringfügigen Absorptionseffekten die Meßeinrichtungen besonders empfindlich sein müssen. Im folgenden werden die bisherigen Arbeiten in größerem Umfange zu kurzer Besprechung herangezogen, um eine weitgehende Diskussion älterer und neuerer Ergebnisse zu ermöglichen. Auch haben die eigenen Beobachtungsmethoden sich historisch aus den älteren Untersuchungen entwickelt, so daß ihrer mit Dankbarkeit gedacht werden muß. Schließlich ermöglicht ein derartiger Überblick eine zusammenfassende Darstellung der Fehlerquellen, welche bei Absorptionsmessungen von Röntgenstrahlen zu beachten sind.

Die erste Absorptionsmessung an Gasen stammt von Rutherford[1]) aus dem Jahre 1897.

Seine Versuchsanordnung hat den Fehler, daß die unsymmetrische Strahlungsverteilung des Röntgenrohres nach den verschiedenen Emissionsrichtungen unberücksichtigt bleibt. Wenn der Verfasser für Schwefelwasserstoff ein höheres Absorptionsvermögen findet als für Schwefeldioxyd, so ist mit einem Beobachtungsfehler zu rechnen.

Von großer Bedeutung für die Theorie der Röntgenstrahlenabsorption waren eine Reihe wertvoller Arbeiten von Benoist aus den Jahren 1896—1901.[2]) Er machte die für die Theorie fundamentale Entdeckung, daß die Größe der Absorption, die von einer gegebenen Menge Substanz hervorgerufen wird, vollständig unabhängig ist von dem physikalischen und chemischen Zustand der Substanz. Weiter erwies sich das Absorptionsvermögen als unabhängig vom Aggregatzustand

1) E. Rutherford, Phil. Mag. (5) **43.** p. 241. 1897.
2) L. Benoist, Journal de Physique (3) **10.** p. 653. 1901.

und von der Temperatur. Dies galt für kristallisierte sowie für amorphe Körper. Die Absorption erwies sich somit als unabhängig von der gegenseitigen Molekülagerung der Materie. Ebenso besaßen allotrope Modifikationen und polymere Verbindungen unter sich konstante Absorption. Schließlich hat Benoist das *Additivgesetz der Massenabsorption* beobachtet, wonach in einer Stoffverbindung oder Stoffmischung die Absorption sich recht angenähert nach der Gleichung vollzieht

$$\frac{M}{E} = \sum \frac{m}{e} .$$

Dabei bedeuten

M = Gesamtmasse der Mischung oder Verbindung,
E = Durchlässigkeit der Gesamtmasse,
m = Teilmasse eines der Verbindungsstoffe,
e = Durchlässigkeit eines der Verbindungsstoffe.

Benoist hat weiter erkannt, daß die Durchlässigkeit eines Stoffes in viel höherem Grade von dem Atomgewichte als von der Dichte des Absorbens abhängt. Damit war die Ungültigkeit des Massenproportionalitätsgesetzes erwiesen.

Eine Reihe weiterer Arbeiten befassen sich mit der Beziehung zwischen Absorption und Druck. Benoist[1]) stellte im Jahre 1897 fest, daß die Absorption eines Gases zwischen 1 und 2 Atmosphären der Dichte proportional sei. Er glaubte, daß die „*spezifische Absorption*" für Gase (darunter versteht er den Quotienten aus Dichte und Absorptionskoeffizient) eine Konstante sei.

Für den Dampf von Methyljodid zeigte Rutherford[2]), daß bis zu $^1/_4$ Atmosphärendruck die Absorption proportional mit dem Drucke ging. — In einer eingehenden Arbeit aus dem Jahre 1909 hat Crowther[3]) gezeigt, daß bis zum Drucke Null ein streng linearer Zusammenhang zwischen Absorption und Druck besteht. — Von Bedeutung sind weiterhin zwei gleichzeitige Arbeiten von Owen[4]) und Barkla und Collier.[5]) Beide Arbeiten behandeln die Absorption homogener X-Strahlen

1) L. Benoist, Compt. rend. **124.** p. 146—148. 1897.
2) E. Rutherford u. Mc. Clung, Phil. Trans. (A), **196.** p. 25. 1901.
3) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. (A) **82.** p. 103—127. 1909.
4) E. A. Owen, Proc. Roy. Soc. (A) **86.** p. 426. 1912.
5) C. G. Barkla u. V. Collier, Phil. Mag. **23.** p. 987. 1912.

in Gasen. Benutzt wurden als Fluoreszenzstrahlen die härteren *K*-Serien der Elemente Eisen bis Molybdän bzw. Eisen bis Silber. In Tab. 1 sind die beiderlei Versuchsergebnisse zusammengestellt.

Tabelle 1.

Strahler	Atomgewicht	Luft μ	Luft μ/ϱ	SO_2 μ	SO_2 μ/ϱ	Wellenlänge $\lambda \cdot 10^8$		log λ	Luft log μ/ϱ	SO_2 log μ/ϱ
Fe	55,85	·0254	19,72	·2673	91,2					
		·0202		·24		1,946	Nach Moseley	0,289	1,193	1,921
Co	58,97	—	—	—	—					
		·0165		·20		1,768		0,256	1,104	1,841
Ni	58,68	·0186	14,39	·1691	57,73					
		·0136		·166		1,662		0,221	1,021	1,760
Cu	63,57	·0130	10,08	·1404	47,90					
		·0109		·134		1,549		0,190	0,926	1,668
Zn	65,37	·0108	8,41	·1040	35,49					
		·0090		·112		1,445		0,160	0,843	1,590
As	75,0	·00592	4,59	·0548	18,69					
		·0053		·066		1,170		0,068	0,661	1,271
Se	79,2	·00442	3,43	·0449	15,31					
		·0044		·0546		1,104		0,041	0,535	1,184
Br	79,92	—	—	—	—					
		·0039		·050		1,035	Nach Siegbahn	0,012	—	—
Sr	87,62	·00258	2,00	·0272	9,29					
		·0023		·0281		0,871		−0,059	0,301	0,968
Mo	96,0	·00166	1,29	·0170	5,81					
		·00127		·0160		0,709		−0,142	−0,009	0,745
Ag	107,88	—	—	—	—					
		·00077		·0079		0,562		−0,252	−0,229	0,439

Die oberen Werte der Absorptionskoeffizienten μ einer Horizontalen stammen von Owen, die unteren von Barkla und Collier. Die Owenschen Angaben haben den Vorzug, daß sie sämtlich auf Grund besonderer Messungen erhalten wurden, während die Absorptionskoeffizienten von Barkla und Collier zum größten Teile Interpolationswerte darstellen, indem die Autoren nur für die Cu- und Zn-Strahlung die Werte μ für Luft experimentell ermittelt haben. Vergleicht man nun die entsprechenden Werte der beiden Arbeiten, so zeigt sich, daß die experimentell bestimmten Absorptionskoeffizienten für Luft der Cu- und Zn-Strahlung um recht genau 20 Proz. differieren. Dieser Unterschied ist den verschiedenen Beobachtungsmethoden ohne weiteres zuzuschreiben. Bezüglich

der übrigen Werte sind die Schwankungen noch größer und liegen zwischen 37 Proz. für die Ni-Strahlung und 0 Proz. für die Se-Strahlung. Diese inkonstanten Abweichungen sind auf Kosten der Barklaschen Interpolationsmethode zu setzen. Aus den Absorptionskoeffizienten für Luft berechnen dann Barkla und Collier diejenigen eines beliebigen anderen Gases auf Grund der Beziehung

$$J_G = J_L \cdot e^{-(\mu_G - \mu_L)\, x},$$

wo bedeuten

J_G = Stärke der Ionisation, wenn die Absorptionskammer mit Gas gefüllt ist,

J_L = Stärke der Ionisation, wenn die Absorptionskammer mit Luft gefüllt ist,

μ_G = Absorptionskoeffizient des Gases,

μ_L = Absorptionskoeffizient der Luft,

x = Länge des Gasluftweges.

Vergleicht man die so durch Rechnung ermittelten Werte für SO_2 mit den durch das Experiment festgelegten Werten von Owen, so sind die Schwankungen der Barklaschen Werte gegenüber den Owenschen Werten bald positiv, bald negativ. Vergleicht man insbesondere die Absorptionskoeffizienten für die Cu- und Zn-Strahlung, wo wenigstens die Werte μ_L experimentell ermittelt sind, so betragen beispielsweise die Quotienten aus den Owenschen und Barklaschen Werten 1,13 und 0,95, während für Luft diese Quotienten in guter Übereinstimmung 1,20 bzw. 1,19 waren. Dieser Vergleich beweist die Unzulänglichkeit der Interpolationsmethode. Offenbar entspricht die von Barkla abgeleitete Beziehung nicht genau dem Absorptionsvorgange, indem sekundäre Erscheinungen, — wie Streuung, Diffusion — unberücksichtigt bleiben. — Aus dem Vergleich der Absorptionskoeffizienten verschiedener Gase für verschiedene K-Strahlungen hat Owen einen angenähert linearen Zusammenhang zwischen den Logarithmen der Atomgewichte der verschiedenen Strahler und den Logarithmen der Massenabsorptionskoeffizienten der verschiedenen Gase festgestellt. Danach gilt die Gleichung

$$\log \mu/\varrho = c + \varkappa \cdot \log A \quad \text{oder}$$
$$\mu/\varrho = c' \cdot A^{\varkappa}.$$

Aus der Neigung der Geraden gegen die Abszisse, auf welcher die Logarithmen der Atomgewichte aufgetragen waren, berechnete sich die Richtungstangente $\varkappa$ angenähert zu -5, so daß Owen das Gesetz ableitete: Die Absorbierbarkeit der charakteristischen Strahlungen in einem Gase ist umgekehrt proportional der 5. Potenz des Atomgewichtes des strahlenden Elementes. Kaufmann[1]) hat darauf hingewiesen, daß dieses Gesetz auch für Metalle (Al) als absorbierende Substanz gilt, und zwar gleichermaßen für die K-Strahlung wie für die weichere L-Strahlung. Den tieferen Zusammenhang zwischen Frequenz und Absorbierbarkeit charakteristischer Strahlen fand Siegbahn.[2]) Er beobachtete eine streng lineare Abhängigkeit zwischen den Logarithmen der Massenabsorptionskoeffizienten und den Logarithmen der Wellenlängen. Ohne Einschränkung für feste wie für gasförmige Körper gilt die fundamentale Beziehung

$$\log \mu/\varrho = B + \varkappa \log \lambda \quad \text{oder}$$

$$\mu/\varrho = A \cdot \lambda^{\varkappa}.$$

Es zeigte sich, daß $\varkappa$ eine universelle Konstante ist. Sie beträgt sehr angenähert 3 für Gase wie für Metalle. Im Falle der kürzeren K_α-Linie lauten insbesondere die Konstanten

$$\mu/\varrho = 19 \cdot \lambda^{2,78},$$

im Falle der längeren K_β-Linie

$$\mu/\varrho = 18 \cdot \lambda^{2,87}.$$

Miller[3]) will endlich einen funktionellen Zusammenhang zwischen Absorption und *Spannung* beobachtet haben. Danach gilt

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{4{,}24 \cdot 10^{12}}{V^{2,77}}.$$

Durch quantentheoretische Berechnung bestimmt er die folgende mit der rein empirisch abgeleiteten Siegbahnschen Gleichung in bestem Zusammenhange stehende Beziehung

$$\mu/\varrho = 19{,}4 \cdot \lambda^{2,77}.$$

---

1) W. Kaufmann, Phys. Zeitschr. 14. p. 386. 1913.
2) M. Siegbahn, Phys. Zeitschr. 15. p. 753. 1914.
3) C. D. Miller, The Phys. Rev. (2) 8. p. 329. 1916.

Zweiter Teil.

Technische Unterlagen der Arbeit.

§ 1. Der Betrieb der Röntgenröhre.

Die Röntgenstrahlen wurden nach der alten klassischen Methode erzeugt mit Funkeninduktor und Unterbrecher. Zur Verfügung stand ein großes Röntgeninduktorium von 50 cm Schlagweite. Es besaß einen kräftigen Eisenkern von 10 cm Durchmesser, so daß die sekundär erzielten Leistungen entsprechend dem Eisengewicht günstige waren. Insbesondere hatte der Induktor den Vorteil, daß er bei geringer primärer Belastung (2—3 A) sehr exakt und ausreichend arbeitete. Zunächst wurde der unterbrochene Gleichstrom durch den alten Boas-Quecksilberunterbrecher erzeugt. Dieser mechanische Unterbrecher erwies sich aber in doppelter Hinsicht als unzulänglich für den Strombetrieb. Einmal war es Hauptbedingung, daß die Frequenz der Unterbrechungen genau konstant blieb, denn die Härte sowohl als auch die Intensität der Strahlung hängen in recht erheblichem Maße von der Frequenz der Röhrenstöße ab. Die auf den Boasunterbrechern montierten leichten Motoren genügen aber nur sehr unvollständig der Bedingung einer genau konstanten Tourenzahl. Vor allem waren aber diese Boasunterbrecher für einen Dauerbetrieb unbrauchbar, weil infolge der stetig zunehmenden Verschlammung des Quecksilbers die Stromverhältnisse sich dauernd etwas änderten. Infolgedessen ließ sich über längere Zeit kein vollkommen gleichmäßiger Röhrenbetrieb erreichen, wie er für die sehr empfindliche Methode der Ionisationsmessung unbedingt erforderlich war.

Alle diese technischen Schwierigkeiten waren behoben, als ich statt des Boas einen modernen Gasunterbrecher benutzte. Derselbe war mir für die ganze Dauer meiner Versuche in freundlichster Weise von den hiesigen Veifawerken zur Verfügung gestellt worden. Der Unterbrecher war schätzungsweise 120 Stunden im Betrieb, ohne daß ein Reinigen des Quecksilbers erfolgt wäre. Er arbeitete zu Anfang der Beobachtungen, obwohl er gebraucht übernommen wurde, ebenso exakt wie am Ende. Die Verschlammung des Quecksilbers war also praktisch Null. Als Dielektrikum wurde Leuchtgas benutzt. Es wurde in stetigem Strome durch den Unterbrecher

geschickt. Die Unterbrechungen selbst erfolgten so rapid und exakt, daß niemals ein Öffnungsfunke zustande kam. Deshalb war es auch ungefährlich, wenn sich ein Gemisch von Luft und Leuchtgas im Innern des Unterbrechers befanden. Allerdings arbeitete in Gegenwart von Luft die Röhre nicht so gleichmäßig, was an der größeren Unruhe des Milliamperemeters zu erkennen war. Diese Erscheinung stellte sich immer dann ein, wenn infolge der Zentrifugalkraft des Quecksilbers die Gaszuleitungen mechanisch etwas verstopft waren. Deshalb wurde in den Gasleitungskreis eine Waschflasche eingeschlossen, die mit verdünnter Salpetersäure zum Auffangen etwa auftretender Quecksilberdämpfe beschickt war. An dem Durchperlen des Gasstromes konnte man erkennen, ob die Gasleitung intakt war oder nicht. War aber diese Bedingung erfüllt, dann sprach die Röhre sehr gleichmäßig und ruhig an, das Milliamperemeter stand praktisch still und gestattete sehr genaue Ablesungen. Der Motor des Unterbrechers lief regelmäßig, die Tourenzahl war vollkommen konstant. Um den höchsten Grad der konstanten Unterbrechungsfrequenz zu erzielen, wurde der Motor vor Ausführung einer Messung etwa 5 Minuten unbelastet laufen gelassen. Nachdem alle Betriebsteile sich durch eine bestimmte Erwärmung auf einen Normalzustand eingestellt hatten, wurde die Spannung angelegt. Sie betrug 120 Volt. — In den Sekundärstromkreis waren als Hilfsapparate eingeschlossen eine Gundelachsche Ventilröhre und eine Serie von vier hintereinander geschalteten Funkenstrecken. Beide Nebenapparate dienten zur Unterdrückung der Schließungsinduktion. Die Ventilwirkung der Drosselröhre beruht auf der folgenden Konstruktion: die eine der beiden Al-Elektroden ragt weit in das Innere der Glaskugel hinein, die andere ist von dem Glashals eingeschlossen. Das Röhrenvakuum muß so hoch sein, daß Kathodenstrahlen entstehen. Durch die geradlinige Fortpflanzung der Kathodenstrahlen laden sich nun die getroffenen Glaswände statisch auf mit negativer Elektrizität. Infolgedessen ist die Wirkung der gegenseitigen Abstoßung an der eingeschlossenen Elektrode viel heftiger als an der weit in die Kugel hineinragenden Elektrode. Man schaltet die Röhre deshalb so, daß etwa entstehende Schließungsinduktion die eingeschlossene Elektrode zur Kathode macht. Da aber

die Ventilkraft der Drosselröhre nicht ausreichte, wurden außerdem vier Funkenstrecken in den Stromkreis eingeschlossen. Erfahrungsgemäß schlägt hochgespannte Elektrizität leichter über, wenn die Elektronen aus der Platte in die Spitze eintreten, wenn also nach der alten Terminologie die Spitze die Anode, die Platte die Kathode vertritt. Die Funkenstrecken besaßen in sich regulierbare Luftdistanz. Es zeigte sich, daß die Röhre besser arbeitete mit mehreren Funkenstrecken von geringer Schlagweite als mit einer Funkenstrecke großer Schlagweite. Je kürzer nämlich die Funkenstrecke ist, um so rascher erfolgt die Entionisierung des Luftweges durch das elektrische Feld zwischen den Elektroden, um so besser ist also die Löschwirkung. Lange Funkenstrecken verursachen leicht schädliche lokale Erwärmungen der Elektroden und vermindern die Entladespannung infolge erhöhter Ionisation, so daß der Schließungsstrom nur geringen Widerstand findet. Außerdem hat eine Serienfunkenstrecke stets ein höheres Funkendekrement als eine Einfachfunkenstrecke, deshalb ist es günstig, mit einer Mehrfachfunkenstrecke zu arbeiten, wenn man hohe Entladungsspannungen erzielen will.

Um nun die sekundären Entladungsvorgänge genau beobachten zu können, war in Serie mit der Röntgen- und Drosselröhre ein Gehrckesches Oszillographenrohr geschaltet. Dieses mit einem Edelgas gefüllte Geißlerrohr besitzt einen solchen Evakuationsgrad, daß die Erscheinung des kathodischen Glimmlichtes auftritt. Bei Gleichstrom überzieht sich die eine Elektrode mit einer dünnen Schicht weißlich-blauen Lichtes, das stets von der vordersten Spitze der stabförmigen Elektrode ausgeht und die Fläche der Kathode nach rückwärts überzieht, und zwar um so mehr, je größer die Stromstärke ist. Aus der Länge der Glimmlichtstrecke kann man also direkt auf die sekundäre Belastung schließen. Die Röhre erwies sich als ein sehr empfindlicher Indikator, die geringsten Spuren von Schließungslicht wurden angezeigt. Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen diente eine moderne Veifa-Maximumröhre, welche für Tiefenbestrahlung, also Dauerbetrieb, bestimmt ist. Die Antikathode besteht aus einem starken Kupferzylinder mit platinbelegtem Spiegel und ist innen hohl. Durch ein motorisch angetriebenes Luftgebläse wird Wasser aspiriert und in fein verteiltem Sprühnebel gegen die Rückwand des Anti-

kathodenspiegels geschleudert. Durch diese rationelle Kühlung wird der Antikathode in hohem Maße Wärme entzogen, so daß man die Stromdichte an der Röhre beträchtlich steigern kann, ohne daß ein Anstechen des Spiegels erfolgt. Erfahrenermaßen wächst nun die Strahlenhärte mit der Röhrenbelastung — infolgedessen liefern diese Maximumröhren eine besonders durchdringende und intensive Röntgenstrahlung. Ihre Lebensdauer ist eine relativ hohe. Die während der ganzen Vorversuche und Absorptionsmessungen gebrauchte Röhre brannte schätzungsweise 130 bis 140 Stunden (die mittlere Lebensdauer eines großen technischen Röntgenrohres berechnet man zu etwa 50 Brennstunden). Dabei war die Röhre wenig empfindlich gegen Stromschwankungen und ertrug relativ hohe Belastungen bei Dauerbetrieb. Da es sich herausgestellt hatte, daß während einer Absorptionsmessung die Röhre nicht regeneriert werden durfte, ließ ich die Röhre in einem weichen Zustande anlaufen bei einer Belastung von 4—5 M.-A., die sich durch langsames Härterwerden zum Schlusse der Messung selbsttätig reduziert hatte auf 1,5—1,2 M.-A. Eine Messung erstreckte sich etwa über die Dauer einer halben Stunde. Die Röhre besaß eine Palladium-Fernregenerierung, die sich in sehr bequemer Weise von dem Beobachtungsplatze aus bedienen ließ. Bezüglich des Anschlusses der Röhre war Bedacht darauf gelegt, daß sie sich in genügendem Abstand von dem Induktorium befand, damit keine Ablenkung des Kathodenstrahlbündels durch das Magnetfeld des Induktors erfolgen konnte. Ein gegenseitiger Abstand von etwa 1 m erwies sich als ausreichend, so daß kein Schwanken des Fokus zu beobachten war. Die Hochspannungsleitungen waren in Glasröhren eingeschlossen, um jeden Funkenüberschlag, der die Röntgenstrahlenentladung stören konnte, zu vermeiden. Die Schlagzahl, die durch die Röhre ging, war absichtlich nicht sehr hoch gewählt, sie betrug 1520 Unterbrechungen pro Minute. Der Motor, welcher eigentlich für 120 Volt vorgesehen war, wurde deshalb nur mit 48 Volt betrieben. Es ist nämlich ein Röntgenbetrieb um so schonender, je niedriger die Frequenz ist, weil die entsprechende Materialabnutzung geringer ist. Dazu kommt die Erfahrung, daß mit abnehmender Stoßzahl die Härte der Röhre größer wird. Nach jedem Stromdurchgang besitzt nämlich die Luft im Röhreninnern eine

gewisse Leitfähigkeit, die aber rasch abnimmt mit der Ionenmolisierung. Der neue Stromstoß wird nun einen größeren oder geringeren Widerstand zu überwinden haben, je nachdem wenig oder viel Ionen vorhanden sind. Folgen die einzelnen Stromstöße in relativ großen Pausen, dann werden sich viele Ionen wiedervereinigt haben, und der Zündgipfel der Röhrenspannung muß entsprechend hoch ansteigen, bis sie den Widerstand zu durchbrechen vermag. Da nun die Strahlenhärte einzig und allein von der Röhrenspannung abhängt, so folgt mit Notwendigkeit daraus, daß mit abnehmender Stoßzahl und entsprechend hohem Zündgipfel die Härte der Strahlen größer wird. Natürlich mußte andererseits die Unterbrechungszahl so groß gewählt werden, daß die Elektroskopentladung stetig und nicht etwa ruckweise vor sich ging. — Zur Bestimmung der mittleren Strahlenqualität diente ein Härtemesser nach Benoist, der zwecks genauer Beobachtung in einen gegen diffuses Licht gut abgeblendeten dunklen Kasten, ein sogenanntes Kryptoskop, eingebaut war.

§ 2. Der Gasabsorptionsapparat.

Zwischen dem Röntgeninstrumentarium und dem Apparatsystem der Gasanalyse befand sich eine massive Schutzwand aus 1 cm dickem Blei, welche eine Länge von 100 cm und eine Höhe von 80 cm besaß. Dieser Bleischirm schützte die Gaskammern gegen direkte Bestrahlung. Soweit es möglich war, wurden die Röntgenstrahlen auch nach unten und nach den Seiten mittels alter Akkumulatorenplatten abgeschirmt. Wegen der erforderlichen Röhrenbeobachtung und der komplizierten Kühl- und Regeneriervorrichtung war es nicht möglich, die Röhre in einen allseits geschlossenen Bleikasten einzubauen. Infolgedessen war das Zimmer erfüllt mit reflektierten, zerstreuten und sekundären Röntgenstrahlen, die elektroskopisch sofort nachweisbar waren. Daher mußten die Ladesysteme der Elektroskope sorgfältig mit Blei abgedeckt werden. Bezüglich der Dimensionen der Gasabsorptionskammern mußte von vornherein Bedacht darauf gelegt werden, dieselben möglichst lang zu gestalten, sollte die Beobachtungsmethode einen Vorzug darstellen gegenüber denjenigen von Rutherford und Crowther, welche bei den

analogen Untersuchungen Längen von 20—30 cm benutzt hatten. Es wurde deshalb ein Absorptionsrohr aus Glas verwendet, das eine Länge von 134 cm besaß gegenüber einem Durchmesser von 7 cm. Die Dicke der Glaswand betrug 2 mm. Am günstigsten ist natürlich ein möglichst weites Rohr wegen der sekundären Einwirkungen der Wände. Dieser Ausdehnung war aber praktisch eine Grenze gesetzt, weil vor jeder Untersuchung die Kammer neu evakuiert werden mußte. Bei dem Durchgang der primären Röntgenstrahlen durch das Absorptionsrohr werden nämlich durch diffus verlaufende Strahlen sekundäre Elektronen aus den Wänden ausgestoßen. Die notwendige Folgeerscheinung dieser korpuskularen Strahlung ist das gleichzeitige Auftreten einer Wellenstrahlung, einer Glasfluoreszenzstrahlung. Beide Strahlungen müssen gegen das Leitfähigkeitsmeßinstrument abgeschirmt werden, weil sie die dort zu beobachtenden Intensitäten fehlerhaft beeinflussen. Dabei wird die Stärke im Auftreten dieser sekundären Strahlungen eine verschiedene sein, je nachdem das Absorptionsrohr luftleer oder gaserfüllt ist. Im 2. Falle ist nämlich infolge der größeren Trübung mit erhöhter Diffusion zu rechnen. Weiter kommen in Frage die sekundären Kathoden- und Röntgenstrahlen, welche die primären Strahlen beim Durchsetzen der festen Eintritts- und Austrittsstelle des Glasrohres erzeugen. Diese Fehlerquellen hängen aber nicht von dem Gasdruck ab, sie gehen also ohne Störung in die Beobachtungen ein, die immer nur Relativwerte darstellen, wie später gezeigt wird. Dagegen war es notwendig, die sekundären Strahlungen der Wände zu beseitigen, denn ihre Intensitäten, die wenigstens zum Teil von der verschiedenen Trübung der verwandten Medien abhängen, gingen nicht relativ in die Ionisationsmessungen ein. Nun ist aber zu erwarten, daß die durch diffus nach den Seiten verlaufende primäre Röntgenstrahlung in den Glaswänden erzeugten sekundären X-Strahlen und noch mehr die sie erzeugenden sekundären Elektronenstrahlen ein sehr geringes Durchdringungsvermögen besitzen. Nimmt man an, daß das Glas in der Hauptsache ein Doppelsilikat von Natrium und Calcium ist, so hängt die Emission der Fluoreszenzstrahlen im wesentlichen ab von den Elementen Na, Ca, Si mit den Ordnungszahlen 11(Na), 14(Si), 20(Ca). Die entsprechenden K_{α_1}-Linien der 3 Elemente wurden von

Siegbahn und Stenström[1]) ermittelt zu $11{,}951 \cdot 10^{-8}$ cm, $7{,}181 \cdot 10^{-8}$ cm, $3{,}855 \cdot 10^{-8}$ cm. Es handelt sich also um sehr langwellige Strahlen. Die Verfasser mußten die Untersuchungen in einem eigens für diese Zwecke gebauten Vakuumspektrographen vornehmen (die Elemente waren direkt als Antikathodenmaterial verwendet), weil schon wenige Zentimeter Luftweg und das Röntgenrohrfenster von 0,05 mm dicker Al-Folie zur völligen Absorption der Strahlen hinreichten. Es konnte somit nicht schwer halten, die Elektronen geringer Geschwindigkeit und die langwelligen Röntgenstrahlen zur Absorption zu bringen. Um dies zu erreichen, wurde das Innere des Rohres mit einer 2—3fach gewickelten Rolle aus gewöhnlichem Packpapier ausgelegt, von welcher nun angenommen werden konnte, daß sie zur völligen Absorption der beiden sekundären Strahlungen ausreichte.[2]) Stirn- und Rückfläche des Glasrohres trugen ebene Al-Kappen von 1 mm Dicke. Um die in das Rohr und später das Elektroskop eindringende Strahlung nicht zu sehr zu schwächen, wurden aus den Al-Kappen kreisrunde Öffnungen herausgeschnitten von 1 cm Durchmesser, über welche von außen (wegen des Atmosphärendruckes nach Evakuation) 0,05 mm dicke Al-Folien gekittet wurden. Als Kittsubstanz diente Picein, das sich gut bewährt hat. Es wurde Sorge getragen, daß beim Kitten die Kittsubstanz sowohl als die in Frage kommenden Glas- und Aluminiumteile auf der Schmelztemperatur des Piceins gehalten wurden; dann stellte sich bei ruhigem Stehenlassen die luftdichte Verkittung von selbst her. Zeigte sich bei versuchsweisem Auspumpen das Gefüge noch nicht ganz luftdicht, so wurde nachträglich noch etwas flüssige Substanz aufgetragen, während das Rohr zum Teil luftleer war. Infolge des äußeren Atmosphärendruckes wurde dann die plastische Substanz selbsttätig in etwa vorhandene Undichtigkeitsstellen hineingetrieben. Die einmal bewerkstelligte Verkittung blieb

1) M. Siegbahn u. N. Stenström, Phys. Zeitschr. 17. p. 318. 1916.

2) Eine sehr genaue Untersuchung über die verschiedenen Entstehungsmöglichkeiten sekundärer Fehlerquellen und die Größe ihrer Einwirkung bei Absorptionsmessungen an korpuskularer und elektromagnetischer Strahlung findet man in einer Arbeit von E. Friman: „Über die Absorption und Diffusion schneller Kathodenstrahlen (β-Strahlen) in Gasen und Dämpfen", Ann. d. Phys. 49. p. 373. 1916.

während der ganzen Versuche, die sich über mehr als ein halbes Jahr erstreckten, intakt. Um das Absorptionsrohr gegen die im Zimmer verlaufenden, zerstreuten und sekundären X-Strahlen zu schützen, wurde es mit 1 mm dicker Bleifolie umwickelt. Zum Auspumpen des Rohres diente eine Quecksilberhandluftpumpe, die mit einem Mac-Leod-Manometer verbunden war.

§ 3. Meßapparat und Meßmethode.

Die Absorptionsmessungen wurden nun in der Weise angestellt, daß iontometrisch die Strahlungsintensitäten beobachtet wurden, wenn die Strahlen im Absorptionsrohr durch Vakuum und durch Gas gingen. Sei J_0 die Intensität der Strahlung, die bei Vakuum im Rohre in die Ionisationskammer eindringt, J_1 die beobachtete Intensität, die zu einem Gase unter Atmosphärendruck gehört, und sei die verwendete Röntgenstrahlung vollkommen homogen, dann bestimmt sich ihr Absorptionskoeffizient μ auf Grund der Beziehung $J_1 = J_0 \cdot e^{-\mu l}$, wo l die Länge des Strahlweges im Gase darstellt. Als Leitfähigkeitsmeßinstrument diente ein Bleielektroskop, wie es nach dem Vorschlage Rutherfords für γ-Strahlmessungen allgemein verwendet wird. Dasselbe wurde mir gleichfalls von den Veifawerken (Direktor Ingenieur Dessauer) gütigst zur Verfügung gestellt. Das Aluminiumblattsystem wurde mit einer geriebenen Hartgummistange aufgeladen. Nun zeigte es sich bald nach den ersten Meßversuchen, daß die eben angedeutete einfache Beobachtungsmethode nicht anwendbar war. Es war nämlich nicht möglich, die Röhre nur wenige Minuten vollkommen konstant zu betreiben, indem sie stetig, wenn auch langsam, härter wurde. Deshalb mußte eine Standardmethode angewandt werden, welche eine genaue Kontrolle über das Härterwerden der Röhre gestattete. Es wurde deswegen ein zweites entsprechendes Glasrohr unter einem größeren Azimut gegen die Flugbahn der Elektronen aufgestellt, das stets unter Vakuum gehalten wurde. Es war in gleicher Weise wie das eigentliche Absorptionsrohr nach außen und nach innen gegen sekundäre Strahlungseinwirkungen geschützt. Die Intensitäten wurden in einem ähnlich gebauten Bleielektroskop des Instituts beobachtet. Die gegenseitige Anordnung der Rohre zeigt die Horizontalprojektion in Fig. 1. Das Gasabsorptionsrohr war unter einem Azimut $\varphi = 90^0$ aufgestellt, das Standardrohr

unter einem größeren Azimut $\varphi = 109^{\circ}11'$. Die in die Rohre eintretenden Strahlenbündel hatten einen Durchmesser von 0,8 cm. Diaphragmen von annähernd gleicher Größe befanden sich in den Stirnwänden der Bleielektroskope. Die Zentrierung der beiden Glasrohre machte einige Mühe, weil das eintretende engbegrenzte Bündel infolge der Streuung und Diffusion sich

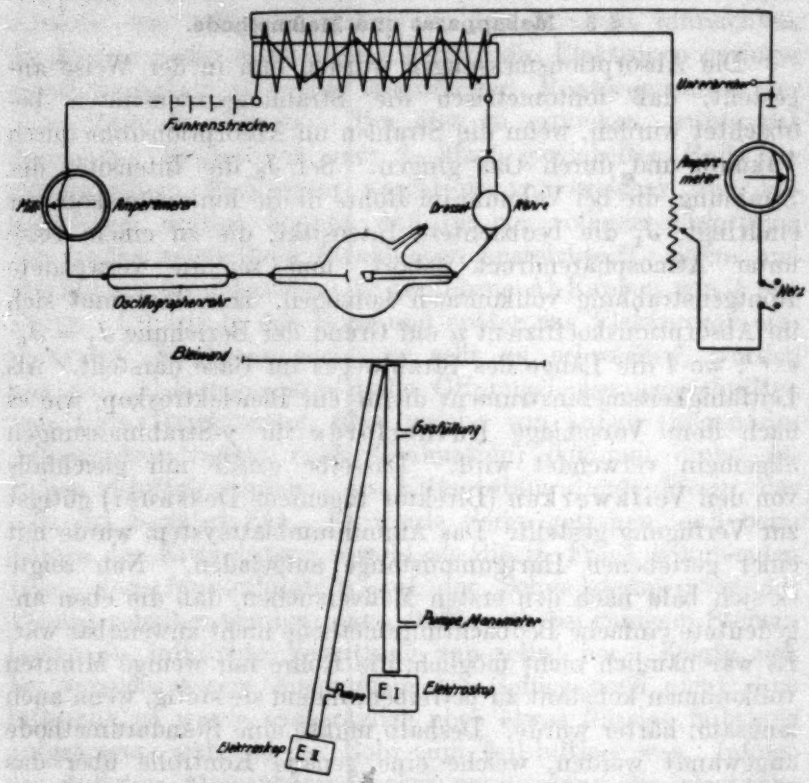


Fig. 1. Horizontalprojektion der Apparatur.

kegelförmig erweiterte. Mittels eines Leuchtschirmes gelang es, aus dem Schattenbild eines an der Rückfläche der Rohre angebrachten Drahtkreuzes das zentrale parallele Strahlenbündel in das Elektroskop-Diaphragma zu leiten. Um die beim Verlassen des Rohres in dem Aluminium etwa erzeugten Elektronen gegen den Meßraum abzuschirmen, wurde die Öffnung der Elektroskopkammer mit einer Schicht Papier abgedeckt.

Der Gang der Beobachtung ist nun der folgende: Zunächst sind beide Rohre luftleer. Sie werden im folgenden als Standardrohr, *St*, und Versuchsrohr, *V*, bezeichnet. Man beobachtet einige Male möglichst gleichzeitig die Rückgänge in beiden Elektroskopen und erhält gut übereinstimmende Quotienten. Nun wird in das Versuchsrohr das zu untersuchende Gas eingeleitet — jetzt ändert sich der Quotient der in beiden Elektroskopen wieder möglichst gleichzeitig ermittelten Rückgänge. Aus dieser Änderung der Quotienten läßt sich nun das Absorptionsvermögen in folgender Weise leicht berechnen: Sei nämlich

I. bei luftleerem Versuchsrohre

$$\frac{\text{Intensität der Strahlung durch Versuchsrohr}}{\text{Intensität der Strahlung durch Standardrohr}} = \frac{V}{St} = c$$

und

II. bei gasgefülltem Versuchsrohre

$$\frac{\text{Intensität der Strahlung durch Versuchsrohr}}{\text{Intensität der Strahlung durch Standardrohr}} = \frac{V'}{St} = c',$$

dann ist c ein Maß der ungehemmten Strahlungsintensität J_0, c' ein Maß der infolge der Absorption gehemmten Strahlungsintensität J'. Da die iontometrisch gemessenen Intensitäten durch Entladungszeiten ausgedrückt werden, welche sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Intensitäten, so gilt die Beziehung

(1) $$J_0 : J' = \frac{1}{c} : \frac{1}{c'},$$

$$J' = J_0 \cdot \frac{c}{c'}.$$

Wegen der Absorption nach der Exponentialfunktion ist andererseits

(2) $$J' = J_0 \cdot e^{-\mu l},$$

wo μ den Absorptionskoeffizienten, l die Dicke der absorbierenden Gasschicht darstellt.

Aus der Gleichsetzung der beiden Beziehungen 1 und 2 folgt

$$e^{-\mu \cdot l} = \frac{c}{c'},$$

$$\mu \cdot l = \log \text{nat}\, c' - \log \text{nat}\, c,$$

$$\mu = \frac{\log c' - \log c}{l \cdot {}^{10}\log e}.$$

Da die Rohrlänge und mithin der Gasweg 184 cm betrug, so war ($\log c' - \log c$) im besonderen zu multiplizieren mit 0,01718.

Die Kapazitäten der beiden Elektroskope, welche durch Ladungsteilung mit einem Wulffschen Elektrometer von bekannter Kapazität bestimmt wurden, betrugen 4,21 cm bzw. 4,215 cm. Die Entladungszeiten wurden bestimmt durch direkte Beobachtung durch Okularmikroskope. Beide Elektroskope waren aufeinander geeicht, so daß der gleiche Spannungsabfall gemessen wurde. Er betrug ca. 50 Volt und lag etwa zwischen 400 und 350 Volt. Besondere Messungen ließen erkennen, daß das Gebiet der Sättigungsströme für diese Spannung erreicht war.

§ 4. Ausführliches Beispiel einer Messung.

Zunächst wurde der natürliche Rückgang der Elektroskope bestimmt. Er war sehr gering und konnte bei der Berechnung gegenüber dem starken Ionisationseffekt der Röntgenstrahlen vernachlässigt werden. Dennoch wurde er vor jeder Messung in beiden Elektroskopen genau kontrolliert, um auf diese Weise zu prüfen, ob die statische Isolation der Leitfähigkeitssysteme intakt war. Es hatte sich weiter herausgestellt, daß bei warmer, trockener Luft die Elektroskope sich besonders leicht aufluden, weil die Erzeugung der Reibungselektrizität dann eine viel stärkere war. Da nun eine gute Meßreihe möglichst rasch aufeinanderfolgende Ablesungen forderte mit geringen Zeitverlusten durch wiederholtes Laden, so wurden Luft und Apparate vor einer Messung genügend erwärmt und getrocknet, indem sie etwa eine halbe Stunde lang den Strahlen der elektrischen Deckenbeleuchtung ausgesetzt wurden. Das Versuchsrohr wurde nun ausgepumpt bis auf ca. $^1/_2$ mm Druck (höhere Verdünnungsgrade waren nicht erforderlich) und das einzuführende Gas zur raschen Einfüllung bereitgestellt. Es

wurde der Motor am Unterbrecher angelassen, damit Drahtwindungen und Eisenteile auf ihre gleichmäßige Temperatur kamen und konstante Umdrehungsgeschwindigkeit bewirkten. Die Röntgenröhre selbst wurde gut abgestaubt, damit keine Staubpartikelchen dem hochgespannten Strom den Weg über die Glaskugel vorbereiteten. Bei dem ersten Einschalten der Röhre wurde die Regenerierung kräftig und wiederholt betätigt, bis der Röhrenstrom nur langsam rückwärts ging. Die Röhre wurde nun einige Minuten laufen gelassen, damit die Induktorwindungen und Stromzuleitungen sich ebenfalls gleichmäßig erwärmten und die primäre Belastung konstante Einstellung zeigte. Die erste Vorbedingung für eine zuverlässige Messung war eben ein so gleichmäßiger Betriebszustand, wie er sich nur irgend erreichen ließ. Das Zimmer wurde nun abgedunkelt bis auf das Maß von Beleuchtung, welches zum Ablesen notwendig war, damit die Wechselfärbung der Röntgenröhre, welche ein gutes Kriterium für ihren jeweiligen Zustand gibt, gut zu beobachten war. Oberhalb des Bleischirmes war an einem Rahmen drehbar ein Spiegel angebracht, so daß sich von dem Beobachtungsplatze an dem Elektroskop aus die Röhre und Regeneriervorrichtung kontrollieren ließen. In der Tab. 2 sind die Ergebnisse einer Meßreihe zusammengestellt. Die 3. Vertikale enthält den gegenseitigen Zeiteinsatz der Ablesungen in Sekunden. +20 bedeutet, daß die Ablesung im Elektroskop I 20 Sekunden früher erfolgte als im Elektroskop II, −20 würde bedeuten, daß sie im Elektroskop I 20 Sekunden später einsetzte. Bei einer guten Ablesung mußte die Ablesung im Elektroskop I zeitlich früher einsetzen, weil die Entladungsdauer hier wegen der geringeren Empfindlichkeit des Systems mehr als $1^1/_2$mal so groß war. Fielen die Quotienten der Rückgänge zu ungleich aus, so gab die gegenseitige Zeitkontrolle ein richtiges Kriterium, welcher Quotient größere Zuverlässigkeit beanspruchen durfte. Gleichzeitig wurden die sekundären Stromstärken notiert. Sie sind aufzufassen als mittlere Stromstärken während der Entladungszeiten, mit welchen sie in eine Horizontale gesetzt sind. Die letzten Kolonnen enthalten die beobachteten primären Stromstärken und die Zeitangabe der Beobachtung. Die Standardmessungen hat meine gute Mutter ausgeführt.

Tabelle 2.

Entladungszeiten in Sekunden		Gegenseitiger Anfang der Ablesung in Sek.	Sekundäre Stromstärke in M. A.	Primäre Stromstärke in A.	Zeit der Beobachtung
Elektroskop I	Elektroskop II				
146,7	108,7	+ 65	3,1 —3,0	2,84	10^{17}
135	96,8	+ 31	3,0 —2,9	2,85	—
119,5	82,8	+ 46	2,9 —2,82	—	—
108	71,1	+ 65	2,81—2,75	—	—
96	63,5	+ 5	2,7 —2,65	2,84	—
82,4	55	+ 16	2,62—2,6	2,86	—
78	50,8	+ 15	2,6 —2,55	—	—
68	45,2	+ 12	2,5	—	—
63,7	41,4	+ 4	2,45	2,85	—
59	39,5	+ 22	2,42	2,86	—
55	36	- 1	2,4	—	—
50	32	+ 20	2,3	—	10^{45}

146,7 : 108,7 = 1,35··
135,0 : 96,8 = 1,39··
119,5 : 82,8 = 1,44··
108,0 : 71,1 = 1,5189
96 : 63,5 = 1,5118
82,4 : 55 = 1,5000
78 : 50,8 = 1,5354
68 : 45,2 = 1,5054
63,7 : 41,4 = 1,5386
59 : 39,5 = 1,4936
55 : 36 = 1,5277

} Mittelwert: 1,5163 = c

Nun wurde Gas eingelassen (die Röhre brannte weiter).

Entladungszeiten in Sekunden		Gegenseitiger Anfang der Ablesung in Sek.	Sekundäre Stromstärke in M. A.	Primäre Stromstärke in A.	Zeit der Beobachtung
Elektroskop I	Elektroskop II				
46,3	28,7	+ 8	2,27	2,81	10^{47}
42,5	26	- 5	2,2	—	—
37,2	22,5	+ 1	2,18	—	—
32,3	19,5	0	2,1	—	—
27,25	16	+ 11	2,0	—	—
24,45	15	+ 8	1,95	—	—
22,3	13	0	1,85	2,85	—
20,5	11,3	+ 20	1,81	—	10^{53}

46,3 : 28,7 = 1,6132
42,5 : 26 = 1,6346
37,2 : 22,5 = 1,6533
32,3 : 19,5 = 1,6564
27,25 : 16 = 1,7031
24,45 : 15 = 1,6300
22,3 : 13 = 1,7154

} Mittelwert: 1,6580 = c'

Die ersten Quotienten c konnten zur Berechnung des Mittelwertes nicht benutzt werden. In diesem weichen Röhrenzustande war die ungerichtete Strahlung der Pt-Antikathode stark überlagert von der dissymmetrisch verteilten gerichteten Bremsstrahlung. Infolgedessen fielen die ersten Quotienten zu klein aus. Diese Erscheinung wird in Teil IV der Arbeit diskutiert.

Setzt man die Werte c und c' in die oben abgeleitete Formel ein, so erhält man für diesen besonderen Fall als Wert für den Absorptionskoeffizienten

$$\mu = 0{,}0008384 \text{ cm}^{-1} = 8{,}384 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

Dritter Teil.

Untersuchungen über das Absorptionsvermögen von Gasen.

§ 1. Ergebnisse der Messungen.

Die im folgenden angeführten Resultate wurden im Laufe eines guten Monats gewonnen. Es waren verhältnismäßig viele Vorversuche notwendig gewesen, bis die Versuchsbedingungen auf einen solchen Zustand gebracht werden konnten und bis diejenige Fertigkeit in der gegenseitigen Meßtechnik erreicht wurde, daß die Einzelergebnisse nun nicht mehr beträchtliche Schwankungen aufwiesen. Es gelang schließlich, die Zuverlässigkeit der Resultate so weit zu steigern, daß die zahlenmäßigen Abweichungen nunmehr nur noch innerhalb der 2. Zifferndezimale auftraten. Luft, Kohlendioxyd, Stickstoff waren zuerst untersucht worden — die Untersuchungen wurden zum Schlusse nochmals wiederholt, um sich zu überzeugen, daß die neu erhaltenen Daten mit den ersten innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmten, wodurch die Stabilität der Betriebsverhältnisse gewährleistet war. Zu bemerken ist, daß bei Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlendioxyd, Chlormethyl die Strahlung durch 2 mm Al filtriert wurde, während bei Schwefeldioxyd, das in den ersten Wochen zur Untersuchung gelangte, durch 3 mm Al filtriert wurde. Ich ahnte damals nicht, daß die etwas stärkere Filterwirkung einen so beträchtlichen Einfluß auf die Größe des Absorptionskoeffizienten haben würde, wie sich später herausstellte. Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Chlormethyl, Schwefeldioxyd waren in komprimiertem Zustande in stählernen Bomben be-

zogen — Kohlendioxyd wurde teilweise aus dem Kippschen Apparate, teilweise aus einer Bombe eingeleitet. Die Ergebnisse waren dieselben innerhalb der Beobachtungsfehler. Es wurde der Gasentnahme aus der Bombe der Vorzug gegeben, weil die Füllung des Rohres auf diese Weise innerhalb einer halben Minute vollzogen werden konnte und es im Interesse der Messung lag, das Zeitintervall zwischen den beiden Beobachtungsreihen im ungefüllten und im gefüllten Zustande so kurz wie möglich zu bemessen. Um die Beobachtungseffekte etwas zu steigern, wurde die Absorption zumeist unter geringem Überdruck bestimmt. Allerdings durften der Apparatur nicht mehr wie 15 cm Überdruck zugemutet werden, da die Kittung der Lenardschen Fenster derart vorgenommen worden war, daß bei Vakuum der Außendruck ausgehalten werden sollte. Die im folgenden angeführten Absorptionskoeffizienten sind auf den Druck einer Atmosphäre umgerechnet. Es wurde weiter Bedacht darauf gelegt, die verschiedenen Gase bei möglichst gleicher Zimmertemperatur zu untersuchen, weil nur dann allein die Zahl der Gasmolekeln innerhalb des untersuchten Volumens eine annähernd konstante ist und die ermittelten Absorptionskoeffizienten die relativen Molekül- bzw. Atomabsorptionen der verschiedenen Gase darstellen. Diese Regulierung der Zimmertemperatur ließ sich leicht bewerkstelligen. Das Absorptionsvermögen von Schwefeldioxyd ist auf Grund einer später zu erklärenden Beziehung auf 2 mm Al-Filter umgerechnet.

Stickstoff.

$\mu = 5{,}603 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$5{,}306$
$5{,}389$
$4{,}619$
$5{,}647$

Mittel: $\mu = 5{,}313 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Luft.

$\mu = 6{,}119 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$6{,}441$
$5{,}488$
$6{,}147$

Mittel: $\mu = 6{,}048 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Kohlendioxyd.

$\mu = 6{,}560 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$6{,}265$
$6{,}818$
$6{,}107$
$6{,}331$

Mittel: $\mu = 6{,}420 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Sauerstoff.

$\mu = 7{,}955 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$7{,}384$
$7{,}483$

Mittel: $\mu = 7{,}607 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Wasserstoff.

$\mu = -\ 3{,}779 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$\mu = -\ 1{,}684 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Methylchlorid.

$\mu = 3{,}2604 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$2{,}8348$
$3{,}0172$
$3{,}0141$

Mittel: $\mu = 3{,}0316 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Schwefeldioxyd (3 mm Al-Filter).

$\mu = 1{,}4721 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$
$1{,}8952$
$1{,}4231$
$1{,}4925$
$1{,}7182$
$1{,}8399$
$1{,}5900$
$1{,}5428$

Mittel: $\mu = 1{,}6217 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$

Auf 2 mm Al-Filter umgerechnet:

$\mu = 2{,}4326 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$.

§ 2. Diskussion der Ergebnisse.

Bezüglich der Absorptionsmessung an Wasserstoff zeigte sich gegen Erwarten in 2 Vorversuchen ein geringer Absorptionseffekt, der aber größer ausfiel, als sich mit Wasserstoff

vereinen ließ. Er mußte Verunreinigungen des Gases zugeschrieben werden, zumeist einem Teilgehalte an Sauerstoff. Deshalb wurde der Gasstrom vor Beschickung des Absorptionsrohres durch 2 Waschflaschen geleitet, die mit einer stark oxydationsfähigen alkalischen Pyrogallussäurelösung gefüllt waren. Nun zeigte sich in 2 Meßreihen, die technisch als gut anzusprechen waren, ein negativer Absorptionseffekt, der seinem absoluten Betrage nach etwa 8mal geringer war wie der erstmals konstatierte. Damit war bewiesen, daß, falls dem Wasserstoff überhaupt ein Absorptionsvermögen zukam, es sich mit dieser Apparatur nicht bestimmen ließ. Dazu mußte der Gasweg sehr viel länger sein. Setzt man annähernd das Absorptionsvermögen von Wasserstoff gleich Null, so zeigen die letzten Versuche, daß Schwankungen in den Werten, die auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind, bei guten Messungen erst in der 5. Dezimale auftreten.

Im folgenden soll versucht werden, die Relativwerte der Molekül- bzw. Atomabsorptionen abzuleiten. War die Zimmertemperatur während der verschiedenen Meßreihen konstant, so war das Avogradosche Gesetz erfüllt, und der Absorptionsweg der Strahlen enthielt eine gleiche Zahl von Molekeln. Die Absorptionskoeffizienten, welche die Absorption pro Dickeneinheit messen, waren anzusprechen als Relativwerte der Absorptionsvermögen der einzelnen Gasmoleküle. Bezüglich einer Gasmischung, bei der keine gegenseitige Atombindung vorhanden ist, muß die Absorption der Mischung eines Volumens gleich sein den Teilabsorptionen der in der Mischung enthaltenen Stoffe. Seien in der Mischung N-Teile enthalten, die sich zusammensetzen aus n_1, n_2, ... Teilen verschiedener Stoffe, so daß gilt $N = \Sigma n$, und sei M das Absorptionsvermögen der Mischung, μ_1, μ_2, ... das der einzelnen Mischungskomponenten, so ist zu erwarten in Übereinstimmung mit dem Erfahrungssatze von Benoist, daß

$$N \cdot M = \Sigma n \mu.$$

Unter Benutzung der für Stickstoff und Sauerstoff gefundenen Werte μ berechnete sich nach dieser Mischungsregel das Absorptionsvermögen von Luft zu $\mu = 5{,}77 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$, während der experimentell ermittelte Wert $6{,}04 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$ betrug. Nimmt man an, daß der theoretische Wert wahr-

scheinlich etwas zu klein ist wegen Trübungen im Absorptionsvorgang durch Gegenwart von Kohlensäure und Spuren von Edelgasen von teilweise erheblichem Atomgewicht, so liegt der übrige Unterschied wohl innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler. Nun läßt sich aber, wie aus den experimentellen Daten hervorgeht, diese Mischungsregel nicht uneingeschränkt auf chemische Verbindungen übertragen, wie dies Benoist vermutete und auch noch Thomson[1]) glaubte. Eine derartige Auffassung ist auch schwer vereinbar mit der modernen Vorstellung des Absorptionsvorganges. Erfolgte die Absorption auch im Falle der chemischen Bindung nach einem Additivgesetz, dann müßte das Absorptionsvermögen von CO_2 notwendig größer sein als das von Sauerstoff, was durch das Experiment widerlegt wird. Es wurden daraufhin die Werte von Owen und Barkla für homogene primäre X-Strahlen geprüft. Unter Vernachlässigung der Wasserstoffabsorption ließ sich aus den Barklaschen Werten für Schwefelwasserstoff und Schwefeldioxyd das Absorptionsvermögen von Sauerstoff für die verschiedenen Strahler berechnen — es ergab sich als annähernd genau so groß wie das von Kohlendioxyd, welches Owen experimentell bestimmt hat —, jedenfalls nicht kleiner. Analoge Beobachtungen wurden auch von anderer Seite gemacht. So wurde z. B. verschiedentlich gezeigt, daß das Absorptionsvermögen von Luft gleich dem von Wasser ist, berechnet auf äquivalente Dichten. Für Wasser hängt die Absorption lediglich vom Sauerstoff ab, für Luft von den im periodischen System zunächst stehenden Elementen Stickstoff und Sauerstoff. Nun ist die Röntgenstrahlabsorption wohl mehr oder weniger aufzufassen als ein Resonanzphänomen. Die ankommenden elektromagnetischen Impulse versetzen die Elektronen des Moleküls in Schwingungen, erzwungene Schwingungen sowohl als Eigenschwingungen, und verlieren hierbei an Energie. Diese Energieverluste finden ihren Ausdruck in dem beobachtbaren Absorptionsvermögen. Nach der modernen Auffassung richtet sich nun die Durchlässigkeit eines elementaren Stoffes gegen Röntgenstrahlen nicht nach seinem Atomgewicht, wie Benoist glaubte, sondern nach seiner Ordnungszahl. Diese ist aber identisch mit der Kernladung des Atoms nach der van den

1) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, dtsch. herausg. von E. Marx, Leipzig 1906, p. 260.

Broekschen[1]) Hypothese, also auch mit der Zahl der Elektronen, die man sich nach Bohr[2]) in konzentrischen Ringen um den Kern kreisend denkt. Je höher nun die Kernladung eines Atoms ist, um so mehr Energie ist erforderlich, die entsprechend größere Zahl von Elektronen in Schwingungen zu versetzen. Es ist nun nicht zu erwarten, daß ein Molekül in chemischer Verbindung sich gegen Röntgenwellen verhält wie in elementarem Zustande. Vermöge der wechselseitigen Bindekräfte der zu einem Verbindungsmolekül zusammengetretenen Elementarmoleküle dürfte der Freiheitsgrad der Schwingungsfähigkeit eines Elektronensystems in chemischer Bindung verringert sein. Es besitzt jedes Verbindungsmolekül ein *mittleres Absorptionsvermögen*, das sich folgendermaßen ableiten läßt: Sei $A_1 B_2 C_3 \ldots N_n$ die chemische Gleichung des Verbindungsmoleküls, dann setzt sich das mittlere Absorptionsvermögen additiv zusammen aus dem $\frac{1}{1+2+..n}$ fachen des Absorptionsvermögens von A, dem $\frac{2}{1+2+..n}$ fachen desjenigen von B und so fort. Unter dieser Voraussetzung werden im folgenden die Molekülabsorptionen von C, Cl, S berechnet. Sie werden der Abkürzung halber im folgenden mit μ_C, μ_{Cl} usw. bezeichnet. Da Kohlendioxyd zu $^2/_3$ Teilen aus Sauerstoff und $^1/_3$ Teil aus Kohlenstoff besteht, bestimmt sich die Gesamtabsorption additiv aus dem $^2/_3$fachen der Sauerstoffabsorption und dem $^1/_3$fachen der Kohlenstoffabsorption. Auf diese Weise erhält man als Absorptionskoeffizient von Kohlenstoff $\mu_C = 4{,}04 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Wie erwartet, ist der Absorptionskoeffizient kleiner als derjenige von Stickstoff. μ_N hält dabei recht annähernd die Mitte zwischen μ_O und μ_C. μ_{Cl} berechnet sich aus dem Absorptionsvermögen von Methylchlorid. Vernachlässigt man wieder den Anteil des Wasserstoffs an dem Absorptionsvorgange, dann beruht die Absorption zur Hälfte auf der Beteiligung des Chlors, zur Hälfte auf derjenigen von Kohlenstoff. Danach erhält man als Relativwert der Molekülabsorption von Chlor $\mu_{Cl} = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Wenn dem Wasserstoff aber ein Absorptionseffekt zukommt und sei er auch noch so klein, dann wird die mole-

1) A. van den Broek, Phys. Zeitschr. 14. p. 32. 1913.
2) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1, 476, 857. 1913.

kulare Absorption von Chlor größer, weil eben dann nur ein Fünftel der Gesamtabsorption auf das fünfseitig gebundene Chloratom fällt; dann wird μ_{Cl} etwa doppelt so groß. Für den elementaren Schwefel bestimmt sich unter den gleichen Voraussetzungen der Absorptionskoeffizient μ zu $\mu_S = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,cm^{-1}$. μ_{Cl} und μ_S wären demnach gleich groß. Das ist aber nicht möglich. So wird man dazu geführt, dem Wasserstoff allerdings ein gewisses Absorptionsvermögen zuzusprechen. Das lehrt auch die Betrachtung der Barklaschen Werte. Berechnet man hier für die verschiedenen Fluoreszenzstrahlen unter Vernachlässigung der Wasserstoffabsorption den Absorptionskoeffizienten von Sauerstoff, μ_O, aus den Verbindungen SH_2 und SO_2 und bildet die Quotienten

$$\mu_O/\mu_{Luft}, \quad \mu_{SH_2}/\mu_{Luft}, \quad \mu_{SO_2}/\mu_{Luft},$$

so erhält man sehr schwankende Werte, wie aus Tab. 3 hervorgeht.

Tabelle 3.

Strahler	μ_{Luft}	μ_{SH_2}	μ_{SO_2}	μ_O	μ_O/μ_{Luft}	μ_{SH_2}/μ_{Luft}	μ_{SO_2}/μ_{Luft}
Fe	·020	·204	·24	·054	2,7	10,1	11,9
Co	·016	·181	·24	·028	1,75	10,9	12,5
Cu	·010	·121	·134	·019	1,9	11,1	12,3
Br	·004	·044	·05	·009	2,25	7,8	10,3
Ag	·0007	·006	·007	·003	4	11,3	12,8

Die Quotienten μ_{SO_2}/μ_{Luft}, μ_{SH_2}/μ_{Luft} zeigen einen gegenseitig gleichartigen Gang, während das für die Werte μ_O/μ_{Luft} nicht gilt. Die Anomalie ist nur zurückzuführen auf die vernachlässigte Wasserstoffabsorption.

Trägt man nun die Molekülabsorptionen

$$\mu_C = 4{,}04 \cdot 10^{-4}\,cm^{-1}, \quad \mu_N = 5{,}31 \cdot 10^{-4}\,cm^{-1},$$
$$\mu_O = 7{,}6 \cdot 10^{-4}\,cm^{-1}, \quad \mu_S = 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,cm^{-1},$$
$$\mu_{Cl}\ \text{ca.}\ 10{,}0 \cdot 10^{-3}\,cm^{-1}$$

gegen die Ordnungszahlen graphisch auf, so erhält man eine stetige Kurve, die in ihrem Charakter den Benoistschen Isotransparenzkurven analog ist.

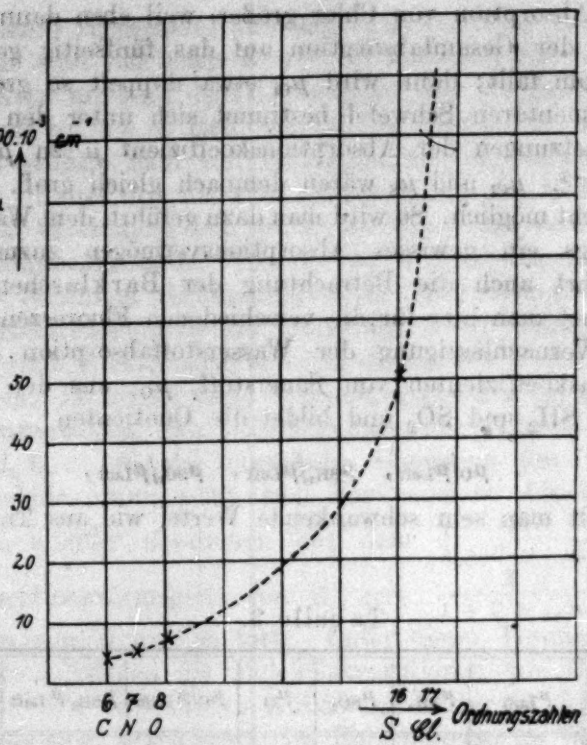


Fig. 2.

§ 3. Über das Verhalten der Quotienten der Absorptionskoeffizienten zweier Gase für verschieden harte Strahlungen.

Der Quotient der Absorptionskoeffizienten zweier gasförmiger Medien ist nur innerhalb eines verhältnismäßig engen Spektralbereiches der verwendeten homogenen Röntgenstrahlen konstant und wird langsam immer kleiner, je kurzwelliger die Strahlung wird. So schwanken die Quotienten μ_{CO_2}/μ_{Luft} der Owenschen Werte zwischen 1,79 für die Fe-Strahlung und 1,69 für die Mo-Strahlung. Für die vielmals härteren Strahlen der Veifa-Maximumröhre ist μ_{CO_2}/μ_{Luft} nur noch 1,03. Ebenso beträgt bei Owen μ_{CO_2}/μ_{Luft} annähernd 10 im untersuchten Spektralbereich — hier nur noch 4. In dem Maße, wie die benützten Strahlen kurzwelliger werden, werden die Quotienten kleiner. Diese Beobachtung findet ihre Parallele bei den γ-Strahl-Messungen. Hier zeigt es sich, daß nach Versuchen von Soddy und Russell[1]) die Massenabsorptions-

1) F. Soddy u. A. S. Russell, Phil. Mag. 18. p. 620. 1909.

koeffizienten $100\,\mu/\varrho$ für Metalle von Kupfer abwärts bis zu den leichtesten festen Körpern, wie Schwefel und Paraffin, einem bestimmten Grenzwert zustreben, der mit recht großer Annäherung 4 ist. Hier gilt also $\mu_1/\varrho_1 : \mu_2/\varrho_2 = 1$, eine Tendenz, die sich bei den Röntgenabsorptionsmessungen auch zeigt, indem beispielsweise für die Fe-Strahlung $\mu_{CO_2}/\varrho_{CO_2} : \mu_{Luft}/\varrho_{Luft} = 1{,}17$ ist, für die Mo-Strahlung nur noch 1,10. Bei Schwefeldioxyd und Luft sind die entsprechenden Quotienten 4,62 für die weiche Eisenstrahlung und 4,5 für die härtere Mo-Strahlung. Wenn Rutherford für den Quotienten μ_{CO_2}/μ_{Luft} 1,57 erhielt, Thomson 1,53, so lag das daran, daß Thomson mit einer etwas härteren Strahlung arbeitete. (Vgl. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, deutsch, herausgegeben von E. Marx, p. 260. 1906.) Im übrigen war es mehr oder weniger Zufall, daß die Absorptionskoeffizienten hier annähernd den Dichten proportional waren, von welcher Voraussetzung die Verfasser ausgingen.

§ 4. Über die Abhängigkeit des Absorptionsvermögens eines Gases von dem herrschenden Drucke.

Es wurden Versuche angestellt, um die zu verschiedenen Partialdrucken gehörenden Absorptionskoeffizienten zu bestimmen. Als Gas wurde Chlormethyl gewählt wegen seines hohen Absorptionsvermögens. Der niedrigste Druck, für den noch eine Bestimmung möglich war, betrug 19 cm. Tab. 4 enthält die aus 2—3 verschiedenen Messungen erzielten Mittelwerte.

Tabelle 4.

Partialdruck	Spez.-Gew. $g \cdot cm^{-3}$	μ (cm^{-1})	μ/ϱ ($cm^2\,g^{-1}$)
80	$230{,}45 \cdot 10^{-5}$	$259{,}7 \cdot 10^{-5}$	1,07
60	181,9	198,1	1,09
36	109,15	122,8	1,12
22	66,7	91,45	1,36
19	57,6	83,8	1,45

Trägt man die Partialdrucke gegen die entsprechenden Absorptionskoeffizienten graphisch auf (Fig. 3), so zeigt es sich, daß innerhalb des untersuchten Gebietes die Absorption proportional mit dem Drucke geht.

Diese Erscheinung war zu erwarten, denn der Druck ist ja nur ein Bild für das zahlenmäßige Vorhandensein absorbierender Molekeln. Leider war die Meßmethode nicht empfindlich genug, um den Absorptionsvorgang bei noch kleineren Drucken zu verfolgen. Es ist nämlich nicht anzunehmen, daß die Beziehung für kleinere Partialdrucke als 20 cm weiter linear bleibt, denn die Kurve muß ja beim

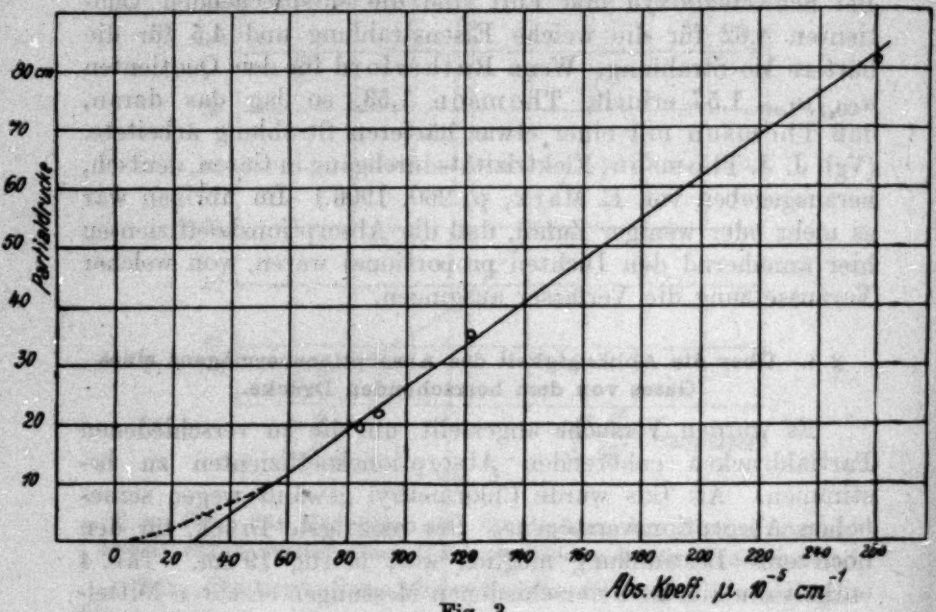


Fig. 3.

Drucke Null die Absorption Null erreichen. Die Absorptionsvermögen müssen also bei Drucken zwischen 0 und 20 cm in stärkerem Maße abnehmen, wie die Drucke kleiner werden. Man kann sich vorstellen, daß bei genügender Verdünnung die freien Weglängen der einzelnen Moleküle so groß geworden sind, daß infolge der erhöhten Bewegungsfreiheit weniger Molekeln sich an der Absorption beteiligen, als solche zahlenmäßig dem herrschenden Drucke entsprechen. Crowther[1]) gelang es übrigens, eine lineare Abhängigkeit bis herunter zum Drucke Null zu konstatieren. Die Abweichung gegenüber den vorliegenden Untersuchungen dürfte sich erklären lassen

1) J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. (A) 82. p. 103. 1909.

durch die Verwendung verschieden harter Strahlungen. Indem Crowther eine weichere Strahlung zur Verfügung stand, war mehr Gelegenheit gegeben, daß selbst bei niedrigen Drucken trotz der hohen Eigengeschwindigkeit die relativ langsamen Röntgenimpulse sämtliche auf dem Strahlungswege sich bewegenden Molekeln zur Absorption anregten.

§ 5. Über die Neigung der Absorptions-Druck-Geraden.

Aus der linearen Beziehung zwischen dem Absorptionskoeffizienten und dem Gasdruck folgt, daß für einen beliebigen Partialdruck π/p (π = vorhandener Gasdruck, p = Normaldruck) der Absorptionskoeffizient μ_π/p einmal dem Partialdrucke π/p, dann dem Absorptionskoeffizienten μ_p proportional ist, in Zeichen:

$$\mu_\pi/p \sim \mu_p \cdot \pi/p,$$

oder

$$\mu_\pi/p = \varkappa \cdot \pi/p \cdot \mu_p.$$

Wäre die Absorptionsdruck-Gerade unter genau 45° gegen die Abszisse geneigt, dann wäre $\varkappa = 1$. Da der Neigungswinkel aber kleiner als 45° ist, muß notwendig $\varkappa < 1$ sein. Setzt man insbesondere

$$l \cdot \mu_\pi/p = -\ln \frac{J'}{J_0},$$

so erhält man

$$-l \cdot \varkappa \cdot \pi/p \cdot \mu_p = \ln \frac{J'}{J_0},$$

oder

$$J' = J_0 \cdot e^{-\varkappa \cdot \pi/p \cdot l \cdot \mu_p}.$$

Untersucht man verschiedene Gase bei einer und derselben Strahlung, dann stellt $\varkappa$ offenbar eine Konstante für das untersuchte Gas dar und hat für ein dichtes Gas einen kleineren Wert als für ein weniger dichtes Gas. Die Strahlung wird nämlich auf dem Wege durch das Medium etwas filtriert. Dabei wird die Filterwirkung um so größer, unter je höherem Druck das Gas steht. Infolgedessen ist zu erwarten, daß für den Druck einer Atmosphäre der Absorptionskoeffizient kleiner als doppelt so groß wird wie für den Druck einer halben Atmosphäre (er betrug bei Chlormethyl $252 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1} bei 80 cm Druck gegen $140 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1} bei 40 cm Druck). So erklärt es sich auch, daß die Werte μ/ϱ von Chlormethyl für

höhere Drucke kleiner als für niedrigere Drucke sind, indem die bei hohen Drucken bestimmten Absorptionskoeffizienten relativ zu klein ausfallen gegenüber den bei niedrigen Drucken gewonnenen Werten. Im Gegensatz zu dieser Beobachtung glauben Rutherford und Clung[1]) eine Konstanz des Massenabsorptionskoeffizienten μ/ϱ für Luft bei verschiedenen Drucken zwischen $^1/_2$ und 3 Atmosphären gefunden zu haben. Ihre Versuchsergebnisse, aus welchen sie ihre Vermutung folgern, sind in Tab. 5 wiedergegeben:

Tabelle 5.

Druck in Atm.	μ/ϱ in Luft
0,5	0,244
1,0	0,223
2,0	0,583
3,0	0,222

Betrachtet man die Werte genauer, so zeigt sich keineswegs eine Konstanz des Massenabsorptionskoeffizienten. Im Gegenteil zeigen die Werte μ/ϱ genau wie oben einen gewissen Gang, indem sie mit zunehmendem Drucke kleiner werden (bis auf eine Ausnahme). Für Chlormethyl ist die Abhängigkeit des Massenabsorptionskoeffizienten von dem herrschenden Drucke allerdings erheblich größer als bei Luft. Die Ursache der Erscheinung muß in der 1,8fachen Dichte des Chlormethyls bezogen auf Luft gesucht werden.

§ 6. Über die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Größe der Filterwirkung.

Jede inhomogene Röntgenstrahlung härtet sich selbsttätig beim Durchsetzen von Materie, indem die weicheren Komponenten in größerem Maße absorbiert werden als die härteren Bestandteile. Infolgedessen wird der Absorptionskoeffizient um so kleiner, auf je längerem Wege die Strahlung Substanz durchsetzt hat. Es wurden nun Versuche angestellt, die dazu dienen sollten, für verschiedene Filterdicken die zugehörigen Absorptionsvermögen zu bestimmen. Als absorbierendes Gas diente Chlormethyl. Filtriert wurde die Strahlung durch

1) E. Rutherford u. McClung, l. c.

Aluminium variabler Dicke, das bei seiner niedrigen Ordnungszahl im Bereich der harten Strahlung des Platin-Antikathodenrohres kein Gebiet selektiver Absorption besitzt. Die erste physikalische Meßreihe zu einer präzisen Bestimmung des Absorptionsverlaufes einer inhomogenen Röntgenstrahlung, wie man sie aus einem technischen Röntgenrohre erhält, stammt von Seitz[1]) aus dem Jahre 1908. Seine Beobachtungen be-

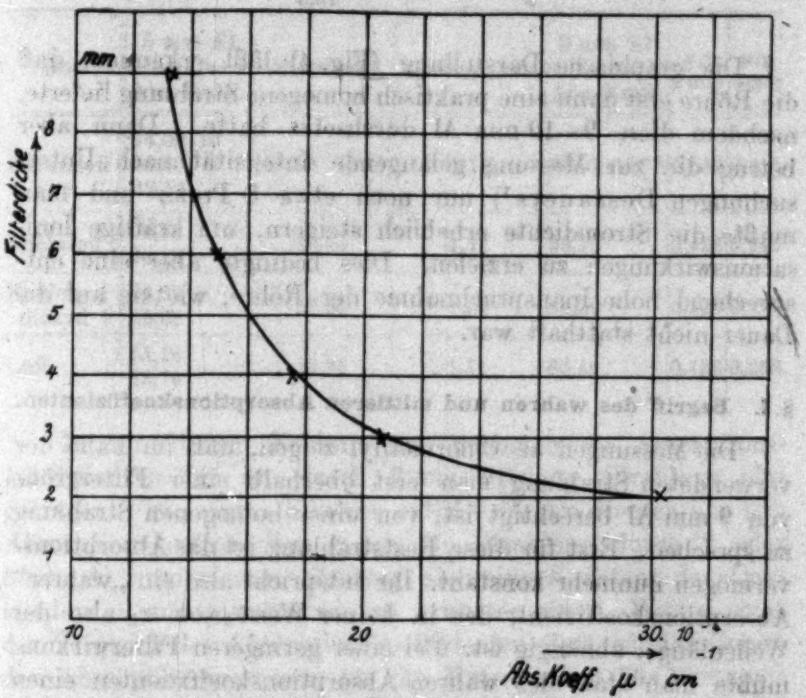


Fig. 4.

ziehen sich auf ein relativ weiches Rohr (die Induktorspannung betrug nur 28000 Volt). Erst nachdem die inhomogene Strahlung durch etwa 8 Stanniolblätter (0,0177 mm dick) fortgenommen war, wurde eine praktisch homogene Strahlung beobachtet. Dabei überwog die inhomogene Strahlung sehr beträchtlich, sie betrug nach Seitz etwa 98 Proz. der Gesamtstrahlung. Tab. 6 bringt die Zusammenstellung eigener entsprechender Beobachtungen.

1) W. Seitz, Ann. d. Phys. 27. p. 301. 1908.

Tabelle 6.

Filterdicke des Aluminiums in mm	Abs.-Koeff. cm^{-1}
2	$30{,}0 \cdot 10^{-4}$
3	20,6
4	17,5
6	14,9
9	13,3

Die graphische Darstellung (Fig. 4) läßt erkennen, daß die Röhre erst dann eine praktisch homogene Strahlung lieferte, nachdem diese 9—10 mm Al durchsetzt hatte. Dann aber betrug die zur Messung gelangende Intensität nach Untersuchungen Dessauers[1]) nur noch etwa 8 Proz., und man mußte die Stromdichte erheblich steigern, um kräftige Ionisationswirkungen zu erzielen. Dies bedingte aber eine entsprechend hohe Inanspruchnahme der Röhre, wie sie auf die Dauer nicht statthaft war.

§ 7. Begriff des wahren und mittleren Absorptionskoeffizienten.

Die Messungen an Chlormethyl zeigen, daß im Falle der verwendeten Strahlung man erst oberhalb einer Filtergröße von 9 mm Al berechtigt ist, von einer homogenen Strahlung zu sprechen. Erst für diese Reststrahlung ist das Absorptionsvermögen nunmehr konstant. Ihr entspricht also ein „wahrer" Absorptionskoeffizient, der in keiner Weise von x, also der Wellenlänge, abhängig ist. Bei einer geringeren Filterwirkung müßte man statt des wahren Absorptionskoeffizienten einen „scheinbaren mittleren" Absorptionskoeffizienten einführen, der außer von der Wellenlänge auch von der Intensität der Strahlung abhängt. Die auf Grund der vorstehenden Messungen erhaltenen Absorptionskoeffizienten sind infolge der geringeren Filterwirkung nur mittlere Absorptionskoeffizienten. Es ist infolgedessen nicht korrekt, das für den Absorptionskoeffizienten gebräuchliche Symbol μ zu verwenden — wenn ich es dennoch tat, so geschah es, um mit der übrigen Röntgenliteratur in Übereinstimmung zu bleiben.

1) F. Dessauer, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstrahlen **23**. p. 220. 1915/16.

§ 8. Absorptionsmessungen bei 5 mm Al-Filterstärke.

Es wurden für Sauerstoff, Stickstoff, Luft, Kohlendioxyd besondere Absorptionsmessungen angestellt, wenn die Strahlung durch 5 mm Al filtriert war. Die beobachteten Werte der Absorptionskoeffizienten sind in Tab. 7 zusammengestellt.

Tabelle 7.

Gas	5 mm Al Scheinbarer Abs.-Koeff.	Mittelwert	μ_2 mm/μ_5 mm	2 mm Al Scheinbarer Abs.-Koeff.	μ/ϱ 2 mm	μ/ϱ 5 mm
Sauerstoff	$44{,}00 \cdot 10^{-5}$ 43,90 42,53	$43{,}48 \cdot 10^{-5}$	1,75	$76{,}07 \cdot 10^{-5}$	0,543	0,311
Stickstoff	30,9 30,19	30,54	1,77	53,13	0,423	0,243
Kohlendioxyd	36,82 38,88	37,85	1,69	64,20	0,325	0,192
Luft . .	35,16 32,75	33,95	1,71	60,48	0,490	0,263

In der fünften Kolonne sind nochmals die Absorptionskoeffizienten für die durch 2 mm filtrierte Strahlung eingetragen. Die vierte Kolonne enthält die Quotienten aus den Absorptionskoeffizienten, wenn die Strahlung durch 2 oder 5 mm Al filtriert war. Es zeigt sich eine Konstanz der Quotienten μ_2 mm/μ_5 mm, wie zu erwarten war. Weiter zeigt der Vergleich der Absorptionskoeffizienten, daß sich das Gebiet der Absorptionsvermögen für die Extremwerte $76 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1} und $53{,}19 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1} bei der schwachen Filterwirkung auf ein nahezu halb so großes Intervall reduziert hat, wenn durch 5 mm Al filtriert wurde. Der Schwankungsraum der Absorptionskoeffizienten für verschieden dichte Medien wird mit steigender Strahlenhärte immer kleiner. Dasselbe zeigen die Massenabsorptionskoeffizienten μ/ϱ. Hier beträgt z. B. der Schwankungsraum bei 2 mm Al 0,218, bei 5 mm Al nur noch 0,119. Er strebt offenbar dem Werte Null zu wie im Falle der γ-Strahlen, was dann gleichbedeutend ist mit der für die γ-Strahlen bereits bestätigten Erscheinung, daß das Absorptionsvermögen für unendlich kleine Impulsbreiten schließlich für alle Körper gleich wird. Diese Grenzerscheinung läßt sich

versuchsweise folgendermaßen erklären: Handelt es sich bei dem Absorptionsvorgange um Resonanzerscheinungen im Atom bzw. im Molekül, so daß die ankommenden Impulse gewisse Elektronen — in den meisten Fällen die relativ labilen, zu äußerst in der Atomsphäre gelegenen Valenzelektronen — in Schwingungen versetzen, wobei ein Teil der Strahlungsenergie verzehrt wird, so könnte man sich vorstellen, daß mit steigender Frequenz der Strahlung die Elektronen, die trotz ihrer Kleinheit mit gewisser Trägheit zu begaben sind, nicht mehr genügend ansprechen.

§ 9. Abhängigkeit des Absorptionsvermögens von der Spannungsvariation der Röhre.

Die spektrale Zusammensetzung des Röntgenlichtes hängt allein ab von dem Spannungsverlaufe an der Röhre. Wird die Röhrenspannung gesteigert, etwa durch größere Belastung des Primärstromes, dann erhöht sich die Elektronengeschwindigkeit, die emittierte Strahlung wird kurzwelliger und das Absorptionsvermögen wird kleiner. Es wird nun im folgenden untersucht, in wieweit eine Änderung der Röhrenspannung die Größe des Absorptionskoeffizienten beeinträchtigt. Während bei vier Meßreihen die primäre Stromstärke 2,85 A betrug, wurde sie in zwei Fällen gesteigert auf 3,2 A. Diese geringe Stromsteigerung bewirkte eine erhebliche Spannungserhöhung. Zeigte der Härtemesser in dem ersten Falle bei 2 M. A. etwa 7 Benoist, so zeigte er jetzt bei 2 M. A. gut 9—10 Benoist. Im ersten Falle entlud sich das Elektroskop bei 2 M. A. in etwa 23 Sekunden, im zweiten Falle in ca. 8 Sekunden, also dem dritten Teile der Zeit. Diese Verhältnisse ließen einen erheblichen Unterschied in der Größe des Absorptionskoeffizienten für die beiden Belastungen erwarten. Dem war aber nicht so. Berechnete sich im ersten Falle der Absorptionskoeffizient aus vier Messungen zu $30 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$, so bestimmte er sich bei der höheren Belastung auf Grund der Messungen zu $24{,}9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Tab. 8 enthält die Absorptionskoeffizienten, die primären Stromstärken und die Entladungszeiten in Sekunden bei einer sekundären Stromstärke von 2 M. A. Ein Einfluß ist ersichtlich, aber er ist gegen Erwarten klein. Trotzdem betrug die mittlere Härte für die beiden letzten Versuche 2—3 Einheiten mehr.

Tabelle 8.

Entladungszeit in Sek.	Primärer Strom	Abs.-Koeff. cm^{-1}
22 Sek.	2,87 A.	$30{,}14 \cdot 10^{-4}$
23 „	2,82 „	32,60
22,2 „	2,83 „	28,34
22,7 „	2,85 „	30,17
8,8 „	3,2 „	25,30
7 „	3,25 „	24,67

Man kann sich die Erscheinung folgendermaßen erklären: Wenn auch infolge der höheren Belastung die Hauptstrahlung wesentlich härter wird (etwa die vom Brennfleck ausgehende Platinfluoreszenzstrahlung), so tritt daneben ein intensives Gemisch von weicheren Strahleń auf, dessen Ursprung man vielleicht in den peripherischen Gegenden des Brennfleckes suchen wird. Während die sehr harte Strahlung nur sehr wenig von den leichten gasförmigen Medien absorbiert wird, erfährt das weichere Strahlengemisch hier eine starke Absorption. Für sie wird eigentlich das Absorptionsvermögen bestimmt, nicht etwa für die kurzwellige Strahlung, welche auf dem Leuchtschirm die Härte 10 anzeigt. Deshalb kann man die Röhrenspannung um einige Kilovolt erhöhen, ohne daß der Absorptionskoeffizient wesentlich kleiner wird, es sei denn, daß die weiche Strahlung durch genügend dicke Filter abgefangen wird.

§ 10. Über den Wert der Angabe des Absorptionsvermögens einer Substanz für eine beliebige Strahlung durch den Absorptionskoeffizienten.

Aus der Variation der Absorptionsmessungen nach Strahlenhärte und Filtrierung an einer gegebenen Substanz geht hervor, daß bei der Angabe eines Absorptionskoeffizienten irgendeines Körpers eine Angabe der Bedingungen und näheren Verhältnisse, die der Messung zugrunde lagen, durchaus nötig ist. Die *Angabe eines Absorptionskoeffizienten hat nur dann Wert und Bedeutung, wenn gleichzeitig die Strahlenhärte und Filterstärke bekannt sind.* Durch ungenügende Beachtung dieser Forderung ist die Röntgenliteratur zurzeit noch reich an widersprechenden Absorptionsangaben. Wie oben ausgeführt

wurde, lassen sich überhaupt keine Absolutwerte des Absorptionsvermögens eines Körpers für Röntgenstrahlen feststellen, aber selbst der Relativwert der Angaben geht verloren ohne Charakterisation der Versuchsbedingungen. So bestimmten Rutherford und Clung[1]) den Massenabsorptionskoeffizienten von Luft μ/ϱ zu 0,22 $cm^2\,g^{-1}$, Holtsmark[2]) ermittelte 2 Jahre später einen mehr als doppelt so großen Wert zu 0,48 $cm^2\,g^{-1}$. Dem Leser bleibt es überlassen zu entscheiden, ob der geringere Wert 0,22 $cm^2\,g^{-1}$ auf stärkere Filtrierung oder härtere Primärstrahlung zurückzuführen ist. Stimmte die erste Erklärung, dann wäre der Wert viel eher ein Absolutwert als im Falle der zweiten Deutung. Größeren Relativwert beanspruchen die Angaben von Winawer und Sachs[3]), welche für eine weiche Strahlung ($\mu/\varrho_{Al} = 0{,}6$) die folgenden Massenabsorptionskoeffizienten bestimmt haben:

$$\mu/\varrho_{\text{flüssige Luft}} = \mu/\varrho_{\text{Wasser}} = 0{,}3\ cm^2\,g^{-1}.$$

In wie beträchtlichem Maße die Filterwirkung für den Endwert ausschlaggebend ist, beweist eine weitere Messung von Winawer[4]) aus dem Jahre 1914. Nachdem hier die Strahlung einer Veifa-Maximumröhre durch 1 mm Blei filtriert war, ergab sich als Massenabsorptionskoeffizient von Wasser der Wert $\mu/\varrho = 0{,}12$, während er in der späteren Arbeit ohne diese intensive Filterwirkung zu 0,3 $cm^2\,g^{-1}$ ermittelt wurde.

§ 11. Vergleich des Absorptionskoeffizienten von Luft für Röntgenstrahlen und für γ-Strahlen.

Der Absorptionskoeffizient von γ-Strahlen für atmosphärische Luft wurde ziemlich gleichzeitig bestimmt von Heß[5]) und Chadwick[6]). Heß ermittelte einen etwas geringeren Wert als Chadwick. Die Ursache lag wahrscheinlich in der verschiedenen Versuchsanordnung. So fand

$$\text{Heß}\quad \mu = 4{,}47 \cdot 10^{-5}\ cm^{-1},$$
$$\text{Chadwick}\quad \mu = 6{,}20 \cdot 10^{-5}\ cm^{-1}.$$

---

1) E. Rutherford u. Mc. Clung, l. c.
2) G. Holtsmark, Ann. d. Phys. **10.** p. 522. 1903.
3) B. Winawer u. S. Sachs, Phys. Zeitschr. **16.** p. 261. 1915.
4) B. Winawer, Phys. Zeitschr. **15.** p. 946. 1914.
5) V. F. Heß, Phys. Zeitschr. **12.** p. 998. 1911.
6) J. Chadwick, Proc. Phys. Soc. **24.** p. 152. 1912.

Der Absorptionskoeffizient harter Röntgenstrahlen für Luft wurde bestimmt zu $6{,}0 \cdot 10^{-4}$ cm^{-1} für eine Strahlenhärte von 7—8 Benoist bei 2 mm Al-Filterwirkung (vgl. p. 300). Die so gehärtete Röntgenstrahlung ist aber noch keineswegs homogen, nur die weichen und mittelharten Komponenten sind hinwegfiltriert. Aus der Meßreihe für Chlormethyl (§ 6) geht nun hervor, daß bei ca. 9 mm Al-Filterwirkung die zur Absorption gelangende Strahlung praktisch homogen ist. Dann ist aber der Absorptionskoeffizient nur noch etwa halb so groß, er beträgt nach Interpolation aus der Kurve den 2,25. Teil. Berechnet man für diese stark filtrierte Strahlung aus der Kurve den Absorptionskoeffizienten von Luft, so erhält man als Wert $\mu = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm^{-1}. Über das gegenseitige Absorptionsvermögen von Röntgen- und γ-Strahlen in Luft erhält man eine konkretere Vorstellung, wenn man etwa nach der *Halbwertschicht* von Luft fragt gegenüber den beiden Strahlentypen. Dabei versteht man unter der Halbwertschicht von Luft diejenige Luftschicht, welche die Strahlen durchsetzen müssen, um auf die Hälfte ihrer Anfangsintensität geschwächt zu werden. Diese Halbwertschicht bestimmt sich leicht auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{2} J_0 = J_0 \cdot e^{-\mu l}.$$

Setzt man die jeweiligen Absorptionskoeffizienten für X-Strahlen und γ-Strahlen in die obige Gleichung ein, so findet man als Halbwertschicht für X-Strahlen

$$l_x = \frac{\log 2 \cdot 10000 \cdot 2{,}30259}{2{,}6} \sim 27 \text{ m}.$$

Für die hochgeschwinden γ-Strahlen ergibt sich auf Grund derselben Rechnung unter Benutzung des von Heß ermittelten Absorptionskoeffizienten eine Halbwertschicht in Luft

$$l_\gamma = \frac{\log 2 \cdot 100000 \cdot 2{,}30259}{4{,}47} \sim 115 \text{ m},$$

die also 4—5mal größer ist als die der benutzten X-Strahlen.

§ 12. Das graphische Bild des Absorptionskoeffizienten.

In Fig. 5 sind als Abszissen die Rückgänge aufgetragen, welche in dem hinter dem Versuchsrohr aufgestellten Elektroskop beobachtet wurden, als Ordinaten diejenigen, welche in

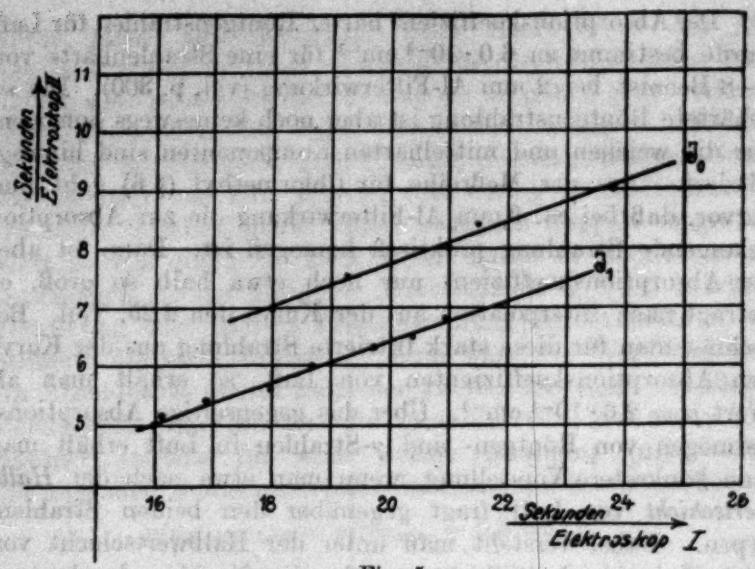


Fig. 5.

dem hinter dem Standardrohr aufgestellten Elektroskop bestimmt wurden.

Die obere Gerade ist die graphische Darstellung der ungehemmten Strahlungsintensität J_0 bei Vakuum, die untere

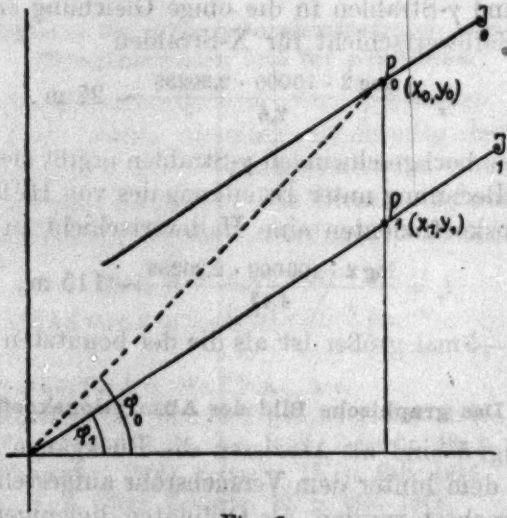


Fig. 6.

Gerade diejenige der geschwächten Strahlungsintensität J_1 bei Gasfüllung. Aus der linearen Beziehung der unter verschiedenen Azimuten in beiden Elektroskopen beobachteten Rückgänge und aus der Parallelität der beiden Geraden folgt, daß für mittlere Härten die Strahlungsverteilung unter verschiedenen Emissionswinkeln konstant ist. In Fig. 6 sind die Verhältnisse schematisch gezeichnet.

J_0 sei wieder das Bild der ungeschwächten Strahlung, J_1 das der geschwächten Strahlung. Dann ist

$\frac{x_0}{y_0} = \text{const.} = c_0$ proportional der ungeschwächten Strahlung

und

$\frac{x_1}{y_1} = \text{const.} = c_1$ proportional der geschwächten Strahlung.

Also ist $\frac{c_0}{c_1} = e^{-\mu l}$ und entsprechend auch

$$\frac{x_0 \cdot y_1}{y_0 \cdot x_1} = \frac{c_0}{c_1} = e^{-\mu l}.$$

Da im besonderen $x_0 = x_1$, so ist

$$\frac{y_1}{y_0} = e^{-\mu l}$$

oder

$$\mu = \frac{\log \text{nat } y_0 - \log \text{nat } y_1}{l}.$$

Statt der Ordinaten y_0, y_1 kann man auch die Winkel einführen, welche die von den Aufpunkten P_0, P_1 nach dem Ursprung gezogenen Geraden bilden. Da

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_0} \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_1},$$

so ist

$$\frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_0} = e^{-\mu l},$$

oder

$$\mu = \frac{\log \text{nat tg } \varphi_0 - \log \text{nat tg } \varphi_1}{l}.$$

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

3. *Die Lichtstärke des schwarzen Körpers in Hefnerkerzen und die Strahlungskonstanten der Glühlampenkohle;*[1]

von H. Kohn.

§ 1. Seit der Aufstellung des Kirchhoffschen Gesetzes und im besonderen seit der Entwicklung der Gesetze der schwarzen Strahlung und ihrer experimentellen Verwirklichung hat man sich daran gewöhnt, die Strahlung beliebiger Substanzen ihrer Größe und Eigenschaften nach sozusagen an der des schwarzen Körpers zu orientieren. Im Einklang hiermit läge es nahe, auch die Flächenhelligkeit des schwarzen Körpers bestimmter Temperatur als Normale der Lichtstärke einzuführen und die Flächenhelligkeit und somit auch die gesamte Lichtstärke beliebiger Substanzen auf diese zu beziehen. Bekanntlich steigt aber die Flächenhelligkeit so schnell mit der Temperatur an, daß man diese bei einem Werte von ca. 2300° abs., wie ihn unsere gebräuchlichen Lichtquellen haben, auf ca. 2° genau ermitteln müßte, um die Helligkeit des schwarzen Körpers auf 1 Proz., d. h. mit der gleichen Genauigkeit zu reproduzieren, wie es der Reichsanstalt bei der Hefnerkerze möglich ist.[2] Bereits das Konstanthalten der Temperatur innerhalb dieser Grenzen würde Schwierigkeiten bieten, weit größere jedoch die Feststellung dieser Temperatur, wozu, nach Warburg, energetische Messungen von einer Genauigkeit von 0,1—0,2 Proz. erforderlich wären. Durch diese Schwierigkeit wird also die wichtigste Eigenschaft der Normalen, nämlich ihre Reproduzierbarkeit, in Frage gestellt, und man ist daher bis heute bei der auf die Helligkeit der Hefnerlampe begründeten Einheit der Hefnerkerze geblieben.

§ 2. Um nun aber die Flächenhelligkeit und Leistungsfähigkeit unserer gebräuchlichen Lichtquellen mit derjenigen

1) Vorgetragen in der Sitzung der Schles. Ges. für vaterl. Kultur am 13. Juli 1917.

2) Nach E. Warburg, Über eine rationelle Lichteinheit, Verh. d. D. Physik. Ges. 19. p. 3—10. 1917.

des schwarzen Körpers vergleichen und auf Grund der Gesetze der schwarzen Strahlung Aussagen über die Ziele und Grenzen der Leuchttechnik in der Einheit der Hefnerkerze machen zu können, bedarf es einer Eichung des schwarzen Körpers in Hefnerkerzen. Wenngleich diese auch dieselben Schwierigkeiten bietet wie die Einführung der Helligkeit des schwarzen Körpers als Normale, so brauchen wir von ihr für die genannten Zwecke doch nicht den hohen Grad der Genauigkeit wie von einer Normale zu fordern.

Diese Eichung ist zum ersten Male von Lummer und Pringsheim[1]) mit dem Lummer-Kurlbaumschen schwarzen Körper[2]) ausgeführt worden; später hat sie Nernst[3]) mit einem anderen schwarzen Körper bis zu höheren Temperaturen ausgedehnt. Seitdem findet sich in der Literatur nur bisweilen der Wunsch nach einer Wiederholung der Messungen ausgesprochen.

Die vorliegende Arbeit gibt eine Wiederholung der Messungen mit dem Lummer-Kurlbaumschen schwarzen Körper. Die Angabe der zu den gemessenen Lichtstärken gehörigen Temperaturwerte erfolgt auf Grund der verschiedenen Temperaturskalen, die sich je nach dem gewählten Werte der Strahlungskonstanten ergeben, um einen Vergleich mit früheren Messungen am schwarzen Körper und an anderen Lichtquellen bekannter Temperatur zu ermöglichen.

Der elektrisch geheizte Lummer-Kurlbaumsche schwarze Körper wurde mit dem Lummer-Brodhunschen Photometer gegen eine in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt auf horizontale Hefnerkerzen geeichte Kohlefadenlampe mit U-förmigem Bügel photometriert.[4]) Vor dem schwarzen Körper war eine kleine kreisförmige Blende angebracht, deren Größe und Abstand von der Öffnung des schwarzen Körpers so gewählt waren, daß sie als die eigentliche strahlende schwarze Fläche angesehen werden kann. Sie war so justiert, daß die Spitze des durch ihren Rand und den Photometerschirm begrenzten Strahlenkegels im schwarzen Körper an den Ort

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Physik. Zeitschr. 3. p. 97—100. 1902.
2) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.
3) W. Nernst, Physik. Zeitschr. 7. p. 380. 1906.
4) Diese Messungen habe ich zum Teil gemeinsam mit Hrn. cand. phil. F. Conrad ausgeführt.

der Lötstelle des Thermoelementes zu liegen kam. Die gemessene Lichtstärke ist die horizontale Lichtstärke einer ebenen schwarzen Kreisfläche von der Größe der Blende, senkrecht zu dieser beobachtet. Die mittlere sphärische Lichtstärke beträgt den vierten Teil der horizontalen, was sich ohne weiteres ergibt, wenn wir uns die von dieser Kreisfläche in den Halbraum ausgehende Lichtmenge gleichmäßig auf die Oberfläche einer Kugel vom gleichen Radius verteilt denken; auf die Einheit dieser Kugelfläche entfällt nur der vierte Teil derjenigen Lichtmenge, die auf die Einheit der ebenen Kreisfläche kommt.

Die Messungen wurden mit zwei Blenden verschiedener Größe ausgeführt und der Abstand zwischen Blenden und schwarzer Körperöffnung etwas variiert, um die Genauigkeit der oben angegebenen Justierung zu prüfen. Es ergaben sich dabei z. B. die folgenden Werte der Lichtstärke, wo mit *A* und *B* die mit zwei verschiedenen Blenden, mit *I* und *II* die in zwei um 15 cm verschiedenen Abständen vorgenommenen Messungen bezeichnet sind.

Tabelle 1.

Messung	Lichtstärke
A II	0,01974 HK/mm²
A II	0,01972
A I	0,02005
A I	0,01974
B II	0,02008
B I	0,02027

Bei den einzelnen Helligkeitsmessungen, ebenso bei der Ausmessung der Blenden unter der Teilmaschine betragen die äußersten Abweichungen ca. 0,5 Proz.

Blende *A* hat einen Durchmesser von 5,149, Blende *B* von 10,068 mm.

§ 3. Das im schwarzen Körper befindliche Pt-PtRh-Thermoelement, durch welches die zu den Helligkeitsmessungen gehörigen Temperaturen des schwarzen Körpers angezeigt werden, ist ein in der Reichsanstalt auf Grund der Holborn-Dayschen[1]) Skala geeichtes. Bei dieser Eichung sind die

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 817. 1899 und Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

Temperaturen bekanntlich nur bis zum Goldschmelzpunkte, 1064° C, auf gasthermometrische Messungen begründet; von da ab ist die Skala nach einer empirisch gewonnenen Formel extrapoliert. Die Werte dieser Skala stimmen nahezu mit denjenigen der strahlungstheoretischen Temperaturskala überein, die sich, an die monochromatische Intensität des schwarzen Körpers bei 1064° anknüpfend, bei Benutzung des Wertes 1,46 cm . grad [1]) für die Konstante c_2 der Wienschen Spektralgleichung ergibt. Immerhin beträgt gemäß den Messungen von Warburg, Leithäuser, Hupka und Müller [2]) am Palladiumschmelzpunkt, der sich nach gasthermometrischen Messungen zu 1549,2° [3]) ergibt, der Unterschied dieser beiden Skalen ca. 5 Grad. Wir machen die Annahme, daß der Unterschied der beiden Skalen der Temperaturdifferenz proportional ist und erhalten so, durch Inter- und Extrapolation die Korrektionen, die an den auf der Eichtabelle angegebenen Temperaturen für das Intervall zwischen 1064 und 1549° und für höhere Temperaturen anzubringen sind. Der bei der Interpolation gemachte Fehler dürfte jedenfalls sehr gering sein. Der Übergang von der auf den Wert $c_2 = 1{,}46$ aufgebauten Temperaturskala zu den auf anderen gemessenen Werten der Konstanten beruhenden ergibt sich auf Grund der Wienschen Spektralgleichung.

Ist T_1 die Ausgangstemperatur, T_2 die nach der Wienschen Gleichung aus dem Intensitätsanstieg zu berechnende höhere Temperatur, so ist

$$d T_2 = - \frac{T_2 (T_2 - T_1)}{T_1} \frac{d c_2}{c_2} .$$

In Tab. 2 sind die auf Grund verschiedener gemessener Werte der Strahlungskonstanten c_2 in dieser Weise berechneten Temperaturskalen angegeben.

Nach der auf den Wert $c_2 = 1{,}437$ aufbauenden Skala stimmt der Palladiumschmelzpunkt mit dem durch gasthermo-

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Physik. Ges. 3. p. 36—46. 1901.

2) E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka u. C. Müller, Ber. d. Berl. Akad. II, 35—43. 1913; vgl. auch Ann. d. Phys. 1913.

3) A. Day u. R. Sossmann, Sill. Journ. (4) 29. p. 93. 1910; vgl. auch „La mesure des températures élevées par le thermomètre à gaz", Journ. de Phys. (5) 2. 727—749, 831—844, 899—911. 1912.

Tabelle 2.

Temperatur nach Holborn u. Day	Temperatur entsprechend c_2 = 1,460	1,450	1,440	1,437
1400 absol.	1401	1401,5	1401,9	1402,6
1500	1502	1503,2	1504,5	1504,9
1600	1603	1605,2	1607,4	1608,0
1700	1704	1707,2	1710,4	1711,4
1800	1805	1809,3	1813,7	1815,0
1900	1906	1911,5	1917,1	1918,8
2000	2007	2013,9	2020,8	2022,9
2100	2108	2116,4	2124,8	2127,3
2200	2209	2218,9	2228,8	2232,0
2300	2310	2321,5	2333,0	2336,5
2400	2411	2424,3	2437,6	2441,6
2500	2512	2527,2	2542,4	2547,0
2600	2613	2630,1	2647,2	2652,3
2700	2714	2733,2	2752,4	2758,2

metrische Messungen erhaltenen gemäß Warburg usw.[1]) auf 1,4° überein.

Die gemessenen Werte der horizontalen und mittleren sphärischen Lichtstärke (HK_0) des schwarzen Körpers sind in der folgenden Tabelle den auf Grund dieser verschiedenen Skalen erhaltenen Temperaturwerten zugeordnet.

Tabelle 3.

Absolute Temperatur für c_2 = 1,460	= 1,450	= 1,440	= 1,437	Lichtstärke in $\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	$\frac{HK_0}{cm^2}$
1295	1295	1295	1295	0,06	0,015
1586	1588	1590	1591	2,00	0,500
1731	1735	1738	1739	7,71	1,928

Diese Werte sind nach den oben gemachten Angaben auf ±1 Proz. genau. Etwaige Temperaturschwankungen während der Helligkeitsmessungen sind hierin inbegriffen. Die Absolutwerte hängen noch von der Genauigkeit der Eichung des Thermoelementes und der Vergleichsglühlampe ab.

1) l. c. p. 323.

§ 4. Von diesen gemessenen Werten der Lichtstärke H_1 bei der Temperatur T_1 ausgehend, soll die Lichtstärke H_2 bei der Temperatur $T_2 = 2000°$ abs. berechnet werden, um einen Vergleich mit den von Lummer und Pringsheim gemessenen Werten vornehmen zu können.

Dies kann nach der Lummer-Kurlbaumschen Potenzgleichung[1])

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^x,$$

oder einfacher nach einem auf die Raschsche Gleichung[2])

$$\lg\left(\frac{H_2}{H_1}\right) = x\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\lg e$$

begründeten Extrapolationsverfahren geschehen. Die Raschsche Gleichung ergibt sich aus der Potenzgleichung, wenn

$$x = x \,.\, T$$

gesetzt wird.

Der Wert von x zeigt sowohl nach verschiedenen Messungen des Anstieges der Helligkeit mit der Temperatur wie nach den Berechnungen derselben eine geringe Abhängigkeit von der Temperatur.[3]) Innerhalb eines begrenzten Temperaturintervalles kann man jedoch mit genügender Genauigkeit einen konstanten Wert von x benutzen. Aus den von Lummer und Kohn[3]) berechneten Werten der Helligkeit des schwarzen Körpers (in relativem Maße) ergibt die Rechnung für x den Wert 24860 zwischen 1500° und 2000°. Der Berechnung der hier benutzten Helligkeitswerte liegt der Wert 1,45 der Konstante c_2 zugrunde. Setzt man in der Raschschen Gleichung

$$x = c_2/\lambda\,,$$

so stimmt sie mit der Wienschen Gleichung in logarithmischer Form

$$\lg\left(\frac{H_{\lambda 2}}{H_{\lambda 1}}\right) = \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\lg e$$

überein. Dies besagt[4]), daß der Anstieg der Gesamthelligkeiten

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verh. d. D. Physik. Ges. 2. p. 89—92. 1900.

2) E. Rasch, Ann. d. Phys. 14. p. 193—203. 1904.

3) O. Lummer u. H. Kohn, Jahresber. d. Schles. Gesellsch. für vaterl. Kultur 1915. M. Pirani u. H. Miething, Verh. d. D. Physik. Gesellsch. 17. p. 219. 1915.

4) M. Pirani u. H. Miething, l. c.

in einem begrenzten Temperaturintervall, in welchem $\varkappa$ konstant zu nehmen ist, der gleiche ist wie der der monochromatischen Intensitäten für eine gewisse Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c_2}{\varkappa}.$$

Beim Übergang zu einem anderen c_2-Wert und somit zu einer anderen Temperaturskala, wird sich also der Wert von $\varkappa$ und der Wert des Verhältnisses $\lg\left(\frac{H_2}{H_1}\right)$ in gleicher Weise wie c_2 selbst ändern. Mit den gemäß dieser Überlegung für die verschiedenen Temperaturskalen berechneten Werten für $\varkappa$ sind die in Tab. 4 angegebenen horizontalen und mittleren sphärischen Lichtstärken des schwarzen Körpers bei 2000° abs.

Tabelle 4.

Lichtstärke des schwarzen Körpers bei 2000° abs.

Temperaturskala entsprechend c_2 = 1,460		1,450		1,440		1,437	
Ausgangstemperatur	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$
1586	52,3	1588	50,3	1590	48,3	1591	47,5
1731	53,8	1735	51,8	1738	49,6	1739	49,0
Mittelwert:	53,05		51,05		48,95		48,25
	$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$
	13,26		12,76		12,24		12,06

Tabelle 5.

(Nach Lummer-Pringsheim.)

Temperaturskala entsprechend c_2 = 1,460		1,450		1,440		1,437	
Ausgangstemperatur	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$	Ausgangstemp.	$\frac{HK_{hor.}}{cm^2}$
1449	48,7	1450	46,9	1451	44,8	1452	43,9
1603	48,6	1605	46,9	1607	45,0	1608	44,3
1712	52,0	1715	50,1	1718	47,9	1719	47,3
Mittelwert:	49,77		47,97		45,87		45,17
	$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$		$\frac{HK_0}{cm^2}$
	12,44		11,99		11,47		11,29

gewonnen. In Tab. 5 sind zum Vergleich die in genau derselben Weise auf Grund der Lummer-Pringsheimschen Messungen[1]) extrapolierten Lichtstärken des schwarzen Körpers bei 2000° angeführt.

Der tiefste gemessene Helligkeitswert bei 1295° (vgl. Tab. 3) ist hier nicht als Ausgangspunkt herangezogen, da bei ihm infolge der geringen Lichtstärke die Meßgenauigkeit geringer als bei den beiden anderen Punkten war.

Zwischen den neugemessenen Werten und denen von Lummer und Pringsheim besteht eine relativ gute Übereinstimmung.

§ 5. Mit Hilfe der neugewonnenen Daten wurde für den Vergleich der Leistungsfähigkeit unserer gebräuchlichen Lichtquellen mit derjenigen des schwarzen Körpers, im besonderen gleicher Temperatur, die mittlere räumliche Hefnerkerzenzahl berechnet, die bei der Temperatur von 2000° abs. auf *ein* Watt gesamter *ausgestrahlter* Energie entfällt. Diese Größe ist identisch mit der „technischen Ökonomie"

$$= \frac{\text{Lichtstärke}}{\text{zugeführte Energie}}$$ [2])

derjenigen Lichtquellen, bei welchen alle *zugeführte* in *ausgestrahlte* Energie umgewandelt wird, wie z. B. mit großer Annäherung bei den Kohlefadenglühlampen (vgl. p. 332).

Die Wahl des Wertes für die Konstante σ im Stefan-Boltzmannschen Gesetze, nach welchem wir die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers zu berechnen haben, wird in gewissem Sinne durch die einmal zugrunde gelegte Temperaturskala, d. h. durch den für die Konstante c_2 gewählten Wert vorgeschrieben.

Nach dem Stefan-Boltzmannschen und dem Planckschen Gesetze ist das Konstantenpaar c_2 und σ durch die Gleichungen

$$c_2 = c \cdot \frac{h}{k},$$

$$\sigma = \frac{12\pi\alpha}{c^2} \frac{k^4}{h^3}$$

gegeben. Es besteht also eine gewisse Abhängigkeit zwischen c_2 und σ, welche durch die gemeinsame Abhängigkeit von

1) l. c. p. 321.

2) O. Lummer u. H. Kohn, l. c. p. 325

dem universellen Konstantenpaar h und k hervorgerufen ist. (h ist das Plancksche Wirkungsquantum, k die für die kinetische Energie der Moleküle charakteristische Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit; α hat den Zahlenwert 1,0823.) Auf Grund dieser Abhängigkeit können wir also das eine Konstantenpaar aus den experimentell ermittelten Werten des anderen berechnen. Die experimentelle Bestimmung von h und k erfolgt z. B. durch Messung des photoelektrischen Effektes und des Elementarquantums e der Elektrizität. Nach den neuesten Messungen von Millikan[1]) beträgt $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh., übereinstimmend mit dem Mittelwerte aus einer Anzahl neuerer Messungen, die untereinander im übrigen jedenfalls besser als die verschiedenen gemessenen Werte von σ übereinstimmen[2]), woraus sich die Werte

$$h = 6{,}58 \cdot 10^{-27} \text{ (erg.sec)} \quad \text{und}$$
$$k = 1{,}368 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}$$

ergeben.

Mit Hife dieser Werte folgen nach den obigen Gleichungen für die Strahlungskonstanten die Werte

$$\sigma = 5{,}60 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4} \quad \text{und}$$
$$c_2 = 1{,}4440 \text{ cm} \cdot \text{grad}$$

Diese voneinander abhängigen Werte stehen jedenfalls in gutem Einklang mit den experimentell nach völlig voneinander unabhängigen Methoden gewonnenen Werten von σ und c_2, z. B. mit den Mittelwerten aus allen neueren Messungen derselben.

$$\sigma = 5{,}76 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \quad \text{und}$$
$$c_2 = 1{,}4400 \text{ cm} \cdot \text{grad}$$

In dem Bestreben, die Zahl der physikalischen Konstanten möglichst zu verringern, ist es jedenfalls zweckmäßig, mit diesen Werten zu rechnen.

Wollen wir jedoch direkt experimentell gewonnene Werte von σ und c_2 benutzen, so dürfen wir jedenfalls wegen der gemeinschaftlichen Abhängigkeit der Konstanten vom Elementarquantum e nicht beliebige Werte kombinieren. Aus

1) R. A. Millikan, Phys. Review 7. p. 18. 1916.
2) Vgl. z. B. R. Pohl, Zeitschr. d. Radioakt. u. Elektr. 8. p. 406. 1911.

Tabelle 6.

Beobachter von σ	$\sigma \cdot 10^{12}$ Watt / cm² · grad⁴	c_2 nach	1,420		1,435		1,437		1,440		1,450		1,460	
			Holborn u. Valentiner [9])		Holborn u. Valentiner		Warburg usw. [10])				Paschen [11]) Wanner [12])		Lummer u. Pringsheim [13])	
			$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$	$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$	$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$	$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$	$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$	$e \cdot 10^{10}$	$k \cdot 10^{27}$
Bauer u. Moulin [1]) 1909	5,30													
Kurlbaum [2]) . . 1898	5,32		4,34	5,89	4,48	6,14	4,51	6,18	4,53	6,23	4,62	6,40	4,72	6,58
Kurlbaum . . . 1912	5,45		4,45	6,03	4,59	6,29	4,61	6,33	4,64	6,38	4,73	6,56	4,83	6,74
Westphal [3]) . . . 1912	5,54													
Valentiner [4]) . . 1910	5,58		4,55	6,18	4,70	6,44	4,72	6,48	4,75	6,53	4,85	6,72	4,95	6,90
Shakespear [5]) . . 1911	5,67													
Gerlach [6]) 1916	5,85		4,77	6,48	4,92	6,76	4,95	6,79	4,98	6,85	5,08	7,04	5,19	7,24
Féry [7]) 1909	6,30		5,13	6,98	5,30	7,28	5,33	7,32	5,36	7,38	5,47	7,58	5,59	7,80
Féry u. Dresq [8] 1911	6,51													

1) E. Bauer u. M. Moulin, Journ. d. Phys. **9.** p. 468. 1910.
2) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65.** p. 746. 1898 und Verh. d. D. Physik. Ges. **14.** p. 576. 1912.
3) W. H. Westphal, Verh. d. D. Physik. Ges. **14.** p. 987. 1912.
4) S. Valentiner, Ann. d. Phys. **31.** p. 275. 1910.
5) G. A. Shakespear, Proc. Roy. Soc. **86.** A. p. 180. 1911.
6) W. Gerlach, Ann. d. Phys. **50.** p. 259. 1916.
7) Ch. Féry, Bull. Soc. Franc. Phys. (2) **4.** 1909.
8) Ch. Féry u. M. Drecq, Journ. d. Phys. (1) **5.** p. 551. 1911.
9) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. **22.** p. 1. 1907.
10) E. Warburg, G. Leithäuser, E. Hupka u. C. Müller, Ber. d. Berl. Akad. II. p. 35—43. 1913; vgl. auch Ann. d. Phys. 1913.
11) F. Paschen, Ber. d. Berl. Akad. p. 405—959. 1899.
12) H. Wanner, Ann. d. Phys. **2.** p. 141. 1900.
13) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verh. d. D. Physik. Ges. **3.** p. 36—46. 1901.

Tab. 6 ist zu ersehen, zu welchen Werten von e und h die Kombination je zweier gemessenen Werte von σ und c_2 gemäß den Gleichungen p. 327 u. 328 führt. Durch doppeltes Unterstreichen sind diejenigen Kombinationen gekennzeichnet, aus denen sich e- und h-Werte ergeben, die fast vollkommen mit den gemessenen Werten dieser Konstanten übereinstimmen. Durch einfaches Unterstreichen sind die noch einigermaßen mit dem Experiment in Einklang stehenden Werte hervorgehoben.[1])

Unter Benutzung der in Tab. 3 gegebenen Lichtstärken und der nach Tab. 6 zu den verschiedenen c_2-Werten gehörigen σ-Werte, erhält man somit für die Hefnerkerzenzahl pro Watt des schwarzen Körpers bei 2000° die folgenden Werte (Tab. 7), welche ganz erheblich von einander abweichen und viele Unstimmigkeiten in der Literatur erklären.

Tabelle 7.

c_2	$\sigma \cdot 10^{12}$ $\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$	$\frac{HK_0}{\text{Watt}}$
1,460	5,32	0,156
1,450	5,40	0,148
1,440	5,60	0,137
1,437	5,67	0,133

§ 6. Es soll ferner mit Hilfe der neugewonnenen Werte der Lichtstärke des schwarzen Körpers die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze der Glühlampenkohle und ihr Absorptionsvermögen ermittelt werden; im besonderen interessiert hierbei die sogenannte unpräparierte Kohle, für welche keine direkten Bestimmungen der genannten Konstanten vorliegen.

Nach den Untersuchungen von Lummer[1]), die sich ihrer Methode nach auf das sichtbare Spektrum und auf das kurzwellige ultrarote Gebiet ca. bis 5 μ erstrecken und sich über das Temperaturintervall von ca. 1300—2500° abs. ausdehnen, strahlt die Glühlampenkohle innerhalb dieser Grenzen wie ein grauer Körper; d. h. ihr Absorptionsvermögen A_λ ist unabhängig von der Wellenlänge $= A$, ihr Emissionsvermögen

1) Vgl. a. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 31. p. 275. 1912.

2) O. Lummer, Jahresber. d. Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Kultur 1913 und „Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur", Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1914.

zeigt den gleichen Verlauf wie beim schwarzen Körper gleicher Temperatur; ihr Gesamtstrahlungsgesetz ist, abgesehen vom Zahlenwert der Konstante, das gleiche wie beim schwarzen Körper. Die Lummerschen Untersuchungen, im besonderen auch die daran anschließenden von E. Benedict[1]), bringen ihrer Methode nach auch den Beweis, daß in dem betrachteten Temperaturintervall das Absorptionsvermögen unabhängig von der Temperatur ist.[2]) Die genannten Resultate sind an sogenannter präparierter Kohle gewonnen; es werde die Annahme gemacht, daß sie auch für die unpräparierte Kohle Geltung haben.

Es seien $S_\lambda d\lambda$, S, σ das Emissionsvermögen, die Gesamtstrahlung und die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze des schwarzen Körpers, $E_\lambda d\lambda$, E und μ die entsprechenden Größen für die Kohle; dann folgt auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes:

$$E = \mu T^4 = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = A \int_0^\infty S_\lambda d\lambda = A \sigma T^4 = A S,$$

$$E = A \cdot S,$$

$$\mu = A \cdot \sigma.$$

In gleicher Weise folgt für die Beziehung der Gesamthelligkeiten H_S und H_E des schwarzen und grauen Körpers:

$$H_E = \int_{\lambda\,\text{viol.}}^{\lambda\,\text{rot.}} \varepsilon_\lambda E_\lambda d\lambda = A \int \varepsilon_\lambda S_\lambda d\lambda = A \cdot H_S,$$

$$H_E = A \cdot H_S;$$

hier bedeutet ε_λ die Helligkeitsempfindlichkeit der Netzhautzapfen. Das Integral wird über das sichtbare Spektralgebiet erstreckt. Daß das Auge die monochromatischen Helligkeiten $\varepsilon_\lambda S_\lambda d\lambda$ zu der Gesamthelligkeit integriert, hat die Übereinstimmung zwischen gemessenen und auf die angegebene Weise berechneten Helligkeitswerten ergeben.[3])

Bei einunderselben Temperatur ist also das Verhältnis der Gesamthelligkeit zur Gesamtstrahlung oder in besonderen Einheiten die HK_0-Zahl pro 1 Watt ausgestrahlter Energie

1) E. Benedict, Dissert. Breslau 1915; vgl. auch Ann. d. Phys. 47. p. 641. 1915.

2) Vgl. auch E. P. Hyde, Astrophys. Journ. 36. p. 89. 1912.

3) O. Lummer u. H. Kohn, l. c. p. 325.

für den schwarzen Körper die gleiche wie für den grauen Strahler, und andererseits folgt aus dem Verhältnis der Hefnerkerzenzahl oder auch der Gesamtstrahlung (pro Flächeneinheit) beider Strahler bei gleicher $\frac{HK_0}{Watt}$-Zahl (d. h. gleicher Temperatur) unmittelbar, ohne Kenntnis der Temperatur das Absorptionsvermögen und die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze des grauen Körpers.

Nach verschiedenen Untersuchungen[1]) wird bei den Kohlefadenglühlampen mit U-förmigem Bügel die zugeführte Energie mindesens bis auf 2 Proz. in ausgestrahlte übergeführt, so daß wir die *ausgestrahlte* Energie durch die *zugeführte* ersetzen können und die für die Bestimmung der Konstanten benötigte $\frac{HK_0}{Watt}$-Zahl einfach durch Messung der mittleren sphärischen Lichtstärke in HK_0 und der zugeführten Watts erhalten. Um den Vergleich mit dem für den schwarzen Körper erhaltenen Wert vornehmen zu können, ist noch eine Erhöhung der gemessenen HK_0-Zahl um 9 Proz. infolge des Verlustes durch Reflexion an der Glasglocke der Lampe anzubringen, außerdem die Fadenoberfläche zu bestimmen, um die Lichtstärke pro Flächeneinheit zu ermitteln.

Bei 1735° abs., d. h. $0{,}0394\,\frac{HK_0}{Watt}$ hat der schwarze Körper gemäß Tab. 8 eine mittlere sphärische Lichtstärke von

$$1{,}928\,\frac{KH_0}{cm^2},$$

die Messungen an einem sogenannten unpräparierten Faden ergaben

$$1{,}49\,\frac{HK_0}{cm^2}\,(red.),$$

die an einem präparierten Faden

$$1{,}01\,\frac{HK_0}{cm^2}\,(red.).$$

Demnach ergibt sich das Absorptionsvermögen der unpräparierten Kohle zu

$$A_0 = 0{,}773,$$

das der präparierten zu $A_1 = 0{,}524$.

---

1) E. P. Hyde, Cady, Worthing, Transactions III. Eng. Soc. 6. p. 238. 1911, im besondern auch nach einer im Druck befindlichen Dissertation von Hrn. cand. phil. F. Conrad.

Hieraus ergeben sich für die Konstante im Gesamtstrahlungsgesetze die Werte $\mu_0 = 1{,}084\ 10^{-12}$ g-Cal/cm² sec.grad⁴

$\mu_1 = 0{,}701$ „

Die Lummerschen direkten Messungen der Kohlekonstanten μ_1 für präparierte Kohle durch Vergleich mit einem (präparierten) Kohlekasten[1]) haben den Wert $\mu_1 = 0{,}725$ ergeben, welchem der Wert $A_1 = 0{,}548$ entspricht. Die Abweichungen von ca. 4 Proz. können natürlich aus der verschiedenen Art der Bestimmung hervorgehen; im besonderen kann der Wert der Fadenoberfläche, welcher bei der indirekten Methode direkt eingeht, nur auf ca. 2 Proz. genau ermittelt werden. Wahrscheinlich ist aber auch, daß die Strahlungseigenschaften der Präparierung zufolge von Lampe zu Lampe etwas verschieden sind.

Auf Grund der gleichen Betrachtungen können wir die Werte für die Konstanten der unpräparierten Kohle auch aus den von Lummer direkt für die präparierte Kohle gefundenen Werten ermitteln. Für beide Lampentypen wurden für verschiedene Glühzustände, d. h. $\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$-Werte die $\frac{\text{HK}_{\text{hor.}}}{\text{cm}^2}$ ermittelt. Das hiernach berechnete Helligkeitsverhältnis H_0/H_1 beider Fäden bei gleicher $\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$-Zahl ist in der vierten Vertikalreihe der Tab. 8 eingetragen, im übrigen auch aus Fig. 1 zu entnehmen.

Tabelle 8.

Watt pro $\text{HK}_{\text{hor.}}$	$\frac{\text{HK}_0\,\text{hor.}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\text{HK}_0\,\text{hor.}}{\text{cm}^2}$	$\frac{H_0}{H_1}$
300	0,050	0,034	1,470
200	0,084	0,058	1,458
100	0,220	0,150	1,467
80	0,290	0,200	1,450
60	0,423	0,285	1,484
40	0,755	0,510	1,480
30	1,13	0,770	1,467
25	1,45	0,990	1,465
20	1,92	1,31	1,466
15	2,90	1,99	1,457
10	5,30	3,60	1,472
7,5	7,98	5,58	1,451
5,0	14,55	10,00	1,455
4,0	20,30	14,00	1,450
3,0	32,30	22,00	1,455
			Mittel: 1,463

1) O. Lummer, l. c. p. 330.

Das Verhältnis H_0/H_1 ist in einem weiten Intervall (Temperaturgebiet) konstant, woraus folgt, daß wenn eine Änderung des Absorptionsvermögens oder auch der Umsetzung der zugeführten in ausgestrahlte Watts mit der Temperatur vorliegen sollte, diese Änderung jedenfalls für beide Fadentypen die gleiche ist.

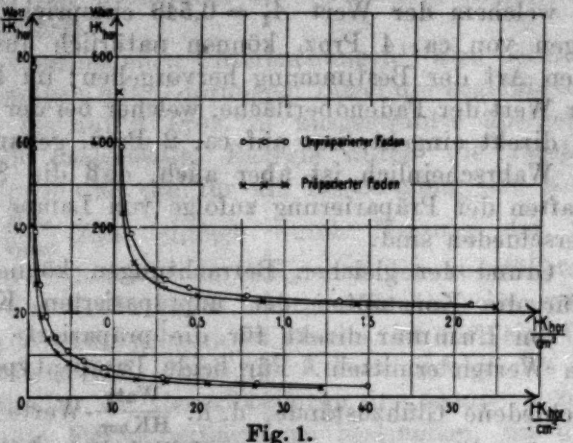


Fig. 1.

Aus dem Mittelwerte $H_0/H_1 = 1.463$ und den Konstanten für die präparierte Kohle nach Lummer ergeben sich für die unpräparierte Kohle die Werte $A_0 = 0{,}793$;

$$\mu_0 = 1{,}060 \cdot 10^{-12} \frac{\text{g} - \text{Cal}}{\text{cm}^2 \,\text{sec} \cdot \text{grad}^4}.$$

In Tab. 9 werden die verschiedenen Werte der Konstanten noch einmal zusammengestellt.[1])

Tabelle 9.

	A_1	A_0	$\frac{\mu_1 \cdot 10^{12}}{\text{g} - \text{Cal}}$ $\text{cm}^2.\text{sec}.\text{grad}^4$	$\frac{\mu_0 \cdot 10^{12}}{\text{g} - \text{Cal}}$ $\text{cm}^2.\text{sec}.\text{grad}^4$
Direkte Messung	0,548		0,725	
durch Beziehung auf die präparierte Kohle . .		0,793		1,060
durch Beziehung auf den schwarzen Körper . .	0,524	0,773	0,700	1,034

1) Diese Werte stehen in Einklang mit den von H. Senftleben und E. Benedict in einer im Druck befindlichen Arbeit erhaltenen Resultaten (Ann. d. Phys. 1917).

Aus den Watts, welche bei den in der Tab. 8 zugrundeliegenden Messungen den Lampen zugeführt wurden, sind nach der von Lummer angegebenen Methode[1]) unter Benutzung der mit Beziehung auf den schwarzen Körper gefundenen Konstanten μ_0 und μ_1 die zugehörigen Fadentemperaturen berechnet worden. Die Resultate sind in den Tabb. 10 und 11 vermerkt.

Tabelle 10.

Präparierter Kohlefaden

$\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$	Absol. Temperatur
517,6	1307°
233,4	1399
117,3	1474
64,94	1546
57,82	1562
40,74	1617
26,87	1680
18,92	1741
13,74	1801
10,40	1862
8,16	1918
6,44	1971
5,23	2023
4,25	2071
3,69	2124
3,09	2172
2,67	2220
2,27	2270

Tabelle 11.

Unpräparierter Kohlefaden

$\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$	Absol. Temperatur
909,1	1250°
387,3	1357
184,4	1430
98,37	1500
77,48	1526
58,47	1566
38,96	1628
26,46	1687
19,01	1743
14,18	1798
10,90	1850
8,68	1901
6,98	1947
4,73	2040
3,31	2128
2,64	2215

Die $\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$-Werte als Funktion der Temperatur sind in Fig. 2 dargestellt. Wie es die zugrundegelegten Betrachtungen verlangen, ergibt sich für beide Fadentypen innerhalb der Fehlergrenzen eine einheitliche $\frac{\text{Watt}}{\text{HK}_{\text{hor.}}}$-Temperaturkurve.[2])

1) O. Lummer, l. c. p. 330.

2) Diese Kurve stimmt mit der in der Lummerschen Broschüre (l. c. p. 330) gegebenen gut überein, obwohl jene auf Grund des Wertes $\mu_1 = 0{,}725$, diese mit $\mu_1 = 0{,}701$ gewonnen ist; es scheint also in der Tat zwischen der Präparierung der beiden Fäden (vgl. die Bemerkung p. 333) ein kleiner Unterschied bestanden zu haben. Sehr stark weichen beide Kurven von einer von Lummer und Kohn (Sitzungsber. d. Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Kultur 1915) gegebenen ab, worauf ich zuerst

Zusammenfassung: Die Lichtstärke des schwarzen Körper in $\frac{HK_0}{cm^2}$ wird bei verschiedenen Temperaturen gemessen, wobei die Temperaturwerte in den verschiedenen strahlungstheoretischen Temperaturskalen angegeben werden. Aus der

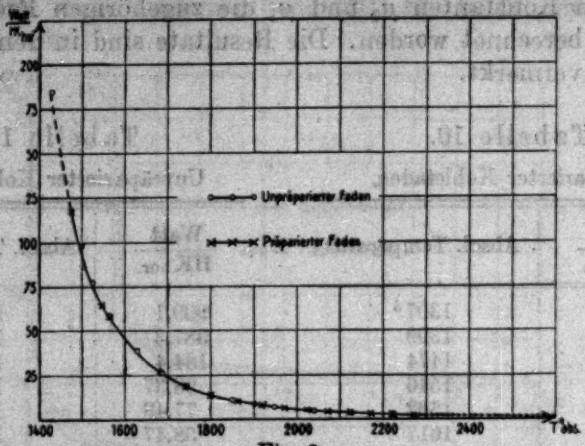


Fig. 2.

Beziehung zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur wird hiernach die Lichtstärke bei 2000° abs. extrapoliert. Auf Grund dieses Wertes wird, als Bezugswert, die $\frac{HK_0}{Watt}$-Zahl des schwarzen Körpers bei 2000° abs. berechnet, wobei Tabellen für die in den verschiedenen Temperaturskalen zusammengehörigen Werte der Strahlungskonstanten gegeben werden. Schließlich werden unter Benutzung der gemessenen Lichtstärke und Ökonomie des schwarzen Körpers die Strahlungskonstanten der Glühlampenkohle ermittelt.

Zu der vorliegenden Arbeit wurde ich angeregt bei meiner Teilnahme an Untersuchungen, die für die demnächst erscheinende Neubearbeitung der „Ziele der Leuchttechnik“ von O. Lummer erforderlich waren.

Breslau, Physikal. Institut der Universität, Juli 1917.

durch Hrn. Dr. A. R. Meyer, Berlin, in dankenswerter Weise brieflich aufmerksam gemacht wurde. Jene Kurve ist an unpräparierter Kohle gewonnen, für welche seinerzeit unrichtiger Weise die Konstante der präparierten Kohle benutzt wurde.

(Eingegangen 10. August 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 13.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Untersuchungen über die Absorption harter Röntgenstrahlen in Gasen;* *von Minna Lang.*

(Fortsetzung.)

Vierter Teil.

Beobachtungen über die dissymmetrische Strahlungsverteilung eines modernen technischen Röntgenrohres mit Platinantikathode.

§ 1. Die historische Entwicklung der Frage nach der Strahlungsverteilung in Abhängigkeit von dem Emissionswinkel.

Schon in den ersten Jahren der Entdeckung der Röntgenstrahlen war die Frage aufgetaucht: Wie sind Intensität und Härte der Strahlung nach verschiedenen Richtungen verteilt? Röntgen[1]) hat als erster diese Frage experimentell untersucht mittels einer photographischen Methode. Den Strahlen wurden Films exponiert, die um die Platinantikathode als Mittelpunkt außerhalb des Rohres zu einem Halbkreis gebogen waren. Röntgen glaubte beobachten zu können, daß die Strahlung bis fast an den Horizont der Antikathodenplatte gleichmäßig verteilt war. Auch Walter[2]) kam zu dem gleichen Ergebnis, daß keine eigentliche Dissymmetrie der Strahlung vorliegt. Eine verschiedene Verteilung der Intensität in den verschiedenen Emissionsrichtungen, wie sie Kienböck[3]) glaubte beobachtet zu haben, suchte er zu erklären, einmal durch die Schwierigkeit, die Antikathodenebene scharf zu zentrieren und zweitens durch die verschieden starke Absorption, welche die Strahlen beim Durchgang durch die Glaskugel von veränderlicher Dicke erfuhren. Stark[4]) gelang es als erstem, experimentell eine deutliche Abhängigkeit der Strahlung von der Emissionsrichtung aufzufinden. Die photographische Registrierung erfolgte im Röhreninnern selbst, um

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **64**. p. 21. 1898.

2) B. Walter, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen **11**. p. 340. 1907.

3) R. Kienböck, Wiener klin. Rundschau **28**. p. 18. 1906.

4) J. Stark, Physik. Zeitschr. **10**. p. 580. 1909.

die schädliche Glasabsorption zu vermeiden. Als Antikathodenmaterial diente Holzkohle, weil hier die Fluoreszenzstrahlung erwartetermaßen wenig intensiv war im Verhältnis zur Impulsstrahlung. Die Emission nach der Vorderseite der Röhre erwies sich als schwächer und absorbierbarer als nach der Rückseite. Diese Beobachtung fand in demselben Jahre ihre theoretische Diskussion durch A. Sommerfeld.[1] Danach bestimmt sich die Intensität S der Strahlung als Funktion

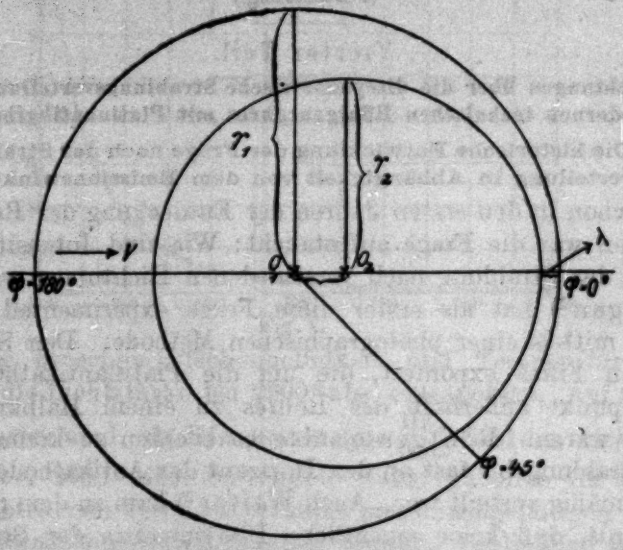


Fig. 7.

des Winkels φ, den die Richtung der Kathodenstrahlen mit der Richtung der Röntgenstrahlen bildet, und der Kathodenstrahlengeschwindigkeit β durch die Gleichung

$$S = \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi} \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^4} - 1 \right].$$

Maßgebend für die Problemstellung war die Wiechert-Stokessche Theorie der Impulsstrahlung. Fig. 7 erläutert den Vorgang.

Angenommen, das im Punkte O_1 ankommende Elektron von der Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ werde in der Zeit τ auf dem Wege $O_1 - O_2$ geradlinig auf $v = o$ gebremst. Dann herrscht nach einer gewissen Zeit t außerhalb der Kugel um

1) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 10. p. 969. 1909.

O_1 mit dem Radius $r_1 = ct$ das Feld der stationären Bewegung, innerhalb der Kugel um O_2 mit dem Radius $r_2 = c(t - \tau)$ das elektrostatische Feld des ruhenden Elektrons. Zwischen beiden Kugeln befindet sich die elektromagnetische Energie der Röntgenstrahlen von verschiedener Impulsbreite für verschiedene Emissionsrichtungen. Für das Azimut $\varphi > \pi/2$ ist die Impulsbreite größer als für das Azimut $\varphi < \pi/2$, wie Fig. 7 zeigt. Da nun das Maximum der Intensität jeweils auftritt für $\cos\varphi = \beta$, so sagt die Sommerfeldsche Gleichung aus, daß mit zunehmender Geschwindigkeit β der Kathodenstrahlen das Maximum der Intensität S sich nach abnehmendem Winkel verschiebt. Der experimentelle Beweis dieses theoretischen Ergebnisses für eine Röhre mit Pt-Antikathode gelang zuerst Friedrich.[1]) Die variable Dicke der Glaswand wurde durch passend zugeschaltete Glasplättchen kompensiert. Es zeigte sich eine geringe, aber deutlich erkennbare Abhängigkeit der Härte der X-Strahlen vom Azimut. Härte sowohl als Intensität der Strahlung nehmen zu mit abnehmendem Azimut. Bezüglich der Intensitäten unter 80° und 120° galt die Beziehung:

$$J_{80°}/J_{120°} > 1 .$$

Kirschbaum[2]) hat für Spannungen zwischen 15000 bis 50000 Volt für eine Kohle- und Platinantikathode die folgenden Intensitätsquotienten für die Azimute 80° und 120° erhalten:

C-Antikathode: $J_{80°}/J_{120°}$: 1,5 – 1,9,

Pt-Antikathode: $J_{80°}/J_{120°}$: 1,07 – 1,28.

Loebe[3]) hat schließlich mit ganz analogen Ergebnissen die Intensitäts- und Härteverteilung von Röntgenstrahlen untersucht, die von einer Graphitantikathode ausgehen.

§ 2. Beobachtung der Strahlungsverteilung durch die Standardmethode.

Die Standardmethode der Intensitätsmessung ist sehr geeignet zur Beobachtung der Strahlungsverteilung. Sie ist in keiner der vorgenannten Arbeiten verwendet worden, wo teilweise recht schwierige Methoden der Analyse dienten. Auf Grund der Standardmessung unter verschiedenen Azimuten offenbarte sich die Dissymmetrie in auffälliger Weise, wie ich

1) W. Friedrich, Ann. d. Phys. **39**. p. 394. 1912.
2) H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. **46**. p. 85. 1915.
3) W. Loebe, Ann. d. Phys. **44**. p. 1033. 1914.

denn auch zufällig auf sie geführt wurde. Fig. 8 illustriert die Beobachtungsweise.

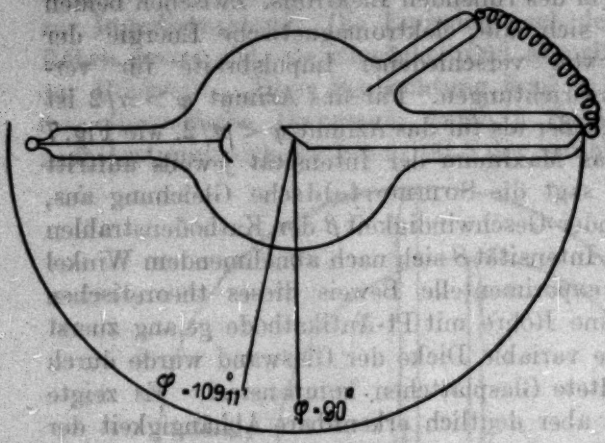


Fig. 8.

In dem Elektroskop hinter dem Versuchsrohr wurde die Strahlung in der Richtung normal zur Flugbahn der Elektronen gemessen, also unter einem Azimut

$$\varphi = 90^0,$$

in dem Elektroskope hinter dem Standardrohr unter einem Azimute $\varphi = 109^0\,11'$. Die Inkonstanz der Quotienten aus den Rückgängen deutete auf eine dissymmetrische Verteilung der Strahlungsintensität, welche eng mit der Röhrenspannung zusammenhing. So zeigte es sich zum Anfang jeder Messung, daß die ersten Quotienten c der Rückgänge in beiden Elektroskopen erst von einer mittleren Elektrodenspannung an konstant waren. Im anfänglichen weichen Röhrenzustande waren sie stets klein und nahmen dann rasch zu bis zu ihrem Normalwerte. Tab. 9 enthält das Beispiel einer solchen Meßreihe. (Vgl. auch Tab. 2, p. 298.)

Tabelle 9.

Rückgang in den beiden Elektroskopen		$J_{90^0}/J_{109^0\,11'}$
$\varphi = 90^0$	$\varphi = 109^0\,11'$	
195 Sek.	149,8 Sek.	1,30
121 „	73 „	1,65
96 „	55,5 „	1,73
82 „	46,8 „	1,75
70,8 „	39,5 „	1,75
62,4 „	36 „	1,73
57 „	32 „	1,78
48,5 „	27 „	1,79

Danach blieb von einem mittleren Härtegrade an die relative Strahlenverteilung über ein sehr weites Bereich konstant. Diese Beobachtung wird bestätigt durch die ganz analoge Erfahrung Kirschbaums[1]), daß für Elektrodenspannungen kleiner als 25000 Volt der Absorptionsindex nur wenig mit dem Azimut veränderlich ist und für größere Elektrodenspannungen ein Unterschied überhaupt nicht mehr mit Sicherheit festzustellen ist. Die für den weichen Röhrenzustand charakteristischen zu kleinen Quotienten sind im Einklang mit der dissymmetrischen Intensitätsverteilung folgendermaßen zu erklären: Bei einer weichen Röhre dominiert die gerichtete Bremsstrahlung über die ungerichtete Platinfluoreszenzstrahlung. In diesem Zustand ist die Intensität für das kleinere Azimut 90° größer als für das größere Azimut 109° 11′. Mit wachsender Röhrenspannung wird nun der Anteil an ungerichteter Röntgenstrahlung größer und verdeckt immer mehr die wenig intensive gerichtete Bremsstrahlung. Infolgedessen werden die Störungen der dissymmetrisch verteilten Strahlung immer schwächer, und die Intensitäten unter dem Winkel 109° 11′ nehmen rascher zu als unter dem Winkel 90°. Die Quotienten c aus den Rückgängen für die beiderlei Emissionsrichtungen werden also notwendig größer.

§ 3. Abhängigkeit der Strahlungsverteilung von der primären Belastung.

Es wurden Meßreihen aufgenommen, die zeigen sollten, wie die Strahlungsverteilung sich ändert, wenn die primäre Belastung und damit die Röhrenspannung sich ändern. Tab. 10 enthält die Versuchsergebnisse einer solchen Beobachtung. Es wurde die Stromstärke langsam gesteigert, während die Röhre brannte. Die Kolonnen I und II enthalten die unter verschiedenen Azimuten beobachteten Intensitäten ausgedrückt in Entladungszeiten, die V. Kolonne enthält die Quotienten $J_{90°}/J_{109°\,11'}$.

Trägt man die gemittelten Quotienten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem gegen die zugehörigen Belastungen ein, so stellt sich eine lineare Abhängigkeit heraus, wenigstens innerhalb des untersuchten Härtebereiches, wie

1) H. Kirschbaum, l. c.

Tabelle 10.

$J_{109°\,11'}$	$J_{90°}$	Sekundärer Strom	Primärer Strom		$J_{90°}/J_{109°\,11'}$	Mittelwert c
65,8 Sek.	31,5 Sek.	1,85 M.A.	2,20 A.		91,5 :65,8 = 1,395	
43,2 „	66,8 „	1,6 „	2,21 „	2,21	66,8 :43,2 = 1,546	1,517
35 „	53,8 „	1,5 „	2,22 „		53,8 :35 = 1,537	
19,7 Sek.	32,1 Sek.	2,0 M.A.	2,48 A.		32,1 :19,7 = 1,629	
19 „	31,55 „	1,95 „	2,49 „	2,485	31,55:19 = 1,657	1,627
16,3 „	26 „	1,85 „	2,48 „		26 :16,3 = 1,595	
11,2 Sek.	18,75 Sek.	2,3 M.A.	2,72 A.		18,75:11,2 = 1,674	
10,8 „	19,2 „	2,2 „	—	2,72	19,2 :10,8 = 1,777	1,725
10,5 „	18,1 „	2,15 „	2,72 „		18,1 :10,5 = 1,724	
8,8 Sek.	15,7 Sek.	2,3 M.A.	2,77 A.		15,7 : 8,8 = 1,784	
8,7 „	14,55 „	2,25 „	2,78 „	2,78	14,55: 8,7 = 1,672	1,735
8 „	14 „	—	2,78 „		14 : 8 = 1,750	
6 Sek.	11,75 Sek.	2,6 M.A.	2,94 A.			
6 „	10,55 „	—	—		10,675:6 = 1,779	1,792
6 „	10,8 „	—	—	2,93		
6 „	10,6 „	—	—			
5,8 „	10,7 „	—	2,92 „		10,7:5,8 = 1,845	

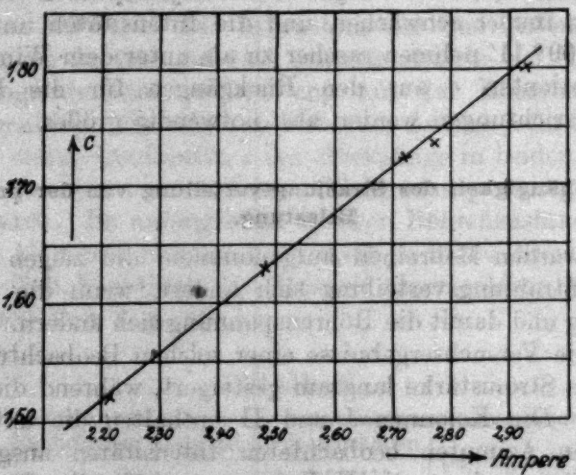


Fig. 9.

Fig. 9 zeigt. Mit steigender Stromstärke nehmen die Quotienten stetig zu. Sie werden um so mehr der Ausdruck einer symmetrisch verteilten Strahlung, je größer ihr Anteil an ungerichteter Fluoreszenzstrahlung und je schwächer ihr Anteil an gerichteter Bremsstrahlung wird. So ist es verständlich, daß ihre Änderung der Elektronengeschwindigkeit, also der primären Belastung direkt proportional ist.

§ 4. Der Härtecharakter der Bremsstrahlung.

Es wurden wieder in beiden Elektroskopen unter den verschiedenen Azimuten die Entladungszeiten über den gleichen Potentialabfall beobachtet und die Strahlung nacheinander durch verschiedene Filterdicken filtriert. Die primäre Belastung wurde konstant gehalten. War die Röhre zu hart geworden, so wurde während der Messung regeneriert. Besondere Beobachtungen ließen erkennen, daß ein Regenerieren der Röhre die Strahlungsverteilung nicht beeinflußte, daß diese nur insofern von der Regenerierung abhing, als mit ihr der Härtegrad der Röhre sich änderte. Um gute Relativwerte zu erzielen, wurde die Röhre immer bis zur gleichen Härte regeneriert, wofür die sekundäre Stromstärke das Kriterium gab. Lag eine dissymmetrische Strahlungsverteilung nach Härte und Intensität vor, so mußte sich bei variabler Filterschicht ein Gang der Quotienten $J_{90°}/J_{109°11'}$ zeigen. Tab. 11 bestätigt diese Erwartung:

Tabelle 11.

Entladungszeiten in Sek.		Sek. Strom	$J_{90°}/J_{109°11'}$	Mittelwert	Aluminiumfilterdicke in mm
$J_{109°11'}$	$J_{90°}$				
14	21,2	2,5 M.A.	1,514		
13	19,6	—	1,507		
12,8	20,1	—	1,570	1,563	0 mm
12,5	19,4	—	1,552		
12,2	19,8	—	1,623		
11,8	19,0	—	1,610		
18,3	36,8	2,5 M.A.	2,011		
18,2	36,4	—	2,000		
16,7	32,6	—	1,952	2,023	1 mm
16	33,4	—	2,087		
15,4	31,8	2,4 „	2,065		
21	43,2	2,5 M.A.	2,057		
19,2	39,8	—	2,073	2,057	2 mm
17,2	36,10	2,42 „	2,098		
30	57,7	2,48 M.A.	1,930		
24,8	54,9	—	2,213	2,131	3 mm
23	49,1	—	2,135		
21	47,2	2,35 „	2,247		
36,2	77,3	2,45 M.A.	2,135		
32	69,3	—	2,166	2,156	4 mm
29	62,85	2,25 „	2,167		

Tabelle 11. (Fortsetzung.)

Entladungszeiten in Sek. $J_{109°11'}$	Entladungszeiten in Sek. $J_{90°}$	Sek. Strom	$J_{90°}/J_{109°11'}$	Mittelwert	Aluminiumfilterdicke in mm
48,2	103	2,45 M.A.	2,137		
41,4	90,8	—	2,194	2,164	5 mm
39	84,3	2,20 „	2,162		
60,3	133	2,45 M.A.	2,205		
53,2	112	—	2,105	2,167	6 mm
47,9	105	2,20 „	2,192		

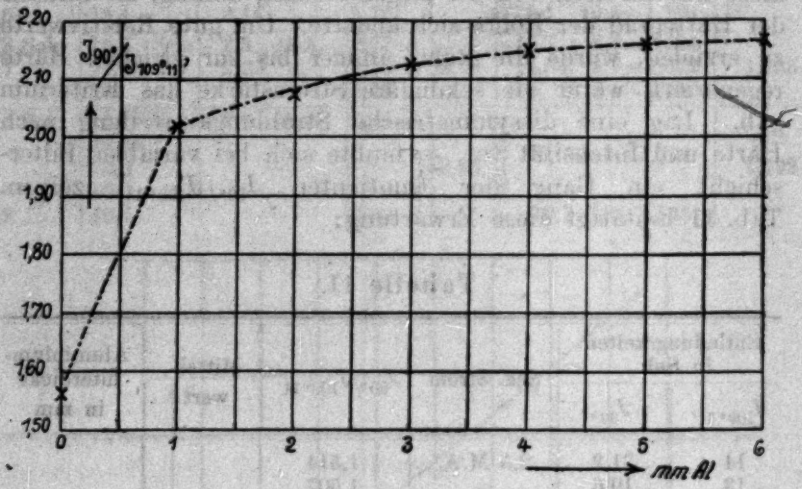


Fig. 10.

Die Zusammenstellung der Beobachtungen zeigt, daß mit wachsender Filterdicke die Quotienten $J_{90°}/J_{109°11'}$ stetig zunehmen. Durch die Aluminiumschicht wird die weiche, unsymmetrisch verteilte Bremsstrahlung in höherem Grade absorbiert wie die harte Fluoreszenzstrahlung. Dabei wird unter dem größeren Azimute quantitativ mehr Strahlung absorbiert wie unter dem kleineren Azimute, weil dort die Strahlung langwelliger ist. Infolgedessen nehmen die Intensitäten unter 90° langsamer zu als unter 109° 11', die Quotienten $J_{90°}/J_{109°11'}$, gemessen in Entladungszeiten, werden also größer. Trägt man nun die Quotienten gegen die Filterdicken auf, so erhält man die vorstehende Kurve (Fig. 10). Sie läßt erkennen, daß die unfiltrierte Strahlung sehr starke Dissym-

metrie aufweist gegenüber der filtrierten Strahlung. Aber schon 1 mm Al ist imstande, diese stark unsymmetrisch verteilte Strahlung zu absorbieren. Die Bremsstrahlung stellt demnach eine weiche, langwellige Komponente des Strahlungskomplexes dar. Von 1 mm Filterschicht ab ist nur noch ein schwacher Gang der Quotienten zu erkennen. Die Gleichmäßigkeit der Strahlungsverteilung ist also jetzt schon nahezu erreicht. Eine Absorptionsschicht von 1 mm Dicke reicht also aus, die Bremsstrahlung praktisch gänzlich von der Fluoreszenzstrahlung des Antikathodenmaterials zu trennen.

Fünfter Teil.

Über die Abhängigkeit der Strahlenhärte von der primären (sekundären) Belastung.

Bezüglich einer Abhängigkeit zwischen Härte und Stromstärke sind die Meinungen der Röntgenologen noch immer geteilt. Kröncke[1]) kommt in seiner „Messung der Intensität und Härte der Röntgenstrahlen" zu dem Urteil, daß die Härte der Röntgenstrahlen völlig unabhängig vom Strom ist. Demgegenüber beobachtet Dessauer[2]), daß „mit wachsender Stromdichte an der Kathode der Anteil an härteren X-Strahlen sich steigert". Kröncke's Definition ist insofern unzureichend, als mit der Änderung der Belastung sich auch stets der Verlauf der Spannung an der Röhre ändert. Klingelfuß[3]) hat die Frage experimentell dahin entschieden, daß tatsächlich eine Abhängigkeit zwischen Härte und Belastung besteht. Untersucht wurden 15 Röhren verschiedenen Härtegrades mit stets gleichem Ergebnis. Die Härtegrade wurden mittels eines der üblichen technischen Härtemesser bestimmt. Viel empfindlicher ist nun die Härtemessung auf iontometrischem Wege. So ließ sich die Abhängigkeit zwischen Härte und Belastung mittels der beschriebenen Apparatur leicht verfolgen. Die Methode war sehr fein, Schwankungen von Zehntel-, ja Hundertstel-Ampere im primären Stromkreise beeinflußten die Entladungszeiten. Es wurden Ionisationsmessungen ausgeführt,

1) H. Kröncke, Dissertation, Göttingen 1913.
2) F. Dessauer, Physik. Zeitschr. **15.** p. 729. 1914.
3) F. W. Klingelfuß, Verhandl. der deutschen Röntgen-Ges. **5.** p. 62. 1909.

während die Stromstärken langsam gesteigert wurden. In Tab. 12 sind die Ergebnisse einer solchen Beobachtungsreihe zusammengestellt. Die Entladungszeiten beziehen sich auf das Azimut $\varphi = 90^0$.

Tabelle 12.

Entladungszeiten	Sek. Strom	Prim. Strom
96 Sek.	2,0—1,9 M.A.	2,255 A.
56 „	2,1—2,05 „	2,360 „
50 „	2,05 M.A.	2,385 „
36 „	2,12 „	2,440 „
31 „	2,18 „	2,480 „
26,3 „	2,27 „	2,530 „
22,6 „	2,3 „	2,600 „
19 „	2,45 „	2,670 „
16,8 „	2,55 „	2,740 „
14,4 „	2,75 „	2,840 „
11,5 „	3,00 „	2,970 „

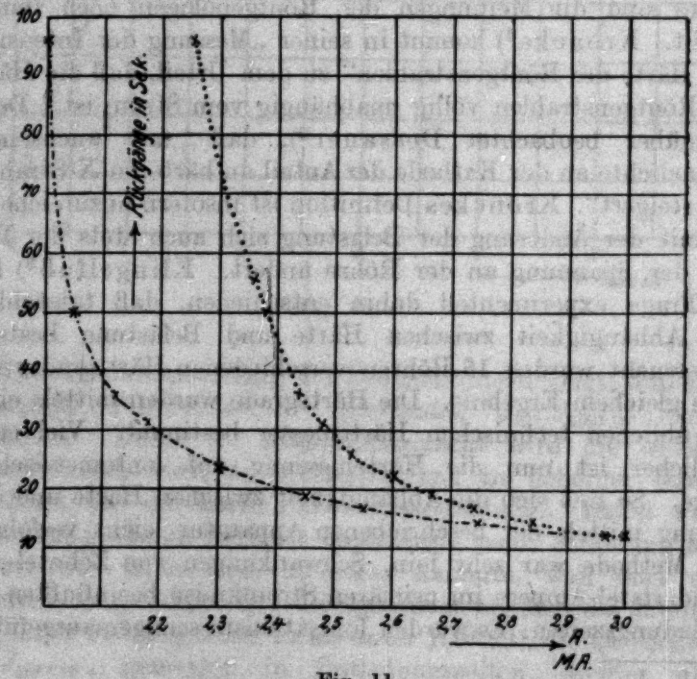


Fig. 11.

Die graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Härte und Belastung (Fig. 11) zeigt, daß die Härte nicht in

gerader Linie mit der Stromintensität wächst, sondern mit zunehmender Intensität hinter derselben zurückbleibt. Die Kurven von Klingelfuß zeigen einen analogen Verlauf.

Der graphische Zusammenhang zwischen sekundärer Belastung und Strahlenhärte zeigt im ganzen das gleiche Bild (untere Kurve). Das ist der Ausdruck dafür, daß die sekundäre Energie ziemlich angenähert proportional ist der primären Energie im Falle des benutzten Induktoriums, eine Beobachtung, die natürlich von Betrieb zu Betrieb veränderlich ist.

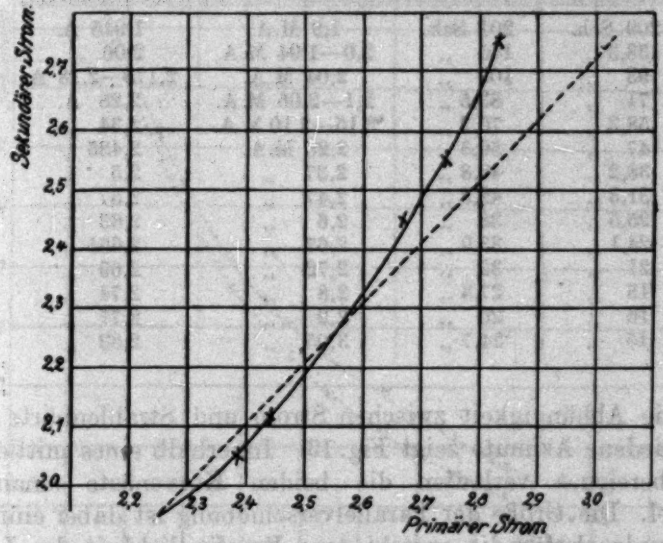


Fig. 12.

Natürlich war es ein Vorzug des Induktoriums, wenn möglichst viel der in den Primärstrom gesteckten Energie im Sekundärkreise zur Wirkung kam.

Der Wirkungsgrad des Induktoriums läßt sich noch besser beurteilen aus der graphischen Beziehung zwischen entsprechenden Stromintensitäten im primären und sekundären Stromkreise (Fig. 12). Die Abweichung der Kurve von der 45°-Geraden gibt direkt ein Maß der Energieverluste bei der Transformation. Danach stellt sich der Sekundärverlust für höhere Spannungen als größer heraus als für niedrigere Spannungen (wahrscheinlich zurückzuführen auf Nebenentladungen durch Sprühen der Zuführungsleitungen).

Nun wurde die analoge Messung angestellt, indem in beiden Elektroskopen gleichzeitig die Rückgänge über den gleichen Spannungsabfall bei veränderlichem Strome beobachtet wurden. Die Strahlung kam unfiltriert zur Wirkung. Die Ergebnisse sind in Tab. 18 vereinigt.

Tabelle 18.

Entladungszeiten		Sekund. Strom	Prim. Strom
$\varphi = 109^0\,11'$	$\varphi = 90^0$		
209 Sek.	201 Sek.	1,9 M.A.	1,945 A.
138,3 „	145 „	2,0—1,94 M.A.	2,06 „
93 „	103 „	2,04 M.A.	2,175—2,18 A.
71 „	83,5 „	2,1—2,06 M.A.	2,28 A.
58,3 „	70,2 „	2,15—2,10 M.A.	2,34 „
47 „	59,5 „	2,25 M.A.	2,435 „
38,2 „	49,8 „	2,37 „	2,5 „
31,3 „	42,8 „	2,47 „	2,57 „
25,5 „	38 „	2,6 „	2,63 „
24,1 „	33,9 „	2,67 „	2,655 „
21 „	32 „	2,72 „	2,69 „
18 „	27,8 „	2,8 „	2,74 „
16 „	26 „	2,9 „	2,77 „
15 „	24,7 „	3,05 „	2,83 „

Die Abhängigkeit zwischen Strom und Strahlenhärte für verschiedene Azimute zeigt Fig. 13. Innerhalb eines mittleren Härtebereiches verlaufen die beiden Kurvenäste einander parallel. Die Größe der Parallelverschiebung ist dabei einfach der Ausdruck für die verschiedene Empfindlichkeit der Leitfähigkeitssysteme. In diesem mittleren Härtebereich verlaufen die Kurven stetig, während sie im weichen Röhrenzustande einen leisen Knick aufweisen. Diese Erscheinung beruht wieder auf der Wirkung der Impulsstrahlung. Ihr zufolge ist die Intensität und Härte unter dem kleineren Azimute größer, so daß die höhere Empfindlichkeit des Elektroskops E_{II} in dem weichen Zustande nicht nur scheinbar vermindert wird, sondern sogar kleiner wird als die des Elektroskops E_I. Charakteristisch ist weiter beiden Kurven, welche den funktionellen Zusammenhang zwischen Stromintensität und Härte graphisch darstellen, das flache Ausklingen. Die Röhre strebt offenbar einem Grenzwert der Strahlungshärte zu, der nun weiter nicht mehr abhängig ist von der Belastung. In diesem

Zustand müßte der Strahlencharakter konstant bleiben. Es gibt demnach für die Röhre gewissermaßen eine *Normalbelastung*, die eine Art Gleichgewichtszustand bedingt. Geht man von der Voraussetzung aus, daß im gewöhnlichen Röntgenrohre die Elektronen und Ionen auf dem Wege der Stoßionisation erzeugt werden, so muß man annehmen, daß im Falle

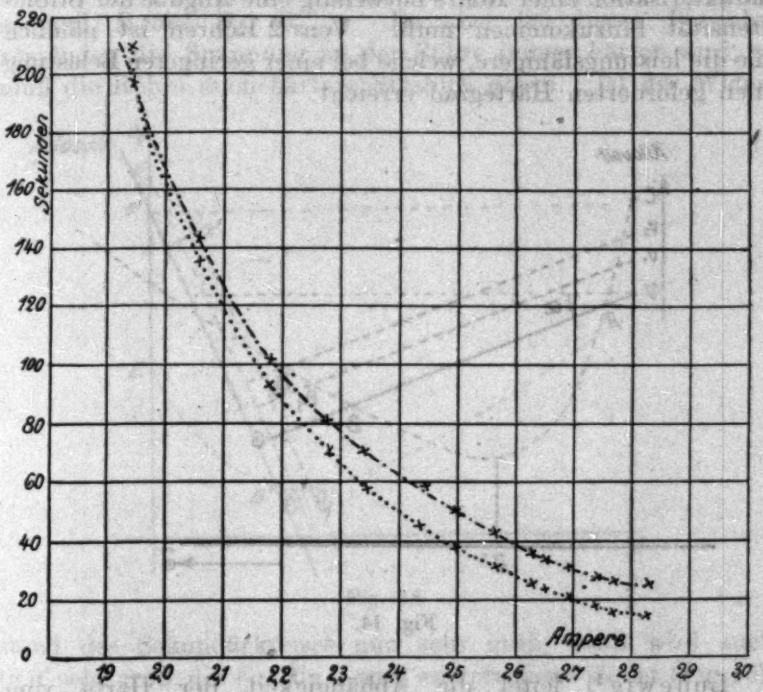


Fig. 13.

der Röhrenkonstanz gleich viel Ionen und Elektronen durch Stoß erzeugt werden, als neutrale Molekeln durch Molisierung gewonnen werden. Wenn aber Ionenstoß und Molisierung gleichmäßig wechselweise erfolgen, dann ist die freie Weglänge der Ionen und Elektronen konstant. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß gerade diese freie Weglänge der Elektronen auf ihrer Flugbahn von der Kathode zur Anode mit ausschlaggebend ist für die Strahlenqualität. Äußerlich ist dieser Zustand der Normalbelastung an dem ruhigen Brennen der Röhre zu erkennen. Bei Unterbelastung flackert sie stets.

Das Röhreninnere bietet dann offenbar einen so hohen Widerstand, daß teilweise ein Ausgleich längs der Glaskugel erfolgt. Steigert man nun die Elektrodenspannung, dann erfolgt die Entladung durch das Röhreninnere leichter vermöge der erhöhten Energiezufuhr.

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, daß zur Härtecharakterisation einer Röhre notwendig eine Angabe der Stromintensität hinzukommen muß. Von 2 Röhren ist nämlich jene die leistungsfähigere, welche bei einer geringeren Belastung einen geforderten Härtegrad erreicht.

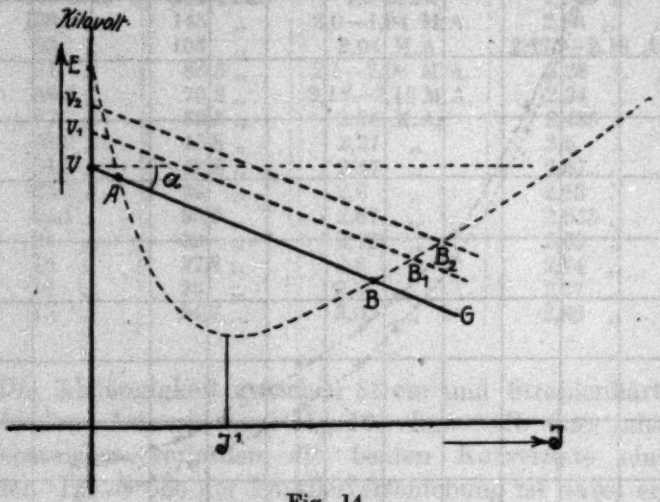


Fig. 14.

Ludewig[1]) leitet die Abhängigkeit der Härte vom Sekundärstrom aus der Charakteristik der Röntgenröhre ab. Diese Darstellungsweise des Betriebes einer Röntgenröhre wurde mit Erfolg von Kröncke[2]) eingeführt. Fig. 14 zeigt das Schema einer dynamischen Charakteristik einer Röntgenröhre.

Danach fällt die Charakteristik der Röhre bis zu einem gewissen Werte der sekundären Stromstärke J^1, um dann allmählich wieder zu steigen. E ist nach Kröncke die Zündspannung der Röhre. Man zieht im Abstande V der herr-

1) P. Ludewig, Physik. Zeitschr. 16. p. 445. 1915.
2) H. Kröncke, l. c.

schenden Röhrenspannung die Parallele zur X-Achse und die Gerade G so, daß $\operatorname{tg} \alpha = R$ der Widerstand im Sekundärstromkreise ist. Dann ist nur im Punkte B ein stabiler Betriebszustand möglich, wie Kaufmann[1]) in seiner Lehre von den Charakteristiken bewiesen hat. Erhöht sich infolge der gesteigerten primären Belastung die Spannung auf V_1, V_2 ..., dann rückt bei gleichbleibendem Widerstand der Betriebszustand B auf B_1, B_2 ... Da aber bei diesen Betriebszuständen die Spannung an der Röhre immer härter wird, so muß die Röhre auch härtere Strahlen geben. Ist der Wider-

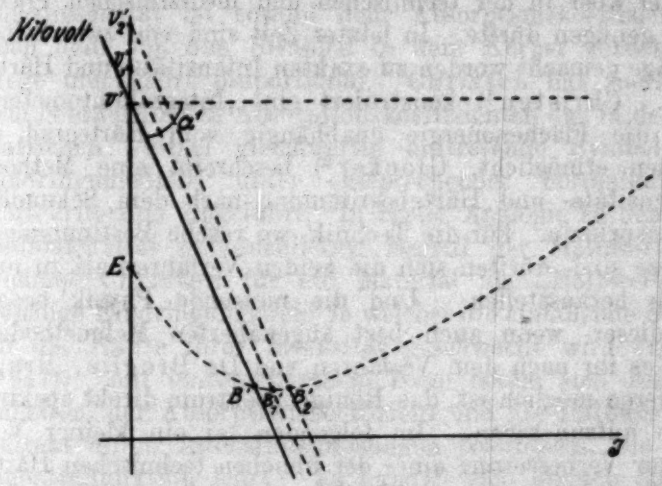


Fig. 15.

stand des Sekundärkreises nun sehr groß, dann wird auch $\operatorname{tg} \alpha'$ sehr groß, die Gerade G wird entsprechend steiler (Fig. 15). Es kann dann der Fall eintreten, daß den Röhrenspannungen V', V_1', V_2' ... solche Betriebszustände B', B_1', B_2' ... entsprechen, für welche die Spannungen und damit die Härte der Röhre praktisch ungeändert bleibt.

Anhang.

I. Über ein Röntgenqualimeter.

In der neueren Literatur der Röntgentechnik wird immer wieder auf die zahlreichen Mängel der technischen Härtemesser hingewiesen. Die Ausstellungen beziehen sich in der Hauptsache auf Eigenfehler der Apparate. Als solche sind

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. 2. p. 158. 1900.

anzuführen die selektive Absorption des Silbers, welches in der Regel als Normal der Absorptionsmessung benutzt wird, und die Beobachtungsfehler, die sowohl der subjektiven Härtebestimmung aus der Leuchterregung eines Fluoreszenzschirmes, als auch der photographischen Fixierung entstammen. Der Hauptnachteil sämtlicher Härtemeßverfahren dürfte aber darin begründet sein, daß alle Methoden nur eine *durchschnittliche* Härte bestimmen, die nicht einmal genau der quantitativen Zusammensetzung der komplexen Strahlung entspricht. Infolgedessen besitzen die üblichen Härtemesser nur orientierenden Wert, der aber in der technischen und medizinischen Praxis zumeist genügen dürfte. In letzter Zeit sind von zwei Seiten Vorschläge gemacht worden zu exakten Intensitäts- und Härtemessern. Christen[1]) konstruiert ein „Integraliontometer", welches die Flächenenergie unabhängig vom Härtegrad zu bestimmen ermöglicht, Glocker[2]) beschreibt eine Methode zur Intensitäts- und Härtebestimmung nach dem Sekundärstrahlungsprinzip. Für die Technik, wo rasche Bestimmungen am Platze sind, dürften sich die beiden Verfahren als zu umständlich herausstellen. Und die messende Physik bedarf keiner dieser, wenn auch best angenäherten Meßmethoden, seitdem es ihr nach dem Verfahren von De Broglie, Bragg und anderen möglich ist, das Röntgenspektrum direkt spektroskopisch aufzunehmen. Im folgenden sei ein kleiner Vorschlag zur Verbesserung eines der üblichen technischen Härtemesser für die Praxis gemacht. Bei etwa in Frage kommenden Verbesserungen handelt es sich zunächst darum, den überlieferten Qualimetern gewisse Eigenfehler zu nehmen. Dieser Forderung scheint der nun zu beschreibende Meßapparat einigermaßen zu entsprechen. Benutzt wird die ionisierende Wirkung der Strahlen, welche die besten qualitativen und quantitativen Messungen liefert. Die Meßmethode selbst beruht auf der Erfahrung, daß die durch X-Strahlen hervorgerufene Ionisation der absorbierten Strahlung proportional ist und somit direkt ein Maß für die auffallende Intensität gibt. Zwischen Intensität und Härte der Strahlung besteht aber ein funktioneller Zusammenhang, welcher seinen Ausdruck

1) Th. Christen, Physik. Zeitschr. **16**. p. 362. 1915.

2) R. Glocker, Fortschr. auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen **24**. p. 21. 1916.

findet in der Absorption nach der e-Funktion

$$J_x = J_0 \cdot e^{-\mu x}.$$

Die Gleichung besagt, daß die Strahlungsintensität in der Tiefe x, J_x, proportional ist der auffallenden Intensität oder der Intensität in der Tiefe Null, J_0, und einem Faktor $e^{-\mu x}$, wo x die Länge des Strahlenweges darstellt, gemessen in Zentimetern, und μ eine Materialkonstante ist, der mittlere Absorptionskoeffizient. Die Exponenten μ und x können beide als Härtekriterien dienen, denn die jeweilig gemessene Strahlungsintensität ist sowohl dem Absorptionskoeffizienten als auch dem von den Strahlen in dem Körper zurückgelegten Wege umgekehrt proportional. Christen hat zuerst neben dem gebräuchlichen Absorptionskoeffizienten das in der mathematischen Formel gleichwertig auftretende Symbol x, die Eindringungstiefe, unter entsprechender Formulierung als Härtekriterium eingeführt. In bester Analogie zu dem in der Radioaktivität gebräuchlichen Begriff der Halbwertzeit bezeichnet Christen für ein Material als „Halbwertschicht" diejenige Eindringungstiefe, in welcher die einfallende Strahlung auf die Hälfte ihrer Intensität geschwächt wird (vgl. oben p. 317). Auf iontometrischem Wege lassen sich beide Meßeinheiten, der Absorptionskoeffizient und die Halbwertschicht, indirekt durch Intensitätsmessungen bestimmen, wie die Exponentialfunktion lehrt. Es handelt sich einfach darum, in einem Prüfkörper den Absorptionskoeffizienten oder die Halbwertschicht der Strahlung festzustellen. Von jeher wird Aluminium als geeignetstes Normal der Absorption benutzt. Der Meßapparat selbst ist einfach. Man benutzt ein Elektroskop mit Bleigehäuse, um durch ein enges Diaphragma in der Stirnwand ein schmales Strahlenbündel auf das Leitfähigkeitssystem wirken zu lassen. Vor dieser Öffnung verschiebt man eine Aluminiumtreppe, die entsprechend fein abgestuft ist. Nun ist es leicht, die beobachteten Rückgänge in Halbwertschichten von Aluminium auszudrücken. Angenommen, man beobachtet bei unfiltriertem Strahlengange einen Rückgang des Blättchens in a-Sekunden, dann schiebt man die Aluminiumtreppe vor und vergrößert die dazwischen geschaltete Absorptionsschicht so lange, bis der Rückgang in 2 a-Sekunden erfolgt. Dann gehört zum Rückgange von

a-Sekunden eine Halbwertschicht von so und so viel Millimeter Aluminium. Ermittelt man auf diese Weise eine Reihe von Halbwertschichten zu entsprechenden Rückgängen und trägt die Halbwertschichten etwa als Abszissen, die Rückgänge als Ordinaten auf, dann hat man zu seinem Elektroskope eine zuverlässige *Härteeichkurve* aufgenommen. Man braucht nur zu jedem beobachteten Rückgang den betreffenden Abszissenwert aufzusuchen und ermittelt so die Halbwertschicht der betreffenden Strahlung. Statt die Härte in den alten willkürlichen Graden nach Benoist und Wehnelt anzugeben, bestimmt man sie in Halbwertschichten in Aluminium. Willkürlich bleibt allein der Abstand zwischen Röhre und Elektroskop, über den man sich ein für allemal einigen müßte. Die Dimensionen des Elektroskops, seine Empfindlichkeit, Größe der Blende usw. kommen in der Gestalt der Eichkurve wohl zum Ausdruck, für die Ablesung selbst aber sind sie gleichgültig und können deshalb beliebig gewählt werden. Es ist zweckmäßiger, die Härte einer Strahlung in Halbwertschichten anzugeben anstatt durch den Absorptionskoeffizienten, weil sich einer Strahlung keineswegs immer ein wahrer Absorptionskoeffizient, wohl aber immer eine Halbwertschicht zuschreiben läßt.

II. Die verschiedenen Ursprungsmöglichkeiten des komplexen Röntgenlichtes.

Treffen die Elektronen auf ihrer Flugbahn von der Kathode zur Anode in bestimmter Weise mit den Atomen der Antikathode zusammen, so entsteht eine erzwungene Ausstrahlung, die Brems- oder Impulsstrahlung Sie besitzt ein kontinuierliches Spektrum, welches nach Sommerfeld[1]) die Fouriersche Zerlegung der Impulsstrahlung darstellt. Bewirken dagegen die aufprallenden Korpuskeln die Ausstoßung korrespondierender Elektronen in verschiedenen Atomen, so entsteht die Emission eines langen Wellenzuges mit den Spektrallinien der K- oder L-Serie. Diese charakteristische Strahlung des Antikathodenmaterials ist nahezu homogen. Die gegenseitige Intensitätsverteilung zwischen Bremsstrahlung und Fluoreszenzstrahlung richtet sich nach der Röhrenspannung. Nun ist die spektrale Zusammensetzung des Röntgenlichtes aber mehr-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **46**. p. 721. 1915.

deutiger, als sich aus diesen einfachen theoretischen Betrachtungen folgern läßt. Man muß deshalb nach weiteren Ursächlichkeiten suchen, um die Heterogenität der Strahlung genügend zu erklären. Da haben zunächst neuere Beobachtungen der letzten Jahre gezeigt, daß das Spektrum des Röntgenlichtes in viel höherem Maße von dem sekundären Spannungs*verlaufe* als von der eigentlichen Röhren*spannung* abhängt. Dessauer[1]) beobachtete, daß der hochgespannte Strom sich in Gestalt von *Partial*entladungen variabler Spannung durch die Röhre entlädt. Es gelang demselben Verfasser, auf photographischem Wege deutliche Unterschiede in der Härte dieser Partialentladungen festzustellen. — Wehnelt[2]), der mittels einer Braunschen Röhre den Spannungsverlauf an Röntgenröhren aufnahm, zeigte, daß bei einer weichen Röhre weniger Partialentladungen während einer Phase durch das Rohr gehen als bei harten Röhren. Damit stimmt die Erfahrung überein, daß man aus einem harten Rohre eine weniger komplexe Strahlung erhält wie aus einem weichen Rohre. Déguisne[3]) erhielt die analogen stoßartigen Entladungen mit dem Oszillographen. Sie waren auch hier am deutlichsten ausgeprägt für harte Röhren und längere Funkenstrecken. Weiter sind von wahrscheinlichem Einfluß auf die spektrale Zusammensetzung des Röntgenlichtes die verschiedenen Einwirkungen und Ablenkungen, die der Kathodenstrahl auf seiner Bahn erfährt. Indem die Gesamtheit der Elektronen in einem kegelförmig auslaufenden Bündel von der hohlspiegelförmigen Kathode ausgeht, unterliegen die einzelnen Korpuskeln der gegenseitigen Kraft der statischen Abstoßung. Diese ist am stärksten für die randläufigen Elektronen des Kegelmantels — sie ist allein Null für die in der Kegelachse fliegenden Korpuskeln. Infolgedessen erfahren die äußeren Elektronen Geschwindigkeitsverluste und verursachen eine langwelligere Impulsstrahlung als die axial verlaufenden, deren lebendige Kraft voll erhalten ist. Ferner hängt der Härtecharakter der Bremsstrahlung von der Länge des Bremsweges ab. Oberflächliche, durch einmaligen Atomprozeß vollzogene Elektronenbremsung verursacht eine härtere Strahlung, als wenn die Korpuskeln

1) F. Dessauer, Physik. Zeitschr. 13. p. 1101. 1912; 14. p. 246. 1913.
2) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 47. p. 1112. 1915.
3) C. Déguisne, Physik. Zeitschr. 17. p. 106. 1016.

erst nach mehr oder minder langem Zickzackweg zwischen den Atomen der Antikathode zur Ruhe kommen. Dazu kommen höchstwahrscheinlich oszillatorische Potentialschwankungen des Sekundärkreises. Die primäre Stromleitung des Induktors stellt nämlich ein schwingungsfähiges System dar, denn sie besitzt Selbstinduktion (die primäre Wickelung) und Kapazität (den Kondensator). Mit dem Primärstrom ist der Sekundärstrom induktiv gekoppelt. Je nachdem nun die primäre Stromunterbrechung erfolgt, wird ein mehr oder weniger stark gedämpfter Zug von Schwingungen den Hochspannungsstrom überlagern und kann unter Umständen zu recht erheblichen Spannungsschwankungen Veranlassung geben. Schließlich ist je mit einer elektromagnetischen Strahlung zu rechnen, die durch die primären Röntgenstrahlen selbst sowohl als durch die sekundär ausgestoßenen Elektronen verursacht wird. Demnach ist die Heterogenität der Gesamtstrahlung durch die folgenden ursächlichen Vorgänge bedingt:

I. Die Impulsstrahlung in Abhängigkeit von der herrschenden Spannung;
II. die Entstehung von Partialentladungen;
III. die statische Ablenkung des Kathodenstrahles auf seiner Bahn;
IV. die verschiedene Länge des Bremsweges;
V. die Entstehung sekundärer Röntgenstrahlen durch sekundär ausgestoßene Elektronen;
VI. die Entstehung sekundärer Röntgenstrahlen durch die primären Wellenstrahlen.

III. Ein kleiner Beitrag zu den Hochfrequenzspektren der radioaktiven Substanzen.

Rutherford[1]) hat die Hypothese aufgestellt, daß die γ-Strahlen Fluoreszenzröntgenstrahlen seien, welche durch die β-Strahlen (auch α-Strahlen?) in den zerfallenden Atomen entwickelt werden. Zur Charakterisierung der γ-Strahlen steht bis jetzt nur ihre Absorption in Aluminium zur Verfügung. Wellenlängenbestimmungen durch Reflexion an Kristallflächen haben sich nur im Falle des RaC und RaB ausführen lassen. Immerhin dürfte das Absorptionsvermögen in Aluminium in

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 24. p. 453. 1912.

mehreren Fällen entscheiden lassen, ob eine γ-Strahlung zu dieser oder jener Serie gehört. Rutherford[1]) hat seinerzeit die Vermutung ausgesprochen, daß die Werte zwischen $\mu = 26$ und $\mu = 45$ der L-Serie und die sehr durchdringende Strahlung mit den Werten μ zwischen 0,115 und 0,198 der K-Serie angehören. Es wird im folgenden gezeigt werden, daß die hier ausgesprochene Gruppierung wohl für die L-, nicht aber für die K-Charakteristik gültig ist.

Zur Klassifikation der γ-Strahlen-Typen kann die folgende Gleichung dienen, welche eine sehr einfache Beziehung zwischen Frequenz und Absorption darstellt:

$\mu = k \cdot \lambda^{3/2}$, wo bedeuten
μ = Absorptionskoeffizient in Aluminium in cm^{-1},
λ = durchschnittliche Wellenlänge,
k = const. $= 31 \cdot 10^{20}$.

Diese Beziehung gilt für die charakteristischen X-Strahlungen von verschiedenen Ausstrahlern. Sie wurde neuerdings eingehend geprüft von W. H. Bragg und Pierce[2]), indem sie den Wert von μ für einzelne Spektrallinien von bestimmter Frequenz feststellten und fanden, daß die Beziehung sehr genau standhielt in dem von ihnen untersuchten Gebiete für Wellenlängen λ zwischen $0{,}49 \cdot 10^{-8}$ cm und $0{,}615 \cdot 10^{-8}$ cm.

Rutherford[3]) zeigte, daß die Gleichung auch gilt für die sehr viel kürzeren Wellenlängen der γ-Strahlen des RaC. Er berechnete z. B. zu dem Absorptionskoeffizienten $\mu = 0{,}115$ für RaC eine Wellenlänge $\lambda = 1{,}06 \cdot 10^{-9}$ cm, welche von Steinsalz unter einem Winkel von 1° 5′ reflektiert werden mußte. Der experimentell bestimmte Winkel betrug genau 1° 0′. Da infolge des Krieges das oben von Bragg zitierte Buch mir nicht zugängig war, wurde die Konstante $k = 31 \cdot 10^{20}$ aus der K_α-Linie des Silbers berechnet, für welche μ und λ bekannt sind.

Die Absorptionskoeffizienten der radioaktiven Substanzen in Aluminium sind in neuester Zeit durch eine Reihe sehr genauer Untersuchungen von Rutherford und seinen Schülern bestimmt worden. Die bezüglichen Ergebnisse sind in Tab. 14

1) E. Rutherford, Phil. Mag. **26**. p. 943. 1913.
2) W. H. Bragg u. Pierce, X rays & Crystal Structure, p. 180.
3) E. Rutherford, Phil. Mag. **30**. p. 339. 1915.

Tabelle 14.

Element	Atomgew.	Ordnungszahl	Abs.-Koeff. μ cm^{-1}	Literaturangabe
Jo	230	90	0,41 22,5 1080	Chadwick u. Russell, Proc. Roy. Soc. (A) 88. p. 217. 1913.
UX_1	234	90	24 0,70	Richardson, Phil. Mag. 27. p. 252. 1914.
UX_2	234	91	0,14	
Ra	226	88	351 (312)[1] 16,2 0,27	Chadwick u. Russell, Phil. Mag. 27. p. 112. 1914. [1]) Hahn u. Meitner, Phys. Zeitschr. 10. p. 741. 1909.
RaB	214	82	230 40 0,51	Phil. Mag. 25. p. 722. 1913.
RaC	214	83	0,115	
RaD	210	82	45 0,99	Phil. Mag. 26. p. 324. 1913.
$MsTh_2$	228	89	26 0,116	Rutherford u. Richardson
ThB	212	82	160 32 0,36	Phil. Mag. 26. p. 937. 1913.
ThD	208	81	0,096	
RdAc	(227)?	90	25 0,19	
AcB	(211)?	82	120 31 0,45	
AcD	207	81	0,198	
Po	210	84	580	Chadwick u. Russell, Phil. Mag. 27. p. 112. 1914.

zusammengestellt. Für diese experimentell ermittelten Absorptionskoeffizienten μ in Aluminium wurden auf Grund der Beziehung $\mu = k \cdot \lambda^{5/2}$ die durchschnittlichen Wellenlängen λ berechnet und in Tab. 15 eingetragen. In der 4. Kolonne sind daselbst die durchschnittlichen Wellenlängen der K-Serie angegeben, wie man sie durch Interpolation aus den Moseleyschen[1]) Hochfrequenzspektren erhält. Moseley zeigte nämlich, daß allgemein die Frequenz eines Elementes der K-Serie sehr

1) H. G. J. Moseley, Phil. Mag. 26. p. 1026. 1913; 27. p. 703. 1914

Tabelle 15.

Strahler	Abs.-Koeff. μ (cm^{-1})	$\lambda \cdot 10^8$ cm	K_α-Linie	L_α-Linie	M_α-Linie	Ordnungszahl
Jo	0,41 22,5 1080	0,1772 0,8797 4,138	0,149	0,957	4,139	90
UX_1	24 0,70	0,9027 0,2195	0,149	0,957	4,139	90
UX_2	0,14	0,1153	0,146	0,935	4,015	91
Ra	351 16,2 0,27	2,640 0,771 0,150	0,156	1,010	4,377	88
RaB	230 40 0,51	2,222 1,107 0,193	0,180	1,175	5,303	82
RaC	0,115	0,1066	0,176	1,157	5,117	83
RaD	45 0,99	1,161 0,2522	0,180	1,175	5,303	82
$MsTh_2$	26 0,116	0,9321 0,1070	0,153	0,980	4,251	89
ThB	160 32 0,36	1,928 1,013 0,168	0,180	1,175	5,303	82
ThD	0,096	0,099	0,185	1,209	5,479	81
RdAc	25 0,19	0,917 0,130	0,149	0,957	4,139	90
AcB	120 31 0,45	1,718 1,000 0,184	0,180	1,175	5,303	82
AcD	0,198	0,132	0,185	1,209	5,479	81
Po	580	3,227	0,172	1,109	4,960	84

nahe gegeben ist durch die Beziehung

$$\nu = \frac{3}{4}\nu_0 (N-1)^2, \text{ wo bedeuten}$$

ν = Frequenz des betreffenden Elementes,

ν_0 = Rydbergsche Fundamentalfrequenz,

N = Atomnummer des Elementes, wenn die des Aluminiums zu 13 angenommen wird. Es liegen neuerdings zwei Arbeiten von Siegbahn und Friman[1]) vor, welche eine sehr genaue Aufnahme der Hochfrequenzspektren (L-Reihe) der Elemente Tantal bis Uran enthalten. Die Verfasser zeigen,

1) M. Siegbahn u. E. Friman, Ann. d. Phys. 49. p. 611; Physik. Zeitschr. 17. p. 17. 1916.

daß auch für diese Spektren eine Moseleysche Gleichung gilt

$$\sqrt{\nu} = a(N - N_0),$$

wo a und N_0 Konstante sind. In Fig. 16 sind die Werte

$$\sqrt{1/\lambda} \cdot 10^{-4}$$

gegen die Ordnungszahlen N aufgetragen. Aus der sich ergebenden Geraden lassen sich die mittleren Werte λ für die nicht untersuchten Stoffe herleiten. Die Ergebnisse sind in der 5. Kolonne der Tab. 15 enthalten.

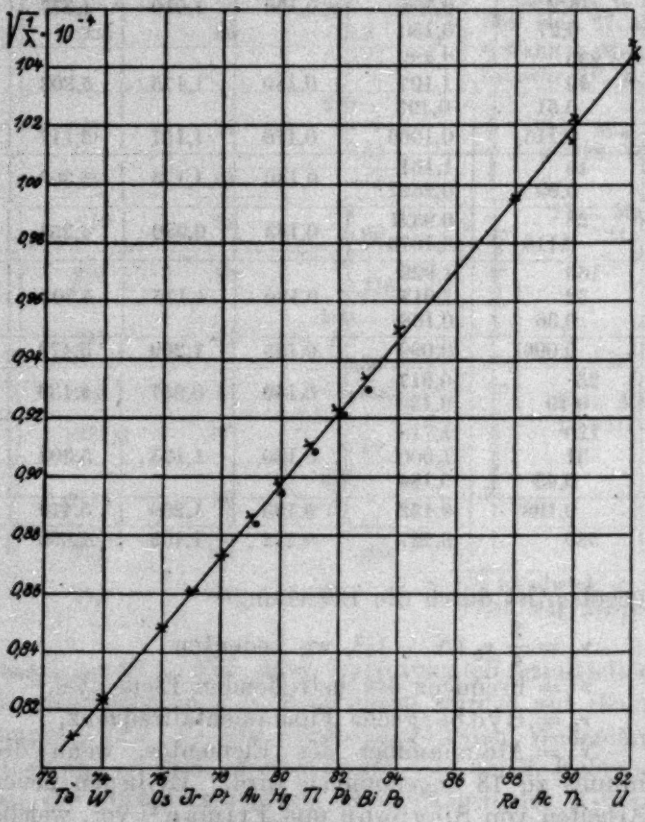


Fig. 16.
(Die Kreuze entsprechen der ersteren, die Punkte der letzteren Arbeit.)

Die große Genauigkeit der Siegbahnschen Aufnahmen geht daraus hervor, daß die Frequenzen der radioaktiven

Substanzen Po, Ra, Th, U (Kreuzchen oberhalb der Geraden), die einer anderen Arbeit[1]) entstammen, sich sehr gut auf der Geraden einreihen, welche für die Elemente Tantal bis Wismut gezeichnet wurde. In der 6. Kolonne sind schließlich die Durchschnittswellenlängen einer *M*-Serie eingetragen. Siegbahn[2]) ist es nämlich gelungen, eine weitere (*M*-) Reihe von

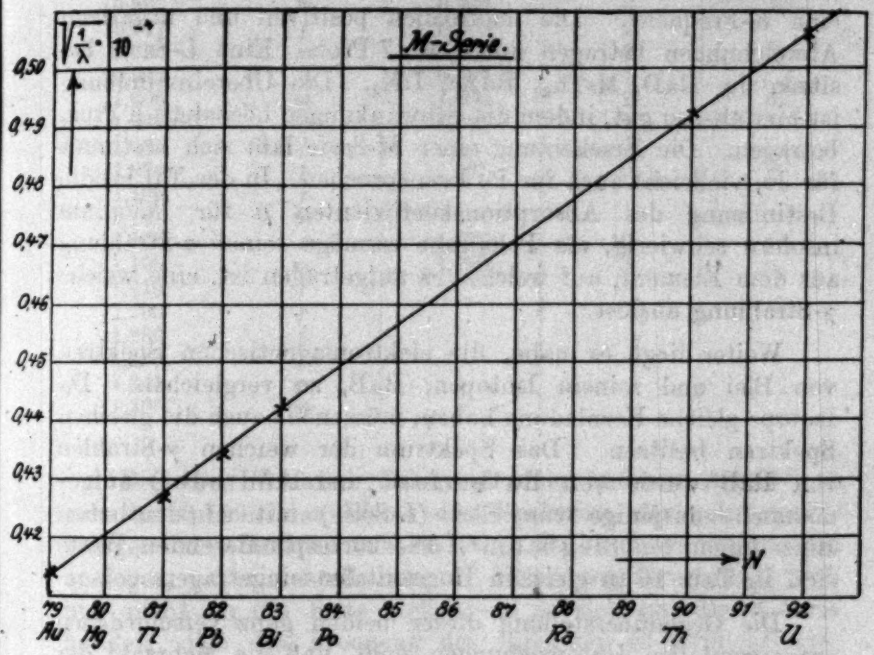


Fig. 17.

Hochfrequenzspektren aufzunehmen, zunächst nur für einige der schwersten Elemente. Wegen der großen Wellenlängen wurden die Spektrogramme in einem von dem Verfasser eigens gebauten Vakuumspektrographen erhalten. Auch hier erhält man eine streng lineare Beziehung zwischen $\sqrt{\nu} \cdot 10^{-4}$ und der Ordnungszahl für relativ weit im System auseinanderstehende Elemente Gold und Uran. Aus der graphischen Darstellung (Fig. 17) wurden für die in Frage kommenden radioaktiven Substanzen die Werte der M_α-Linien interpoliert.

1) M. Siegbahn u. E. Friman, Physik. Zeitschr. 17. p. 61. 1916.
2) M. Siegbahn, Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 18. p. 278. 1916.

Diskussion.

Vergleicht man die aus der Gleichung berechneten Werte λ mit den aus den experimentellen Daten abgeleiteten Impulsbreiten, so ergibt sich in mehreren Fällen gute Übereinstimmung. Ra, RaB, ThB, RdAc, AcB besitzen offenbar eine *K*-Frequenz. Die maximalen positiven und negativen Abweichungen betragen nur etwa 7 Proz. Eine *L*-Serie besitzen Jo, RaD, $MsTh_2$, RdAc, UX_1. Die Übereinstimmung ist hier ebenso gut, indem die Schwankungen höchstens 8 Proz. betragen. Die Erscheinung einer *M*-Serie läßt sich bestimmt für Jo, vielleicht auch für Po beanspruchen. In der Tat ist die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten μ für Polonium insofern schwierig, als Polonium vermöge seiner α-Strahlung aus dem Element, auf welches es aufgetragen ist, eine weiche γ-Strahlung auslöst.

Weiter liegt es nahe, die elektromagnetischen Spektren von Blei und seinem Isotopen, RaB, zu vergleichen. Da Isotope gleiche Kernladung haben, müssen sie auch die gleichen Spektren besitzen. Das Spektrum der weichen γ-Strahlen von RaB wurde von Rutherford und Andrade[1]) aufgenommen, dasjenige von Blei (*L*-Serie) mit 11 deutlichen Einzellinien von Siegbahn.[2]) Die korrespondierenden Werte sind in Tab. 16 in gleichen Horizontalen eingetragen.

Die Gegenüberstellung dieser beiden ganz verschiedenen experimentellen Untersuchungen zeigt, daß die Mehrzahl der Linien des Bleies sehr nahe koindiziert mit entsprechenden Linien von RaB und dies nicht nur zahlenmäßig, sondern auch in bezug auf die relative Intensität. Siegbahn bestimmte die relativen Intensitäten durch die Ziffern 0—10, Rutherford hat nur 3 Intensitätsstufen eingeführt, nämlich

f = schwach (faint),
m = mittelstark (medium),
s = stark (strong).

1) E. Rutherford und C. Andrade, Phil. Mag. 27. p. 834. 1914.
2) M. Siegbahn, l. c.

Tabelle 16.

RaB		Blei		Linie
$\lambda \cdot 10^8$ cm	Intensität	$\lambda \cdot 10^8$ cm	Intensität	
0,793	*m*	0,792	0	γ_4
0,809	*m*	0,816	1	γ_3
0,838	*m*	0,820	1	γ_2
0,853	*m*	0,842	3	γ_1
0,917	*f*	0,855	2	
0,953	*m*	0,968	2	β_3
0,982	*s*	0,983	9	β_1, β_2
1,006	*m*	1,008	2	β_4
1,029	*m*	1,023	2	
1,055	*f*			
1,074	*f*	1,091	0	η
1,100	*f*			
1,141	*m*			
1,175	*s*	1,175	10	α_1
1,196	*m*	1,186	3	α_2
1,219	*f*			
1,266	*f*			
1,286	*f*			
1,315	*f*			
1,349	*m*			
1,365	*m*			

Dieselben Verfasser haben in einer anderen Arbeit[1]) in ganz entsprechender Weise das Spektrum der sehr durchdringenden γ-Strahlen von RaB und RaC aufgenommen. Ein analoges, experimentell belegtes Röntgenspektrum läßt sich hier nicht an die Seite stellen, da es sich um die *K*-Serie handelt, also die Frequenz des innersten Elektronenringes, welche für Strahler mit so hohem Atomgewicht äußerst kurzwellig ist. Indem aber auch für die *K*-Serie der funktionelle Zusammenhang zwischen Frequenz und Atomnummer eine Gerade ergibt (auf Grund zweier getrennter Meßreihen von Siegbahn[2]), ließen sich auf graphischem Wege (Fig. 18) die K_α-Linien für RaB und RaC ermitteln. Die mit *A* und *B* bezeichneten Linien des RaB (Tab. 17) erwiesen sich als die weitaus stärksten Linien. *A* fällt angenähert zusammen mit den interpolierten K_α-Linien von Blei (82) und Wismut (83). Die Verfasser vermuten, daß die Linien größerer Wellenlängen

1) E. Rutherford u. C. Andrade Phil. Mag. **28**. p. 263. 1916.

2) M. Siegbahn, Ann. d. Phys. **49**. p. 616. 1916; Verhandl. d. deutsch. Physik. Ges. **18**. p. 39. 1916.

wie $1{,}37 \cdot 10^{-9}$ cm dem RaB zugehören, die von kleineren Wellenlängen dem RaC.

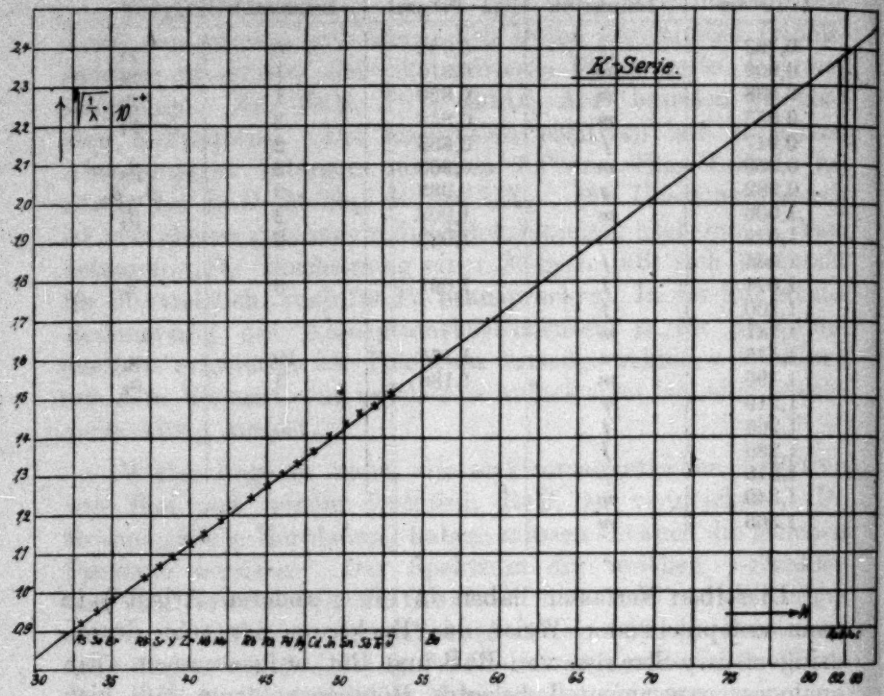


Fig. 18.

Tabelle 17.

RaB und RaC	Blei	Wismut
$\lambda = 0{,}72 \cdot 10^{-9}$ cm		
0,99 B		
1,16		
1,37		
1,59 } A	$\lambda = 1{,}81 \cdot 10^{-9}$ cm	$\lambda = 1{,}76 \cdot 10^{-9}$ cm
1,69 }		
1,96		
2,42		
2,62		
2,96		
3,24		
3,93		
4,28		

Demnach müßte RaC eine höhere Frequenz besitzen als die der *K*-Serie. Dieselbe Beobachtung gilt für Mesothorium$_2$, Thorium D, Uran X$_2$. Aber auch gelegentlich der charakteristischen Röntgenstrahlen sind gleiche Unstimmigkeiten wahrgenommen worden. So haben Experimente von Kaye gezeigt, daß bei 30000 Volt Röhrenspannung von Aluminium eine Strahlung erhalten werden kann, die durchdringungsfähiger ist als die *K*-Charakteristik dieses Elementes. Beobachtungen ähnlicher Art wurden von Rawlinson[1]) an Nickel gemacht. Will man auf Grund des Bohrschen Atommodells an der Annahme festhalten, daß die Maximalfrequenz eines Elementes durch seine *K*-Charakteristik bedingt ist, so kann man vielleicht mit Rutherford[2]) schließen, daß die Strahlung von höherer Frequenz die Oktave oder selbst eine noch höhere harmonische Grundstufe derjenigen Strahlung ist, die durch die *K*-Charakteristik vertreten wird. Das erbrachte Zahlenmaterial liefert allerdings keineswegs durchgängig eine praktische Bestätigung dieser Theorie Rutherfords.

In diesem Zusammenhange möchte noch auf die gewissen Abweichungen hingewiesen werden, welche die Isotopen des Bleies RaB, ThB und AcB zeigen. Sie fallen in Tab. 14 und 15 auf durch ihre 3 Absorptionskoeffizienten μ, die genau entsprechenden Größenordnungen angehören. Als Isotope besitzen sie die gleiche Atomnummer, also auch die gleiche Kernladung. Da nun die Wellenlänge der charakteristischen Röntgenstrahlen eine so eindeutige Beziehung zu den Ordnungszahlen der Elemente aufweist, müßten die Wellenlängen und Absorptionskoeffizienten der Isotopen untereinander vollkommen gleich sein. Tatsächlich betragen aber die Schwankungen bis zu 40 Proz. innerhalb eines Strahlentypus. Diese Unterschiede lassen sich sicherlich nicht allein durch Versuchsfehler deuten. Rutherford[3]) erklärt die Abweichungen in der Isotopenreihe des Bleies auf folgende Weise: Bricht ein β-Teilchen aus dem Kern auf und durchfliegt das Atom, so ist in erster Linie die Atomstruktur für die ausgelöste Charakteristik verantwortlich. Indem aber das Elektron in ver-

1) W. F. Rawlinson, Phil. Mag. 28. p. 274. 1914.
2) E. Rutherford, Phil. Mag. 30. p. 339. 1915.
3) E. Rutherford, Phil. Mag. 28. p. 305. 1914.

schiedener Richtung in bezug auf die Atomstruktur aus dem Kerngefüge entweichen kann, entstehen etwas unterschiedliche Strahlungen. Demnach besitzen Isotope nur dann identische elektromagnetische Spektren, wenn die aufbrechenden Elektronen auch entsprechende Regionen des Atoms passieren.

IV. Einige Zusätze über die vermutliche Größe des Energieinhaltes radioaktiver Atome.

I. Berechnung der Elektronengeschwindigkeit V_{min}.

Whiddington[1]) zeigte, daß die charakteristische X-Strahlung eines gegebenen Elementes auftritt, wenn die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen einen bestimmten endlichen Wert erreicht, der direkt proportional mit dem Atomgewicht A der Substanz ist. Diese *„kritische Elektronengeschwindigkeit"* V_{min} ist recht angenähert gegeben durch die Beziehung

$$V_{min} = A \cdot 10^8 \text{ cm/sec.}$$

Sie wird genauer bestimmt nach van den Broek[2]) durch die Gleichung

$$V_{min} = 2{,}24 \cdot 10^8 (M - 1),$$

wo M die Ordnungszahl des betreffenden Elementes ist. Tab. 18 enthält die nach der Broekschen Gleichung ausgewerteten kritischen Elektronengeschwindigkeiten.

Tabelle 18.

Element	Ordnungszahl	$V_{min} = 2{,}24 \cdot 10^8 (M-1)$
Jo	90	$193{,}3 \cdot 10^8$ cm/sec
UX_1	90	199,3
UX_2	91	201,6
Ra	88	194,8
RaB	82	181,4
RaC	83	183,6
RaD	82	181,4
$MsTh_2$	89	197,1
ThB	82	181,4
ThD	81	179,2
RdAc	90	199,3
AcB	82	181,4
AcD	81	179,2
Po	84	185,9

1) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. (A) **85**. p. 323. 1911.
2) A. van den Broek, Physik. Zeitschr. **15**. p. 894. 1914.

Es handelt sich danach um Elektronengeschwindigkeiten von ca. $^2/_3$ Lichtgeschwindigkeit.

II. Bestimmung der kritischen Elektronenenergie E_c, welche notwendig ist, um die *K*-Charakteristik der radioaktiven Substanzen auszulösen.

Die Elektronenenergie E ist gegeben durch die Beziehung

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2, \text{ wo bedeuten}$$

m = Masse des Elektrons = $8{,}8 \cdot 10^{-28}$ g,
v = Geschwindigkeit des Elektrons in cm/sec.

Mit E_c sei jene *„kritische Elektronenenergie"* bezeichnet, welche sich dann ergibt, wenn V_{min} als Elektronengeschwindigkeit eingesetzt wird. Nach den obigen Angaben (vgl. p. 362) liegt für Ra, RaB, ThB, RdAc und AcB eine *K*-Charakteristik vor. Tab. 19 enthält die zu ihrer Auslösung erforderlichen kritischen Stoßenergien E_c.

Tabelle 19.

	$E_c - \frac{1}{2} m V_{min}^2$
Ra	$16{,}7 \cdot 10^{-8}$ erg.
RaB	14,4
ThB	14,4
RdAc	17,4
AcB	14,4

III. Über einen Quanteneffekt im Hochfrequenzspektrum der radioaktiven Substanzen.

In früheren Jahren schon zeigten die experimentellen Erfahrungen, daß die Energie der Strahlung in bestimmten Mengen emittiert wird. Diese Tatsache findet ihren einfachsten Ausdruck in der Planckschen Gleichung

$$E = h \nu, \text{ wo bedeuten}$$

E = Energie des Strahles,
ν = Frequenz des Strahles,
h = Plancks Fundamentalkonstante = $6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg.

Es ist von Interesse, zu erfahren, ob diese Quantenbeziehung auch für die *K*-Charakteristik der γ-Strahlen annähernd gültig ist. Voraussetzung ist natürlich, daß alle Energie E eines Kathodenstrahles in einen einzigen γ-Impuls von bestimmter Frequenz ν umgesetzt wird. Es wurden die Frequenzen von

Ra, RaB, ThB, RdAc und AcB (vgl. p. 359) mit h multipliziert und mit den kritischen Elektronenenergien $E_c = \frac{1}{2} m V_{min}^2$ verglichen Tab. 20 vereinigt die beiderlei Werte.

Tabelle 20.

	$\nu = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\gamma}$	$E_c = \frac{1}{2} m V_{min}^2$	$E = h\nu$	$E_c/h\nu$
Ra	$20 \cdot 10^{18}$	$167{,}10^{-9}$ erg.	$131 \cdot 10^{-9}$ erg.	1,29
RaB	15,6	14o	103	1,40
ThB	18	144	119	1,21
RdAc	23,1	174	152	1,14
AcB	16,2	144	107	1,34

Kolonne 5 enthält die Quotienten $E_c/h\nu$ Sie sind sämtlich größer als 1 und betragen im Mittel etwa 1,3. Diese Beobachtung steht in bester Übereinstimmung mit Resultaten von Landé.[1]) Der Verfasser bestätigte dort einen Quanteneffekt für die K-Serie der leichten Elemente Al bis Se und erhielt als Quotient $E_c/h\nu$ im Mittel 1,35. Die Beobachtung, daß E_c größer ist als die zugehörige Energie $h\nu$, führt Landé auf die Erscheinung zurück, daß bei allen beobachteten Resonanzvorgängen an Röntgenstrahlen das Resonanzgebiet um 12 bis 20 Proz nach Rot gegen das Erregungsgebiet verschoben ist.

IV. Berechnung des Potentialgefälles in Volt, unter dessen Einfluß die Projektion der die γ-Strahlen erzeugenden β-Teilchen in den zerfallenden radioaktiven Substanzen erfolgt.

Ist E die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden des Röntgenrohres, welcher ein Kathodenstrahl seine Geschwindigkeit v verdankt, dann sind v und E verbunden durch die Gleichung

$$\frac{1}{2} m v^2 = E e,$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e/m} \cdot v^2.$$

Da $e/m = 1{,}8 \cdot 10^7$, so folgt

$$E = 2{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot v^2.$$

Um E in Volt zu haben, ist die rechte Seite der Gleichung durch 10^8 zu dividieren. Demnach lautet die Bestimmungsgleichung für das Potentialgefälle in Volt

$$E = 2{,}8 \cdot 10^{-26} \cdot v^2.$$

1) A. Landé, Physik. Zeitschr. 15. p. 753. 1914.

Im Falle der K-Charakteristik ist v durch V_{min} zu ersetzen. Überträgt man die Verhältnisse der Röntgenröhre auf die Atome der radioaktiven Substanzen, dann erhält man die folgenden in Tab 21 zusammengestellten Werte für die in Volt gemessenen kritischen Elektronenenergien der projektierten β-Teilchen von Ra, RaB, ThB, RdAc, AcB.

Tabelle 21.

Substanz	$E = 2{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot v^2$ Volt
Ra	106470 Volt
RaB	91730
ThB	91730
RdAc	110883
AcB	91730

Die Geschwindigkeit der aus den zerfallenden Atomen aufbrechenden β-Strahlen entspricht somit rund einer Potentialdifferenz von 100000 Volt. Dieses so berechnete Potentialgefälle erweist sich aber als bedeutend zu klein. Vgl. Schluß von Abschnitt V.

V. Berechnung der Elektronenenergie in Volt auf Grund der Quantentheorie.

Für die Potentialdifferenz in Volt, E, wurde soeben die Beziehung abgeleitet

$$E = 2{,}8 \cdot 10^{-16}\, V_{min}{}^2 .$$

Andererseits gilt für die kritische Elektronenenergie E_c die Gleichung

$$E_c = \tfrac{1}{2}\, m\, V_{min}{}^2 = h\nu .$$

Daraus bestimmt sich $V_{min}{}^2 = 2h\nu/m$. Diesen Wert setzt man für E ein und erhält die Gleichung

$$E = 2{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{2h\nu}{m}, \quad \text{oder}$$

$$E = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot 2 \cdot 655 \cdot 10^{-27}}{8{,}8 \cdot 10^{-28}}\, \nu = 4{,}2 \cdot 10^{-15} \nu .$$

Tab. 22 enthält nebeneinander die Potentialdifferenzen E ausgedrückt durch $V_{min}{}^2$ und $h\nu$.

Die zuletzt ermittelten Potentialdifferenzen sind erheblich kleiner. Der Unterschied muß auf die Frequenz ν zurückgeführt werden, welche offenbar zu klein ist. (Vgl. auch

Tabelle 22.

Substanz	$E = 2{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot V_{min}^2$ Volt	$E = 4{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot \nu$ Volt
Ra	106470 Volt	84000 Volt
RaB	91730	65200
ThB	91730	75200
RdAc	110883	97000
AcB	31730	68500

Punkt III auf p. 368.) Für hohe Frequenzen ist demnach die Elektronenenergie nicht mehr proportional der Spannung, sondern bleibt hinter der Spannung zurück. Damit deckt sich auch die folgende Erfahrung von Rutherford, Barnes und Richardson.[1]) Die Verfasser trugen gelegentlich ihrer Untersuchungen über die Höchstfrequenz von Wolframstrahlen die Elektrodenspannung in Kilovolt gegen die beobachtete Frequenz der Reststrahlung auf. Sie arbeiteten mit Spannungen bis 175000 Volt. Dabei zeigte es sich, daß die Experimentalkurve sehr erheblich hinter der theoretischen Kurve zurückblieb. Die Beziehung zwischen Frequenz und Spannung ließ sich hier ausdrücken durch die Formel $h\nu = E - cE^2$, wo E die Energie des sich durch die Potentialdifferenz V bewegenden Elektrons und c eine Konstante ist. Der Wert des Korrekturfaktors cE^2 steigt rasch an mit zunehmender Frequenz. Hr. Ing. F. Dessauer, Direktor der Veifawerke Frankfurt-Aschaffenburg, welcher in seinem Privatlaboratorium die Untersuchungen Rutherfords mit der Wolfram-Antikathode weiterführte, vorläufig bis zu 310 Kilovolt, beobachtete in Übereinstimmung mit den englischen Autoren, daß im Intervall von ca. 120000 bis 180000 Volt die K_α- und K_β-Linie des Wolframs sich stark bemerkbar machen. Bei Überschreitung dieser Spannung fand er nun, im Gegensatze zu Rutherford, Barnes und Richardson, welche gemeint haben, daß man eine härtere Strahlung bei Steigerung der Spannung zunächst gar nicht erzielen könne, daß die äußerste Härte allerdings, aber in einer sehr flach verlaufenden Kurve wächst. Die Interpolation der so erhaltenen Kurve ergibt, daß man voraussichtlich erst bei 480 Kilovolt auf die starke K-Linie des Radiums C stößt.

1) E. Rutherford, J. Barnes u. H. Richardson, Phil. Mag. 30. p. 339. 1915.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Standardmethode ist die allein mögliche Beobachtungsmethode bei Absorptionsmessungen an Röntgenstrahlen wegen der Inkonstanz des Röhrenbetriebes.

2. Die Absorption eines Gasgemisches erfolgt nach dem Benoistschen Additivgesetz.

3. Für eine chemische Gasverbindung wurde der Begriff des „mittleren Absorptionsvermögens" eingeführt.

4. Für zwei verschiedene Gase werden die Quotienten $\frac{\mu_1/\varrho_1}{\mu_2/\varrho_2}$ bei zunehmender Härte der Strahlung immer kleiner.

5. Für ein schweres Gas wie Chlormethyl bleibt die Absorption bei niederen Partialdrucken hinter dem Drucke zurück.

6. Der Absorptionskoeffizient eines Gases ist bei doppeltem Drucke kleiner als doppelt so groß wie bei einfachem Drucke.

7. Die Größe des Absorptionskoeffizienten ist selbst für leichte Medien wie Gase in hohem Maße von der Filterwirkung abhängig. Es wurde der Begriff des *mittleren* oder *scheinbaren Absorptionskoeffizienten* eingeführt und mathematisch definiert.

8. Mit zunehmender Filterwirkung konvergieren die Werte der relativen Absorptionskoeffizienten.

9. Das Absorptionsvermögen ist nur in geringem Maße von der Spannungsvariation abhängig.

10. Die Angabe eines Absorptionskoeffizienten ist bedeutungslos ohne gleichzeitige Angabe der Strahlenhärte und Filterwirkung.

11. Die Halbwertschicht von Luft für γ-Strahlen von RaC war nur 4—5mal größer als für die harte, durch 9 mm Al filtrierte Strahlung der Maximumröhre.

12. Die Standardmessung ist geeignet für die Beobachtung der Strahlungsverteilung.

13. Die Bremsstrahlung war durch 1 mm Al praktisch gänzlich von der Eigenstrahlung zu trennen.

14. Die Strahlungsverteilung hängt von der primären Belastung ab.

15. Die Strahlenhärte erwies sich in hohem Maße abhängig von der primären Belastung.

16. Die Röntgenröhre besitzt eine „Normalbelastung", für welche der Röhrenbetrieb annähernd konstant ist.

17. Es wurde ein Vorschlag zu einem einfachen Röntgenqualimeter erbracht, welches die Härtebestimmung auf iontometrischem Wege ermöglicht.

18. Es wurden verschiedene Ursächlichkeiten der Entstehung der stark heterogenen Strahlung eines Röntgenrohres erwogen.

19. Es ließ sich für einige radioaktive Stoffe die wahrscheinliche Existenz einer *K*-, *L*- und *M*-Charakteristik erbringen.

20. Es wurden die vermutlichen Feldkräfte radioaktiver Atome berechnet.

Die vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Königlichen Universität zu Frankfurt a. Main im Sommersemester 1916 ausgeführt.

Es ist mir liebe Pflicht, an dieser Stelle dem Direktor des Instituts, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Regierungsrat Prof. Dr. R. Wachsmuth, herzlichen Dank zu sagen für die Anregung zu dieser Arbeit und das lebhafte und fördernde Interesse, das er ihr jederzeit entgegenbrachte.

(Eingegangen 14. Juni 1917.)

2. *Über Ionisationsmessungen im Geisslerrohr;* *von Erich Rumpf.*

Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung Sir J. J. Thomsons schon im Frühjahr 1912 im Cavendishlaboratorium in Cambridge begonnen und mit großen Unterbrechungen im Physikalischen Institut der Universität Graz fortgesetzt und vollendet.

Die ursprüngliche Aufgabe der Messungen war, Sättigungsströme im negativen Glimmlicht nach der Methode der Querströme unmittelbar zu beobachten. Es zeigte sich aber sehr bald, daß an keiner Stelle der Geisslerentladung Sättigungsströme auftreten, daß vielmehr die Stromspannungskurven im allgemeinen eine Gestalt haben, wie sie in Fig. 1 (in der ausgezogenen Kurve) angedeutet ist. Bei schwachen Spannungen (10—20 Volt, Bereich *A*) verläuft die Kurve schwach konvex gegen die Spannungsachse, biegt dann im Bereich *B* um und verläuft ein Stück geradlinig, um dann im Bereich *C* noch einmal zu einem starken Anstieg zu wenden. Hier traten merkliche Lichtbüschel an den Nebenelektroden auf, und der Stromanstieg verlief häufig stoßweise. Es ist einige Ähnlichkeit vorhanden mit den Angaben von R. Wachsmuth[1]), mit dem Unterschied, daß der oft unauffällige Bereich *A* dort fehlt. Ganz gleiche Kurven fanden aber E. von Schweidler[2]) und A. Stoletow[3]) für den Hallwachseffekt. Ein Sättigungsstrom kann aus dem Verlauf einer solchen Charakteristik nirgends festgestellt werden, wenn auch der geradlinige Be-

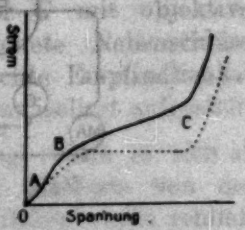


Fig. 1.

1) R. Wachsmuth, Die Leitfähigkeit der Gase bei dem elektrodenlosen Ringstrom. Ann. d. Phys. 39. p. 619. Figg. 5a u. b. 1912.
2) E. von Schweidler, Wiener Ber. 108. p. 273. 1899.
3) A. Stoletow, Graetz, Phys. Rev. 1. p. 723. 1892.

reich B bis C bei einigen Versuchsbedingungen nur schwach gegen die Spannungsachse geneigt erscheint. Zum Vergleiche ist in Fig. 1 die bekannte Charakteristik eines Sättigungsstromes durch die punktierte Kurve beigegeben.

In den folgenden Abschnitten werde ich die benutzte Versuchsanordnung beschreiben, die damit beobachteten Querströme angeben und werde versuchen, die Beobachtungen auf Grund einfacher Annahmen zu deuten.

I. Abschnitt.

Versuchsanordnung.

§ 1. Für die Messungen wurde anfänglich folgende Zusammenstellung benützt. Das Entladungsrohr (Fig. 2, R) wurde gebildet durch einen Glassturz von etwa 8 cm innerer

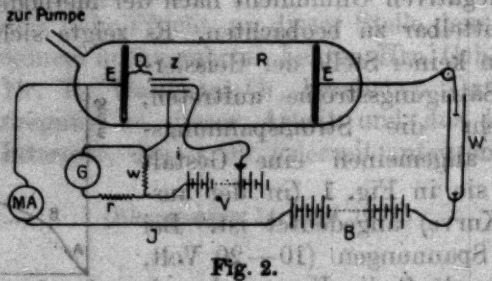


Fig. 2.

Weite, der in bekannter Weise mit Siegellackkittung von einem großen Glaskolben abgeschlossen wurde. Durch ein Ansatzrohr des Kolbens wurde die Verbindung zu einer Töplerpumpe und einem mit Holzkohle gefüllten Absorptionsrohr, das in flüssiger Luft gekühlt werden konnte, besorgt. Außerdem wurde noch durch eine Wasserstrahlpumpe vorgepumpt. Zur Trocknung waren Röhren mit Chlorcalcium und Phosphorpentoxyd vorgeschaltet. Die Druckmessung erfolgte durch ein Mc Leod-Manometer von etwa 75 ccm Kugelinhalt.

Als Elektroden dienten zwei an das Entladungsrohr anschließende Aluminiumscheiben, die etwa 18 cm voneinander entfernt waren. Ihre Zuleitungen führten durch Siegellackdichtungen nach außen und waren mit einer Hochspannungsbatterie B von 300—500 Akkumulatoren verbunden. Der Strom wurde mit einem verschiebbaren Wasserwiderstand W eingestellt und am Milliamperemeter MA abgelesen. Als

solches diente ein Westonvoltmeter mit einem Skalenbereich von 1,5 Volt und einem Widerstand von 100 Ohm. Dieser Stromkreis wird in Hinkunft als Hauptstrom J bezeichnet werden.

Die Nebenelektroden zur Messung der Querströme i bestanden aus zwei konzentrischen Messingzylindern Z (Fig. 2) von 85 mm Länge, die in der Achse des Entladungsrohres, durch dünne Glasstäbchen gestützt, befestigt waren. Der äußere Zylinder hatte einen Durchmesser von 14 mm, der innere 8 mm. Ihre Entfernung D von der einen Hauptelektrode, die meist als Kathode benutzt wurde, betrug 25 mm. Die Zuleitung erfolgte durch Kupferdrähte, die durch dünne Glasröhrchen geschützt waren und durch zwei in den Glassturz gebohrte Löcher nach äußen führten. Die Zylinder Z konnten an eine Akkumulatorenbatterie V angelegt werden, von denen jede beliebige Spannung zwischen 2 und 120 Volt abgetastet werden konnte. Der entstehende Strom i wurde dann an einem Drehspulengalvanometer G mit objektiver Spiegelablesung gemessen. Durch geeignete Nebenschlüsse wurde das Galvanometer auf die gewünschte Empfindlichkeit gebracht. Der ganze Nebenstromkreis i war isoliert aufgestellt.

§ 2. Im Verlaufe der Untersuchung erwies es sich als wünschenswert, auch den Abstand der Kathode von den Nebenelektroden verändern zu können. Daher wurde schließlich folgende Anordnung benutzt.

Das Entladungsrohr bildete nun ein lotrechtes, ca. 50 cm langes Glasrohr, das mit Siegellack durch Trichter beiderseitig abgeschlossen war. Es schloß sich eng an die Elektroden an, die aus Aluminiumscheiben von 5,8 cm Durchmesser bestanden, also einen Flächeninhalt von 26 qcm hatten. Die Anode war durch den Hals des unteren Trichters herausgeführt. Am oberen Trichter war ein Glasschliff angeschmolzen, an dem die Kathode aufgehängt war, in ähnlicher Weise, wie es F. W. Aston[1]) angegeben hat. Dadurch konnte die Kathode in jede beliebige Höhe eingestellt werden und, da die Entladungserscheinung wesentlich von der Kathode abhängig ist, jede beliebige Stelle der Entladung zwischen den Nebenelektroden untersucht werden.

1) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. (A) 84. p. 528. 1911.

Ein an den oberen Trichterhals angeblasener Glasrohranschluß führte zum Mc Leod-Manometer und zu einer rotierenden Gaedeschen Quecksilberluftpumpe mit Vorpumpe und Motorantrieb; ein anderer Rohransatz am unteren Trichter vermittelte die Verbindung zu dem durch Phosphorpentoxyd getrockneten Gasvorratsraum. Diese konnte durch zwei hintereinander geschaltete Glashähne gesperrt werden, wodurch die Möglichkeit gegeben war, kleine Gasmengen in das Entladungsrohr eintreten zu lassen.

Zur Untersuchung gelangten die Gase Luft und Wasserstoff, die vor dem Eintritt in den Vorratsraum durch Chlorcalcium oder Schwefelsäure vorgetrocknet wurden. Der Wasserstoff wurde elektrolytisch erzeugt. Die Gase waren von Quecksilber- und Vaselinedämpfen nicht befreit. Vaseline diente nämlich zum Schmieren der Hähne.

Der Hauptstrom J wurde wie in der früheren Anordnung durch eine Batterie B von 1000 Volt gespeist und durch ein Milliamperemeter MA und einen verschiebbaren Wasserwiderstand W geleitet.

Zur Messung der Querströme wurden nun recht kleine Elektroden gewählt, um etwas enger bestimmte Stellen des Entladungsraumes untersuchen zu können. Diese Nebenelektroden bestanden aus 5,0 mm langen Aluminiumzylindern, von denen der äußere einen inneren Durchmesser von 5,5 mm hatte; der innere wurde durch ein 1,2 mm dickes Stäbchen gebildet. Daher hatten die Zylinderelektroden einen Abstand von $\delta = 2{,}15$ mm voneinander.

Als Zuleitung zum äußeren Zylinder diente ein dünner Platindraht, der um den Zylinder einmal gewunden war. Die Zuleitung und Befestigung des Stäbchens bereitete anfänglich einige Schwierigkeiten; folgende Methode führte aber zum Ziel. In einem starken Aluminiumdraht wurde axial auf einer Uhrmacherdrehbank ein feines Loch gebohrt, in das ein dünner Platindraht leicht eingesteckt werden konnte. Dann wurde der Aluminiumdraht in einem Zieheisen auf die gewünschte Stärke gebracht, wodurch sich der Platindraht im Aluminium festklemmte.

Die so befestigten Platinzuleitungen wurden bis knapp an die Zylinderchen in dünn ausgezogene Glasröhrchen (Fig. 3, a)

gesteckt, die die Zuleitungen vom ionisierten Gasraum isolieren sollten und eine genügende Festigkeit gaben. Nun wurden die Glasröhrchen an ein gekrümmtes Glasstäbchen (Fig. 3, *b*) angeschmolzen und dann das kleine, sorgfältig zentrierte Gestell in das Entladungsrohr *R* geschoben, die Platindrähte durch die vorher in das Glasrohr gebohrten Löcher *c* gezogen und von außen mit Siegellack verkittet, so daß die Zylinderchen in die Achse des Entladungsrohres kamen, etwa 8 cm von der Anode entfernt. Die Zuleitung zum inneren Zylinder erfolgte auf der Seite der Anode.

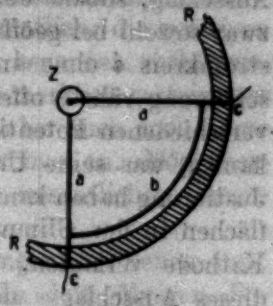


Fig. 3.

Um den Abstand *D* der Zylinder von der beweglichen Kathode messen zu können, war an der Außenseite des Entladungsrohres ein Papiermaßstab angebracht, der 0,5 mm noch leicht zu messen gestattete.

Die Platindrähte führten zunächst zu einem Stromwechsler, der ebenso wie in der unter § 1 besprochenen Versuchsanordnung mit einer wählbaren Akkumulatorenbatterie *V* bis 120 Volt und einem Galvanometer *G* verbunden war. Außerdem war im Nebenstromkreis *i* noch eine Sicherung angebracht, bestehend aus einem Eisenfaden von ca. 0,2 Ampere Abschmelzstromstärke (Widerstand 5—10 Ohm); diese Sicherung sollte das Galvanometer vor allzugroßen Stromstößen bewahren. Nach manchen Versuchen wurde ein kleines Drehspuleninstrument von Siemens & Halske mit einer Schwingungsdauer von ca. 1 Sekunde und einem Widerstand von 55 Ohm am geeignetsten gefunden; es wurde durch die Widerstände *w* und *r* (Fig. 2) geschlossen, so daß seine Empfindlichkeit nach Bedarf verändert werden konnte, wobei die Widerstände immer derartig gewählt wurden, daß das Galvanometer gerade aperiodisch war. An den Widerstand *w*, der meist 20 Ohm betrug, konnte noch eine Eichanordnung für den Galvanometerstromkreis angeschlossen werden. Dieser äußere Leitungswiderstand ist jedenfalls im Vergleich zum inneren Widerstand zwischen den Zylindern zu vernachlässigen, da dieser die Größenordnung von 10^6 Ohm hatte, wie später zu ersehen sein wird. Die Ablesung erfolgte nun durch Fern-

rohr und Skale. Der ganze Nebenstromkreis i und der eigentliche Galvanometerkreis war wieder isoliert aufgestellt.

§ 8. Trotzdem zeigte das Galvanometer einen geringen Ausschlag, sobald der Hauptstromkreis geschlossen war, und zwar sowohl bei geöffnetem als auch bei geschlossenem Nebenstromkreis i ohne angelegte Spannung V. Diese zweite Erscheinung rührte offenbar daher, daß die Nebenelektroden in verschiedenen Potentialstellen des Entladungsraumes zu stehen kamen, was seine Ursache in der immerhin unvollkommenen Justierung haben kann, besonders aber darin, daß die Potentialflächen in der Glimmentladung bekanntlich nicht parallel der Kathode verlaufen. Es wechselte die Größe und Richtung dieses Ausschlages mit dem Abstande der Kathode von den Zylindern. Der Ausschlag des Galvanometers bei offenem Nebenstromkreise dürfte wohl durch mangelhafte Isolation seiner Aufstellung erklärt werden können, indem ein Bruchteil des Hauptstromes durch das Galvanometer seinen Weg zur Erde nahm. Daher wurde als Ruhelage des Galvanometers immer jene Ablesung genommen, die bei geschlossenem Nebenstromkreise ohne angelegte Spannung V beobachtet wurde.

Mit Hilfe des schnellschwingenden Galvanometers konnte auch eine rasch abklingende elektromotorische Gegenkraft zwischen den Zylindern wahrgenommen werden, nachdem von außen Strom durch sie geschickt worden war. Diese kann vielleicht als Polarisation im Sinne von E. Wertheimer[1]) nnd W. Gaede[2]) angesprochen werden[3]), denn sie hatte eine Größenordnung von 1—2 Volt und wurde daher bei den Berechnungen vernachlässigt. Ich behalte mir vor, darüber in einer späteren Arbeit zu berichten.

Eine Änderung im Milliamperemeter des Hauptstromkreises durch Schließen des Nebenstromes konnte nicht beobachtet werden, außer wenn an den Zylindern starke Lichtbüschel (vgl. p. 373) auftraten, also bei den höchsten Spannungen V. Bei diesen Entladungen, die, wie schon erwähnt, stoßweise erfolgten, schmolz meist die Eisenfadensicherung durch; sie hatten Ähnlichkeit mit Funken.

1) E. Wertheimer, Verh. d. D. Physik. Ges. 15. p. 1333. 1913.
2) W. Gaede, Ann. d. Phys. 04.
3) C. A. Mebius (Wied. Ann. 59. p. 695. 1896) und G. C. Schmidt (Ann. d. Phys. 18. p. 869. 1905) verstehen unter Polarisation im Geisslerrohr das anodische bzw. kathodische Gefälle an Querelektroden.

Vielleicht darf an dieser Stelle eine hübsche Erscheinung erwähnt werden, ohne auf sie näher eingehen zu wollen. Wenn eine solche Funkenentladung durch die Nebenelektroden gegangen war, veränderte sich unter Umständen die Leuchterscheinung im Entladungsrohr ganz wesentlich: die positiven Schichten vermehrten sich plötzlich und begannen verhältnismäßig langsam hin und her zu wogen, bei merklich gesteigerter Leuchtkraft. Diese Veränderung dauerte aber auch noch kurze Zeit nach dem Ausschalten des Nebenstromes an. Möglicherweise kann sie ihre Ursache in einer wesentlichen Ionenvermehrung durch den „Funken" haben.

Aus diesen Gründen wurden Spannungen, bei denen diese Nebenumstände auftraten, vermieden. In dem übrigen Bereich der Querspannungen trat keinerlei Störung der Leuchterscheinung ein, wenn sich die Querelektroden im Hittorfschen Dunkelraum, im negativen Glimmlicht oder im Faradayschen Dunkelraum befanden, was besonders an den großen Zylindern der unter § 1 beschriebenen Anordnung festgestellt werden konnte. Die positiven Schichten hafteten jedoch an den Querelektroden. Um die Leitfähigkeit der positiven Schichten zu ermitteln, waren also auch die Zylinderchen der Anordnung § 2 noch bedeutend zu groß. Daher können sich die Beobachtungen dieser Schrift nur auf die beiden Dunkelräume und auf das negative Glimmlicht erstrecken.

II. Abschnitt.
Versuchsergebnisse.

§ 4. Mit der beschriebenen Versuchsanordnung war nun die Möglichkeit gegeben, die Messungen in verschiedener Weise zu gestalten, da

i der Querstrom zwischen den Zylinderelektroden, sich abhängig zeigt von

V der an die Nebenelektroden angelegten Spannung und ihrer Richtung,

D dem Abstand der Kathode von den Nebenelektroden,

p dem Drucke im Entladungsrohr und

J der Hauptstromstärke im Entladungsrohr.

Es wurde daher mit je zweien dieser vier willkürlich veränderlichen Größen der Querstrom i beobachtet, während die übrigen beiden konstant gehalten wurden, und so ein zahl-

reiches Beobachtungsmaterial von über 250 Kurven gesammelt, aus dem natürlich nur einige Beispiele wiedergegeben werden sollen, und zwar meist in Kurvenform, da die Messungen keinen Anspruch auf große Genauigkeit erheben.

Kleine Änderungen im Druck oder Verunreinigungen des Gases durch Freiwerden des in den Elektroden absorbierten Gases geben ja besonders im negativen Glimmlicht viel aus, da hier ein ziemlich scharfes Maximum der Leitfähigkeit, bzw. der Ionisation auftritt, wie später gezeigt werden wird. Es fiel daher schwer, einmal erhaltene Kurven wiederzugewinnen; aber die Gestalt der Kurven wiederholte sich immer wieder, nur war sie je nach der Länge des Hittorfschen Dunkelraumes verschoben. Insbesondere wirkte die bekannte Eigenschaft der Elektroden des Geisslerrohres störend, Gas zu absorbieren oder abzugeben. Diesem Fehler wurde einigermaßen gesteuert, daß der Hauptstrom J immer nur so lange geschlossen gehalten wurde, als zur Beobachtung unbedingt notwendig war.

Eine weitere störende Beeinflussung der Beobachtungsgenauigkeit bildete die Temperatur. Da das Zimmer, in dem die Apparatur aufgestellt war, im Laufe der Zeit Temperaturunterschiede bis zu 10° C. aufwies, konnte nämlich festgestellt werden, daß die Temperatur nicht ohne Einfluß auf die Ionisation des Geisslerohres ist.

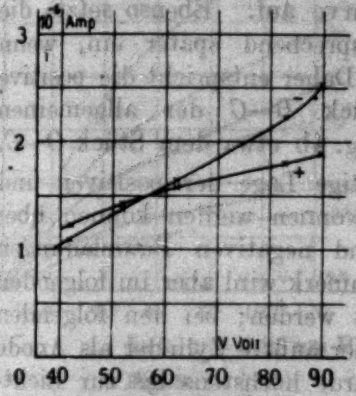
Im allgemeinen wurde durch diese Störungen eine Ungenauigkeit von 5—10 Proz. hervorgerufen, die allerdings manchmal auch größere Werte erreichen kann, wie z. B. auf p. 385 erwähnt ist.

Ein weit größerer Fehler steckt aber natürlich in jenen Zahlen, die die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Ionendichte über den Querschnitt des Geisslerrohres einschließen.

Endlich wird zu berücksichtigen sein, daß durch die Sonden selbst und gar durch das angelegte Querfeld die Geisslerentladung gestört wird. Es ist aber anzunehmen, daß die hierdurch bedingte Störung erst dann wesentlich wird, wenn die Leuchterscheinung beeinträchtigt wird, was in den negativen Gebilden bei Spannungen unter einem gewissen Betrage nicht der Fall war, wie auf p. 379 besprochen wurde. Es dürfte aber schwer sein, diese Fehler abzuschätzen.

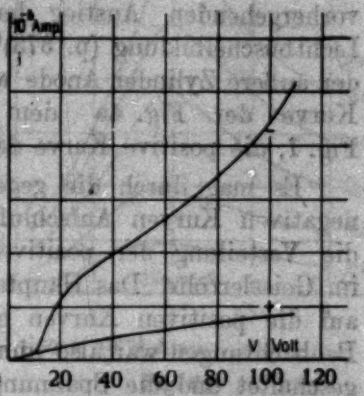
§ 5. Zunächst sei die *Abhängigkeit* der *Querstromstärke* von der *Richtung* der angelegten *Spannung* besprochen. In

Figg. 4a und 4b sind Stücke aus Stromspannungskurven wiedergegeben, wobei durch das positive oder negative Zeichen die Ladung des äußeren Zylinders bezeichnet ist. Als Abszissen sind in beiden Fällen die angelegte Spannung in Volt, als Ordinaten die Stromstärke i in Mikroamp. aufgetragen. Die Beobachtungen sind in Luft bei den Drucken $p = 0{,}25$ bzw. 0,25 mm Hg mit der Versuchsanordnung § 2 angestellt



Luft, $p = 0{,}25$ mm Hg, $D = 0{,}25$ cm, $J = 1{,}0$ MA.

Fig. 4a.



Luft, $p = 0{,}22$ mm Hg, $D = 2{,}0$ cm, $J = 1{,}0$ MA.

Fig. 4b.

worden. Die Hauptstromstärke betrug in beiden Fällen J 1,0 Milliamp. Die beiden Zeichnungen weisen ganz außerordentlich große Unterschiede auf, und zwar schneiden sich die Kurven, die bei einem Abstande $D = 0{,}5$ cm von der Kathode (Fig. 4a), also im Hittorfschen Dunkelraum gewonnen wurden, während in Fig. 4b (Abstand der Zylinder von der Kathode $D = 2{,}0$ cm), die etwa dem negativen Glimmlicht entspricht, die Kurve mit dem negativen Zeichen (äußerer Zylinder als Kathode) durchwegs höher liegt als die positive Kurve. Der erste Fall (Fig. 4a) zeigt ein ganz ähnliches Bild, wie es Kirkby[1]) für Luft, die durch Röntgenstrahlen ionisiert war, gibt, mit dem Unterschied, daß hier ein dauernder Anstieg der Charakteristik sich ergibt, wenn die größere Elektrode Anode ist, während dort deutlich Sättigung eintritt.

1) P. J. Kirkby, Phil. Mag. Febr. 1902.

Die negativen Kurven schließen sich sehr gut der Townsendschen Theorie der Ionisation durch Stoß[1]) zwischen Ionen und neutralen Molekülen an. Sie waren aber schwierig zu beobachten, weil bei höheren Spannungen sehr leicht der auf p. 379 beschriebene Funkenstoß auftrat, wobei, wie erwähnt, dann die Galvanometersicherung durchschmolz. Wenn der äußere Zylinder positiv war, trat der Funkenstoß erst bei viel höheren Spannungen und meist ganz unvermittelt, ohne vorhergehenden Anstieg der Kurve auf. Ebenso setzte die Lichtbüschelbildung (p. 378) entsprechend später ein, wenn der äußere Zylinder Anode war. Daher entspricht die positive Kurve der Fig. 4a dem Ctück *B—C* der allgemeinen Fig. 1, die positive Kurve der Fig. 4b etwa dem Stück *O—C*.

Es mag durch die gegenseitige Lage der positiven und negativen Kurven Aufschluß gewonnen werden können über die Verteilung der positiven und negativen Raumladungen im Geisslerrohr. Das Hauptaugenmerk wird aber im folgenden auf die positiven Kurven gelegt werden; bei den folgenden Beobachtungen war also immer der äußere Zylinder als Anode geschaltet und die Spannung wurde höchstens bis zur Lichtbüschelbildung gesteigert.

§ 6. Um die *Abhängigkeit* der *Stromspannungskurven* von der *Stellung* der *Kathode* zu erörtern, mögen zunächst die Figg. 5 und 6 dienen.

In Fig. 5 sind sechs solcher Kurven dargestellt, die mit den Spannungen 10,2, 21,0, 42,4, 79,0 und 118,5 Volt in verschiedenen Abständen D von der Kathode aufgenommen wurden. Das Entladungsrohr war mit Luft vom Drucke $p = 0{,}10$ mm Hg gefüllt, die Hauptstromstärke wurde auf $J = 1{,}00$ Milliamp. gehalten. Wie durch die den Kurven beigegebenen Zahlen angedeutet ist, betrug D beziehungsweise 0,2, 0,5, 1,0, 2,0, 3,0 und 4,0 cm; der leuchtende Glimmlichtraum war ca. 1,5 cm von der Kathode entfernt.

Innerhalb des Hittorfschen Dunkelraumes und in dem daran grenzenden Teile des Glimmlichtes verschieben sich die geraden Teile der Kurven (Fig. 5) mit wachsendem D in Gebiete höherer Stromstärken i, um im von der Haupt-

1) J. S. Townsend, The Theorie of Ionisation of gases by collision, London, Constable 1910.

kathode ferneren Teile des Glimmlichtes wieder in Gebiete schwächerer Ströme zurückzukommen, und zwar mit größerer Neigung, so daß z. B. die Kurven, die den Abständen $D = 1$ und $D = 4$ cm entsprechen, einander schneiden.

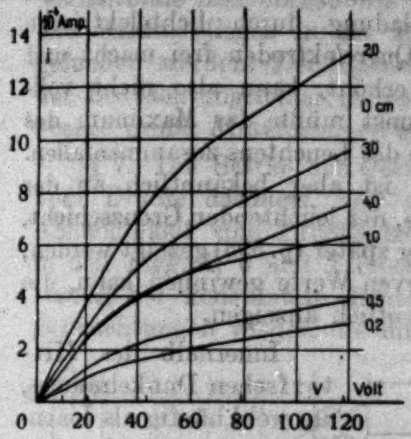


Fig. 5.

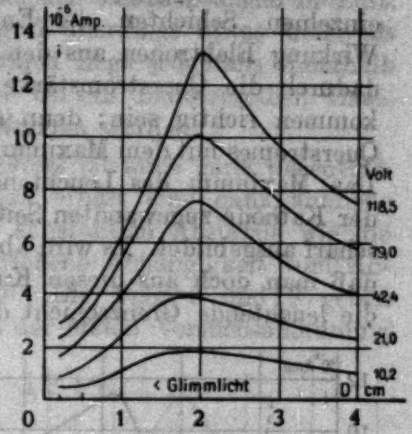


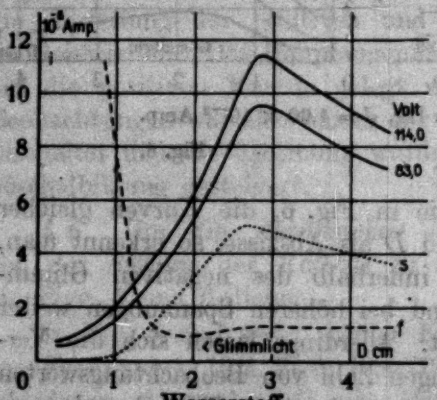
Fig. 6.

Luft, $p = 0{,}10$ mm Hg, $J = 1{,}00 \times 10^{-3}$ Amp.

Zeichnet man sich, wie in Fig. 6, die Kurven gleicher Spannung mit dem Abstand D als Abszisse, so erkennt man, daß das Strommaximum innerhalb des negativen Glimmlichtes zu liegen kommt und bei höheren Spannungen weiter ins Glimmlicht hineinrückt. Allerdings lassen sich die Verhältnisse bei einer so geringen Zahl von Beobachtungswerten nicht deutlich übersehen; es wurde diese Tatsache aber an einer großen Zahl von Beobachtungsreihen geprüft, wobei die Stelle des Maximums von Millimeter zu Millimeter bestimmt wurde, und immer bestätigt gefunden. Die Querstromstärken weisen also innerhalb des negativen Glimmlichtes Maxima auf. Ähnliche Beobachtungen liegen schon von H. A. Wilson[1]) und auf ganz anderem Wege von J. J. Thomson[2]) vor. Außerdem rücken aber die Maxima bei höheren Spannungen tiefer in das negative Glimmlicht hinein, eine Erscheinung, die sich durch den im nächsten Abschnitte vorgeschlagenen Ansatz sehr leicht erklären läßt.

1) H. A. Wilson, Phil. Mag. (5) 49. p. 505. 1900.
2) J. J. Thomson, Phil. Mag. VI. 1. p. 361. 1901.

Die leuchtende Grenzschicht des Glimmlichtes gibt sich merkwürdigerweise in diesen Kurven nicht unmittelbar zu erkennen; denn das Maximum des Querstromes liegt durchwegs im Inneren des negativen Glimmlichtes. Die von H. A. Wilson ausgesprochene Vermutung, daß das Leuchten der einzelnen Schichten der Entladung durch lichtelektrische Wirkung Elektronen aus den Querelektroden frei macht und dadurch die Querstromstärke erhöht, kann also nicht vollkommen richtig sein; denn sonst müßte das Maximum des Querstromes mit dem Maximum des Leuchtens zusammenfallen. Das Maximum des Leuchtens ist aber bekanntlich an der der Kathode zugewandten Seite, der leuchtenden Grenzschicht, scharf ausgebildet. Es wird aber später (p. 398) gezeigt werden, daß man doch aus diesen Kurven Werte gewinnen kann, die die leuchtende Grenzschicht deutlich anzeigen.



Wasserstoff,
$p = 0{,}10$ mm Hg, $J = 1{,}00 \times 10^{-3}$ Amp.

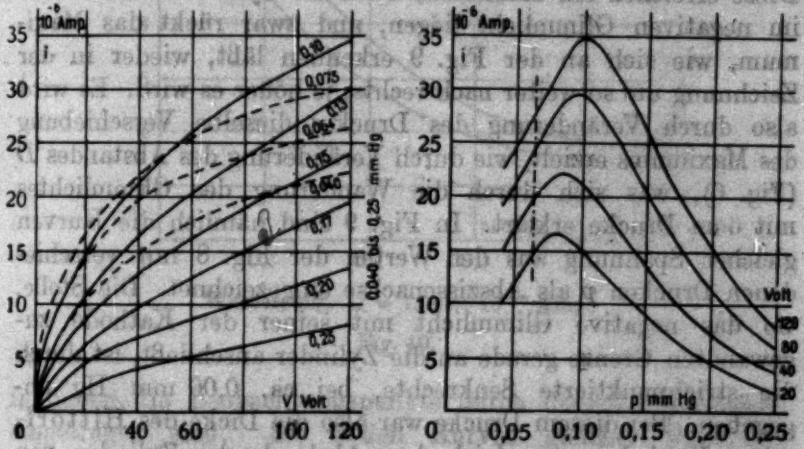
Fig. 7.

Innerhalb des Hittorfschen Dunkelraumes, der wohl häufig als Ionenverarmungsraum bezeichnet wird, haben die Querströme nur ganz geringe Werte, steigen dann steil an, um gegen den Faradayschen Dunkelraum zu langsam zu fallen. Sie behalten aber im ganzen Entladungsrohr höhere Werte als im Hittorfschen Dunkelraum. Im Faradayschen Dunkelraum sind die Werte wesentlich konstant und steigen nur vielleicht in der Nähe der ersten positiven Schicht etwas an.

Dieselben Erfahrungen, wie in Luft, wurden in Wasserstoffgas gemacht, mit dem Unterschied, daß dort, dem größeren Hittorfschen Dunkelraum entsprechend, die Kurven auseinandergezogen sind. Fig. 7 gibt die Kurven gleicher Spannung für verschiedene Abstände im Entladungsrohr, gefüllt mit Wasserstoff, wieder; Druck und Hauptstromstärke sind ebenso wie früher auf $p = 0{,}10$ mm Hg und $J = 1{,}00$ Milliamp. gehalten. Der besseren Übersicht halber sind nur die

Werte eingezeichnet, die mit den Spannungen $V = 88{,}0$ und 114,0 Volt gefunden wurden; der Abstand D wurde in Sprüngen von 0,25 cm verändert. Die Kurven f und s werden im III. Abschnitt besprochen werden. Wie ersichtlich, liegen die Verhältnisse hier ebenso wie bei den Beobachtungen in Luft. Die Maxima liegen in der Fig. 7 allerdings etwas tiefer als gefunden werden. Der Unterschied liegt jedenfalls innerhalb der Beobachtungsfehler, da auch bei ein und demselben Gase ebenso große Abweichungen gefunden wurden.

§ 7. Die Stärke der *Querströme* ist auch ganz wesentlich vom *Drucke abhängig*, und man erhält eine ganz ähnliche Abhängigkeit vom Drucke bei konstantem Abstande wie die in den Figg. 5, 6 und 7 beschriebene Abhängigkeit vom Abstande bei konstantem Drucke. Die Figg. 8 und 9 geben Beobachtungen wieder, die mit der ersten Versuchsanordnung



Luft, $D = 2{,}5$ cm, $J = 2{,}0 \times 10^{-3}$ Amp.

Fig. 8. Fig. 9.

(I. Abschnitt, § 1, große Zylinder, Abstand von der Kathode 2,5 cm) in Luft bei verändertem Drucke und einer auf $J = 2{,}0$ Milliamp. gehaltenen Hauptstromstärke gefunden wurden. Der großen Oberfläche der Zylinder halber und der höheren Hauptstromstärke J entsprechend [1]), haben die Ströme i, die als Ordinaten in Figg. 8 und 9 aufgetragen sind, höhere Werte als bisher und sind daher mit den übrigen Angaben,

1) Vgl. § 9 dieses Abschnittes.

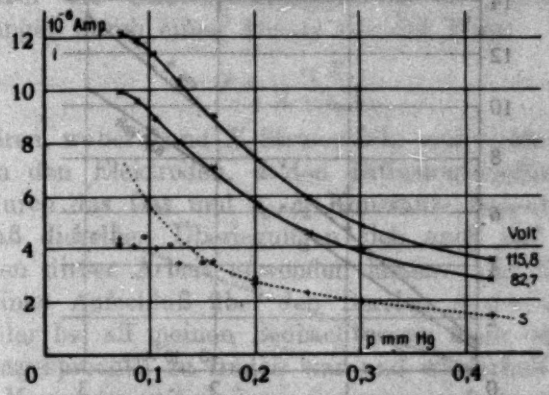
die sämtlich an der Versuchsanordnung § 2 des I. Abschnittes beobachtet wurden, nicht unmittelbar vergleichbar. Es soll an den Kurven nur gezeigt werden, daß auch mit den großen Querelektroden ganz ähnliche Resultate erzielt wurden.

Als Abszisse ist in Fig. 8 (ebenso wie in Fig. 5) die Spannung V eingezeichnet; die Beobachtungspunkte lagen bei 20, 40, 80 und 120 Volt. Die Drucke, denen die einzelnen Kurven entsprechen, sind in Millimeter Hg angegeben. Man erkennt eine auffallende Ähnlichkeit mit der Fig. 5. Solange die Zylinder in den Hittorfschen Dunkelraum hineinragen — infolge ihrer großen Länge konnte das Glimmlicht nicht genügend weit von der Hauptkathode entfernt werden, um die Zylinder vollkommen im Dunkelraum einzuschließen —, also bei niederen Drucken, ist die Neigung der Charakteristik gering und steigt mit dem Druck und den Stromwerten.[1]) Diese erreichen ein Maximum, wenn die Zylinder vollkommen im negativen Glimmlicht liegen, und zwar rückt das Maximum, wie sich an der Fig. 9 erkennen läßt, wieder in der Zeichnung um so weiter nach rechts, je höher es wird. Es wird also durch Veränderung des Druckes dieselbe Verschiebung des Maximums erzielt, wie durch Veränderung des Abstandes D (Fig. 6), was sich durch die Wanderung des Glimmlichtes mit dem Drucke erklärt. In Fig. 9 sind nämlich die Kurven gleicher Spannung aus den Werten der Fig. 8 mit verschiedenen Drucken p als Abszissenachse eingezeichnet. Die Stelle, wo das negative Glimmlicht mit seiner der Kathode zugewandten Grenze gerade an die Zylinder anschließt, ist durch die strichpunktierte Senkrechte, bei ca. 0,06 mm Hg angegeben. Bei diesem Drucke war also die Dicke des Hittorfschen Dunkelraumes gleich dem Abstande der Zylinder von der Kathode ($D = 2{,}5$ cm).

§ 8. Natürlich gewinnt man aus Messungen, die wie die eben angegebenen bei einem bestimmten Abstande der Querelektroden von der Hauptkathode vorgenommen werden, keine richtige Übersicht über die Abhängigkeit der Querstromstärke vom Drucke, da die Lage des negativen Glimmlichtes für die Charakteristik in erster Linie ausschlaggebend erscheint. Um die Abhängigkeit des Querstrommaximums

1) Die gestrichelten Kurven entsprechen der besseren Übersicht halber Drucken unter 0,10 mm Hg.

vom Drucke zu studieren, wurden daher bei verschiedenen, für die Dauer einer Beobachtungsreihe konstant gehaltenen Drucken eine größere Anzahl von Charakteristiken mit veränderlicher Stellung der Kathode aufgenommen. Auf diese Weise erhält man für verschiedene Drucke eine Folge von Beobachtungsreihen von der Art, wie sie in Figg. 6 bzw. 7 angedeutet sind, die sich in ihrer Gesamtheit natürlich nur in räumlicher Darstellung wiedergeben ließen, wofür z. B. der Fig. 6 eine Druckachse als dritte Ordinate anzugliedern wäre. Verbindet man dann die Strommaxima durch eine Linie, so erhält man die ausgezogenen Kurven der Fig. 10,



Wasserstoff, $J = 1{,}00 \times 10^{-3}$ Amp.

Fig. 10.

in denen die Beobachtungspunkte durch liegende Kreuzchen eingetragen sind. Sie bilden Kurven gleicher Spannung ($V = 82{,}7$ und 115,8 Volt) bei verändertem Drucke in Wasserstoff (Hauptstromstärke $J = 1{,}00$ Milliamp.). Die punktierte Kurve s wird später besprochen werden. Bei niedrigem Gasdrucke haben darnach die Ströme zwischen den Querelektroden bedeutend höhere Werte als bei höherem Drucke; der Abfall erfolgt, außer in den kleinsten Druckgebieten, in hyperbelähnlichen Kurven. Auch darauf soll im nächsten Abschnitte noch zurückgekommen werden.

Kennt man nun noch die Lage des negativen Glimmlichtes, das sich für den in Fig. 10 ausgemessenen Druckbereich von ca. $D = 0{,}6$ cm bis nach $D = 2{,}8$ cm verschoben

hat, so ist man imstande, z. B. aus den Figg. 7 und 10, sich eine räumliche Darstellung zu bilden, in der für jeden beliebigen Wert, von D, p und V der entsprechende Wert für i angegeben ist. Eine der Fig. 9 (für Wasserstoff) entsprechende Kurve erscheint dabei natürlich als Schnitt parallel der i, p-Ebene.

§ 9. Alle bisherigen Beobachtungen (außer Figg. 8 u. 9) wurden für eine Hauptstromstärke $J = 1{,}0$ Milliamp. angegeben. Mit *verändertem Hauptstrom* zeigen *die Werte des Querstromes merklich linearen Zusammenhang*, wie wohl auch zu erwarten ist. Natürlich dürfen aber wieder nur entsprechende

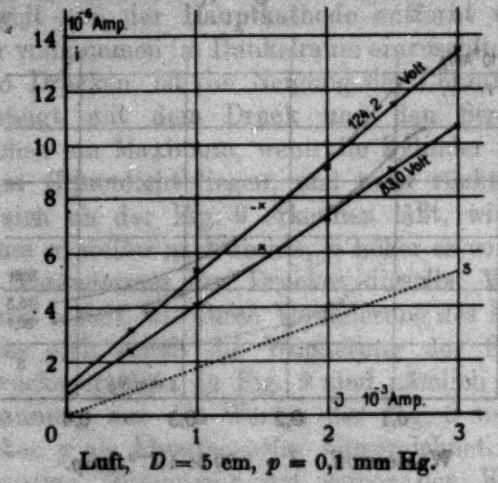


Fig. 11.

Punkte der Geisslerentladung verglichen werden, also z. B. die Maxima der Querströme im negativen Glimmlichte, wobei der Abstand D für jede Stromstärke neu eingestellt werden muß, da bekanntlich das Glimmlicht im Bereiche des anomalen Kathodenfalles, der für alle Untersuchungen in Betracht kam, seine Lage ändert.

Mit geringem Fehler kann man aber wohl auch bei konstantem Abstande in einiger Entfernung vom Maximum der Querströme arbeiten. Auf diese Weise wurden die Beobachtungen der Fig. 11 gewonnen, in Luft von $p = 0{,}1$ mm Hg; die Querelektroden waren 5 cm von der Hauptkathode entfernt. Es war also D etwa fünfmal so groß als der Hittorfsche Dunkelraum. In der Fig. 11 sind als Ordinaten die

Werte der Querströme für $V = 83{,}0$ und 124,2 Volt eingetragen, als Abszissen die dazugehörigen Hauptstromstärken J. Die Punkte schließen sich recht gut an die durchgelegten Geraden, die aber nicht durch den Nullpunkt gehen. Die der Figur beigegebene punktierte Gerade s wird wieder im nächsten Abschnitte besprochen werden.

III. Abschnitt.

Über die Ionisation im Geisslerrohr.

§ 10. J. J. Thomson versucht in seinem Lehrbuche[1]) die Beobachtungen von Stoletow und von von Schweidler[2]) über die Stromspannungskurven in lichtelektrischen Entladungen durch einen Ansatz von der Form

$$i = \frac{c_1 X}{d + c_2 X}$$

zu erklären, wobei i und X Stromstärke und elektrische Kraft zwischen den Elektroden, d den Diffusionskoeffizienten der Ionen durch das Gas und c_1, c_2 Konstante bedeuten. Es ist klar, daß dieselben Überlegungen sich auch auf die Beobachtungen dieser Arbeit anwenden lassen. Die Formel gibt aber keinen Aufschluß über den Bereich A der allgemeinen Fig. 1, der bei all meinen Beobachtungen mehr oder weniger stark ausgesprochen zu finden war und wiederholt durch besondere Messungen mit niederen Spannungen festgestellt wurde. Auch in den im Thomsonschen Lehrbuche wiedergegebenen Kurven ist dieser „Bereich A" übrigens teilweise deutlich ausgeprägt.

Aus anderen Gründen findet Hallwachs[3]): „Die Deutung des Verlaufes der Versuche bedarf daher noch weiterer Bearbeitung".

Man könnte auch meinen, daß der langsame Anstieg, den ich in meinen Charakteristiken statt der erwarteten Sättigungsströme erhielt, daher rühre, daß die Ionen, die die Querleitung besorgen, mit Geschwindigkeit zwischen die Zylinder kommen; es könnte dann sein, daß nach dem Ohmschen Gebiete mit weiter gesteigerter Spannung fortwährend

1) Thomson-Marx, Elektrizitätsdurchgang in Gasen. § 121. Teubner 1906.

2) l. c.

3) E. Marx, Handbuch der Radiologie, III. Band. p. 301. Leipzig 1916.

neue Ionen mit immer größerer Geschwindigkeit an die Querelektroden getrieben werden. Die Berechnung für einen ähnlichen Fall hat Heinrich Mache[1]) durchgeführt; er kommt zu einer Formel von der Form:

$$i = N \cdot \varepsilon \cdot v \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\bar{u} A l \pi^{3/2}}{v} c} e^{-c^2/\alpha^2} dc.$$

Hierin bedeutet unter anderen $N \cdot \varepsilon \cdot v$ die gesamte Ladungsmenge an Ionen, die in der Zeiteinheit die Zylinder durchströmt. Die an die Zylinder angelegte Spannung ist in A enthalten, und zwar dergestalt, daß A mit der Spannung proportional ist. Mit $\bar{u}$ ist die mittlere Geschwindigkeit der Ionen bezeichnet, und c bedeutet, angewendet auf unseren Fall, die molekulare Geschwindigkeit der einzelnen Ionen, die sich also nach dem Maxwellschen Gesetze verteilt.

Die Kurve, die dieser Macheschen Formel entspricht, ist z. B. in den Funktionentafeln von Jahnke und Emde[2]) nachzuschlagen. Man wird erkennen, daß sie eine ganz andere Gestalt hat, als die von mir beobachteten Kurven; sich sehr bald einer Sättigung nähert und nicht den konstanten Anstieg zeigt, abgesehen von dem fehlenden Bereiche A der Fig. 1. Es dürfte daher nicht angehen, die Machesche Formel zur Erklärung meiner Kurven zu verwenden.

Eine weitere Erklärungsmöglichkeit für das Entstehen solcher Stromspannungskurven könnte vielleicht in der Kolumnenionisation[3]) vorliegen, wie sie durch Radium und Röntgenstrahlen hervorgerufen wird. Es zeigt sich aber, daß die Kolumnenionisation die Sättigung insbesondere bei höheren Drucken beeinträchtigt, weshalb bei Beobachtungen über Kolumnenionisation meist Vielfache einer Atmosphäre angewendet werden. Im Geisslerrohr dürfte daher die Diffusion bzw. die freie Weglänge viel zu groß sein, als daß Kolumnenionisation zur Erklärung der beobachteten Charakteristiken herangezogen werden könnte.

---

1) H. Mache, Physik. Zeitschr. 4. p. 717. 1902/3.

2) Jahnke u. Emde, Teubner 1909.

3) Literatur siehe: St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität, Teubner 1916.

§ 11. Insbesonders bei derartigen Messungen in der Geisslerentladung scheint es mir naheliegend, sich einen anderen Vorgang aufzubauen, um den Gang solcher Kurven zu erklären. Ich denke mir, daß im Bereiche *B—C* der Fig. 1 zu dem Sättigungsstrom i_s ein Strom i' dadurch hinzutritt, daß die positiven Ionen durch ihr Auffallen auf die Nebenkathode neue Elektronen erzeugen, die sich allenfalls an Gasmoleküle ansetzen und sich als negative Ionen an der Stromleitung beteiligen. Es soll sich also derselbe Vorgang abspielen, den wir als maßgebend für die Geisslerentladung selbst annehmen. Demnach wäre der zwischen den Querelektroden gemessene Strom

$$i = i_s + i' . \tag{1}$$

Der erste Teil dieser Summe besteht aus den positiven und negativen Ionen, die an der betreffenden Stelle der Geisslerentladung in der Zeiteinheit erzeugt werden und sämtlich durch die Querspannung V an die Elektroden getrieben werden. Es ist dafür der bekannte Ausdruck

$$i_s = e\,(n_+ + n_-) = e\,n \tag{2}$$

zu schreiben.

Nun soll aber jedes positive Ion, das auf die Kathode auffällt, entweder am Metall oder an dem adhärierenden Gashäutchen ionisieren, d. h. durch seinen Anprall auf die Oberfläche eine Anzahl Elektronen bilden. Über diese Zahl kann man annehmen, daß sie proportional der kinetischen Energie des auffallenden Ions ist, also proportional der vom Ion durchlaufenen Spannung X. Es ergibt sich daher

$$i' = n_-'\,e = \nu\,n_+\,e\,X ,$$

da wir weiter annehmen wollen, daß auch jedes neu entstehende Ion durch die Spannung herausgetrieben wird, wir also auch für i' die Formel des Sättigungsstromes $n'\,e$ anwenden dürfen. In dieser Beziehung wäre, wie man leicht einsehen kann, ν die Zahl der Elektroden, die entsteht, wenn ein positives Ion, das einen Spannungsabfall von 1 Volt durchlaufen hat, auf die Kathode auffällt.

Es wird sich später (p. 396) zeigen, daß der Erfahrung besser genügt würde, wenn man annimmt, daß Oberflächen-

ionisation erst von einer gewissen Anfangsspannung X_0 an eintritt, wenn man also die obige Beziehung in der Form

$$i' = \nu n_+ e (X - X_0)$$

schreibt; doch soll dieser Wert X_0 vernachlässigt werden.

Über die Zahl der positiven Ionen kann man von vornherein keine weiteren Annahmen machen. Wenn sie auch in einzelnen Teilen des Geisslerrohres gegen die negativen Ionen überwiegen, so werden sie doch im allgemeinen nur einen Bruchteil a der n Ionen zwischen den Zylindern ausmachen, wobei a alle Werte von 0 bis 1 annehmen kann. Es läßt sich nun die Gleichung (1) auf die Form bringen:

$$i = en + a\nu ne X = i_0 (1 + a\nu X) . \tag{3}$$

Die Größe X hat für jedes positive Ion einen verschiedenen Wert, je nach seiner anfänglichen Entfernung von der Nebenkathode. Die einfachste Annahme ist die, daß X im Mittel proportional der an die Querelektroden angelegten Spannung V ist. Wir kommen also zu einer Beziehung

$$i = i_0 (1 + f . V) , \tag{3'}$$

wobei in die Funktion f die Konstanten a und ν einbezogen sind. Danach kann f eine Funktion des Abstandes D sein, soll aber von V nicht abhängen.

Außerdem enthält aber f noch einen weiteren Ausdruck. Obige Beziehung ist aufgestellt unter der Annahme, daß die positiven Ionen, die zwischen die Nebenelektroden kommen, keine Eigengeschwindigkeit besitzen, hervorgerufen durch das Feld Y im Geisslerrohr. Diese Annahme wird aber nur an wenigen Querschnitten zutreffen; im allgemeinen werden die Ionen mit Eigengeschwindigkeit in die Zylinderelektroden eintreten, wodurch die kinetische Energie der Ionen vermehrt wird. Wenn nun jener Teil der Energie, der als Oberflächenionisation zur Wirksamkeit kommt, wieder proportional X, bzw. V ist (was allerdings nur mit größter Annäherung der Fall sein dürfte), so wird durch ein Feld Y eine Vergrößerung der Funktion f hervorgerufen. Es ist mir leider nicht gelungen, für diese Überlegung einen befriedigenden mathematischen Ausdruck zu finden.

Tatsächlich erhält man für f innerhalb des Kathodenfalles unvergleichlich größere Werte, als im übrigen Geissler-

rohr, wie aus der Fig. 7 ersichtlich ist, in der f als Funktion des Abstandes D eingetragen ist. Zur Berechnung dienten die Beobachtungen von i und V, die den ausgezogenen Kurven der Figur zugrunde liegen, nach der Formel

$$f = \frac{i_2 - i_1}{V_2 i_1 - V_1 i_2}, \tag{4}$$

die sich leicht aus Gleichung (3′) ergibt. Demnach sind in Fig. 7 unter Verwendung der früheren Maßzahlen die Ordinaten 1/100 1/Volt. Man erkennt, daß f im leuchtenden Glimmlichtsaum ein Minimum $f = 0{,}009$ 1/Volt aufweist, was ziemlich wichtig erscheint, da die Kurven von i_1 und i_2 selbst dort keine besonderen Auffälligkeiten zeigten, außer vielleicht einen etwas unregelmäßigeren Gang, als er in der Zeichnung wiedergegeben ist. Da aber bekanntlich im Glimmlichtsaume das Gefälle Y praktisch gleich Null zu setzen ist, so ist das Auftreten eines Minimums von f nach dem Obigen leicht erklärlich.

§ 12. Man kann nun durch eine angenäherte Überschlagsrechnung einen Rückschluß von $f_{\text{min.}}$ auf ν ziehen. Es ist nämlich, wenn die Wirkung von Y verschwindet, nach der Definition

$$f_{\text{min.}} = \frac{X}{V}\,\alpha\nu.$$

In einem Zylinderkondensator ist nun die Feldstärke in irgend einem Punkte mit dem Abstande ϱ von der Achse gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{V}{\lg R/r},$$

in dem V wie bisher die an die Zylinder angelegte Spannung, R und r die Halbmesser des äußeren bzw. des inneren Zylinders bedeuten. Es ist daher die Größe X, der Spannungsunterschied, den ein Ion durchlaufen muß, um an die Kathode, das ist an den äußeren Zylinder getrieben zu werden, gleich.

$$X = \int_{\varrho}^{R} \frac{V}{\lg R/r} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} = V \frac{\lg R/\varrho}{\lg R/r}.$$

Wenn man zur Überschlagsrechnung mit P den Halbmesser derjenigen Zylinderfläche bezeichnet, die von den n zwischen den Zylindern entstehenden Ionen ebensoviele einschließt,

als ausschließt, so ist $P^2 = (R^2 - r^2)/2$ und daher als Mittelwert

$$\bar{X} = \tfrac{1}{2} V \frac{\lg \frac{2R^2}{(R^2 - r^2)}}{\lg R/r}$$

und nach den Angaben von p. 376 $\bar{X}/V = 0{,}24$.

Im Glimmlichtsaum kann man aber positive und negative Ionen in gleicher Anzahl annehmen, d. h. $a = 0{,}5$ setzen. Dann ist $f_{\text{min.}} = \nu \,.\, 0{,}24 \,.\, 0{,}5$ und daher

$$\nu = \frac{0{,}009}{0{,}5 \cdot 0{,}24} = 0{,}075 \frac{\text{Elektronen}}{\text{Volt}} .$$

Diese Zahl bedeutet, daß jedes positive Wasserstoffion, das einen Spannungsunterschied von 100 Volt durchlaufen hat, im Mittel ca. 7,5 Elektronen durch seinen Aufprall auf eine Aluminiumkathode aus dieser loslöst oder, mit anderen Worten, daß zur Loslösung eines Elektrons aus einer solchen Kathode jedes Wasserstoffion einen Spannungsunterschied von ca. 13 Volt durchlaufen muß.

Innerhalb des negativen Glimmlichtes steigt f wieder an, um dann (auch im Faradayschen Dunkelraum) anscheinend konstant zu bleiben. Doch geben darüber meine Messungen keinen unbedingt verläßlichen Aufschluß, da sich in meinem Beobachtungsmaterial widersprechende Ergebnisse finden, die wohl hauptsächlich ihre Ursache in kleinen Veränderungen der gegenseitigen Elektrodenstellung im Laufe der Zeit haben dürften.

Die Zahl ν scheint in weitem Bereiche vom Drucke unabhängig zu sein, denn die Minima der Funktion f haben bei den Beobachtungen, die der Fig. 10 zugrunde liegen, wesentlich denselben Wert innerhalb der allerdings nicht unbeträchtlichen Beobachtungsfehler. Nur bei den niedrigsten Drucken scheint $f_{\text{min.}}$ etwas zu steigen, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht, die in die Fig. 10 nicht eingetragen ist, um die Zeichnung nicht zu verwirren:

p	= 0,43	0,30	0,25	0,20	0,16	0,13	0,11
$f_{\text{min.}}$	= 0,008$_8$	0,010$_8$	0,009$_8$	0,009$_8$	0,010	0,010	0,009$_8$

p	= 0,090	0,070 mm Hg
$f_{\text{min.}}$	= 0,011$_8$	0,011 cm/Volt.

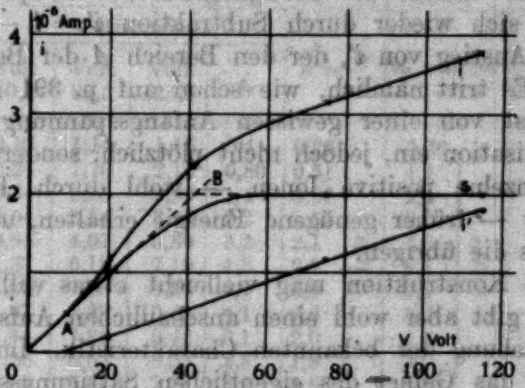
Hingegen scheint die Zahl ν von der Gasart abzuhängen; denn die Funktion f zeigt für Luft zwar einen ähnlichen Ver-

lauf wie für Wasserstoff, es findet sich aber $f_{\text{min.}} = 0{,}007$ und nach der vorigen Überschlagsrechnung daher $\nu = 0{,}0058$ Elektronen auf ein Volt, also wesenrlich weniger als bei Wasserstoff.

Wenn die Überlegungen, die zur Gleichung (3) geführt haben, richtig sind, so müssen sie sich ebensogut auf die lichtelektrischen Erscheinungen anwenden lassen, wo die Verhältnisse viel einfacher liegen, da kein Gefälle parallel den Platten vorhanden ist. Die positiven Ionen, die zur Oberflächenionisation kommen sollen, und das Eintreten der Sättigung verhindern, sind ja von Dember[1]) nachgewiesen worden.

§ 13. Ebenso wie f läßt sich natürlich aus Gleichung (3') der Sättigungsstrom i_s berechnen, nach der Formel

$$(5) \qquad i_s = \frac{i_1 V_2 - i_2 V_1}{V_2 - V_1}.$$



Luft, $J = 1{,}3 \times 10^{-3}$ Amp., $D = 0{,}5$ cm, $p = 0{,}3$ mm Hg.

Fig. 12.

In Fig. 12 ist eine Stromspannungskurve i wiedergegeben, die in Luft von $p = 0{,}30$ mm Hg, mit einer Hauptstromstärke $J = 1{,}00$ Milliamp., 0,5 cm von der Kathode entfernt, aufgenommen wurde. Berechnet man sich aus den beiden Beobachtungspunkten im geradlinigen Bereich der Kurve mit den Koordinaten

$$i_1 = 3{,}19, \quad i_2 = 3{,}80 \text{ Mikroamp.},$$
$$V_1 = 75{,}8, \quad V_2 = 115{,}2 \text{ Volt}$$

1) Vgl. E. Marx, Handbuch der Radiologie, III. Bd.; W. Hallwachs, § 19, „Lichtelektrische Kanalstrahlen".

den Sättigungsstrom nach der Formel (5), so erhält man

$$i_s = \frac{115{,}2 \times 3{,}19 - 75{,}8 \times 3{,}80}{115{,}2 - 75{,}8} = \frac{79}{39{,}4} = 2{,}0 \text{ Mikroamp.}^1)$$

Dieser Wert wird nun in der Zeichnung als Parallele zur Abszissenachse eingetragen (Kurve s). Es folgt [aus Gleichung (1)], daß der Strom $i' = i - i_s$, der durch Oberflächenionisation hervorgerufen wird, mit der Neigung

$$di'/dV = di/dV = f \cdot i_s$$

einzuzeichnen ist. Setzt man die Kurve i' geradlinig gegen die kleineren Spannungen hin fort, so kann man umgekehrt durch die Subtraktion $s = i - i'$ die Krümmung der Kurve s bei B bilden. Legt man nun weiter an die beobachtete Kurve i im Gebiete der niedrigsten Spannungen die Tangente, die dem Ohmschen Verlaufe der Sättigungskurve s entsprechen soll, so ergibt sich wieder durch Subtraktion $i'' = i - s$ der allmähliche Anstieg von i'', der den Bereich A der Beobachtung erklärt. Es tritt nämlich, wie schon auf p. 391 angedeutet wurde, erst von einer gewissen Anfangsspannung an Oberflächenionisation ein, jedoch nicht plötzlich, sondern langsam, indem einzelne positive Ionen — wohl durch Brownsche Bewegung — früher genügend Energie erhalten, um zu ionisieren, als die übrigen.

Diese Konstruktion mag vielleicht etwas willkürlich erscheinen, gibt aber wohl einen anschaulichen Aufschluß über die Entstehung der bekannten Charakteristik. Im folgenden wird nur das Gebiet des eigentlichen Sättigungsstromes besprochen werden, dessen Abhängigkeit von den Größen D, p und J in recht befriedigender Weise verläuft.

§ 14. Unter § 6 war gesagt worden, daß die Maxima der Kurven gleicher Spannung um so weiter in das negative Glimmlicht hineinrücken, je höher die Spannungen sind, die an die Querelektroden angelegt werden (Fig. 6). Wenn aber aus den beiden Kurven höchster Spannung — 79,0 und 118,5 Volt in Fig. 6 oder 88,0 und 114,0 Volt in Fig. 7 —, deren Stromwerte im geradlinigen Teile der Charakteristik liegen, die Kurve des Sättigungsstromes nach Formel (5) be-

1) Aus dieser kleinen Rechnung geht hervor, daß die Größe i_s bedeutend ungenauer wird, als die beobachteten i, was natürlich auch für die Berechnung von f gilt.

rechnet wird, so ergibt sich eine Kurve, wie sie z. B. in Fig. 7 *s* wiedergegeben ist. Diese Kurve weist auch ein Maximum auf, das aber nicht unter dem Maximum der beobachteten Kurven liegt, sondern gerade über dem (in Fig. 7 nicht gezeichneten) Maximum der Kurven niederer Spannung, die für die Berechnung von i_s gar nicht benutzt werden. Diese Verschiebung des Maximums ins negative Glimmlicht mit steigender Potentialdifferenz ist also nur durch den Anstieg der Funktion f verursacht und hat natürlich nichts mit der primär an der betreffenden Stelle des Geisslerrohres vorhandenen Zahl der Ionen zu tun.

Tabelle 1.

Wasserstoff: $p = 0{,}14$ mm Hg, $J = 1{,}0$ Milliamp.

	1	2	3	4	5	6	7	8
		i Mikroamp.						
	D cm	Volt 10,2	Volt 83,3	Volt 125,0	i_s	$n = \frac{i_s}{e}$	$n_0 = n/\text{cm}^3$	$\beta = \frac{n_0}{\alpha} \cdot 100$
Glimmlicht	0,25	0,15	1,14	1,15	0,41	0,26	0,56	0,11
	0,50	0,24	1,70	2,15	0,80	0,51	1,1	0,21
	0,75	0,34	2,35	2,89	1,4	0,90	2,0	0,38
	1,00	0,54	3,34	3,89	2,3	1,54	3,0	0,58
	1,25	0,86	4,97	5,80	3,3	2,1	4,6	0,89
Dunkelraum	1,50	1,37	6,18	7,10	4,3	2,8	6,1	1,18
	1,75	1,81	7,06	8,20	4,7	3,0	6,5	1,25
	2,00	1,67	8,33	10,46	4,1	2,6	5,7	1,10
	2,50	1,44	7,34	9,42	3,1	2,0	4,4	0,85
	3,00	1,26	6,63	8,53	2,8	1,8	3,9	0,75
	3,50	1,08	5,64	7,21	2,6	1,66	3,6	0,69

$\times 10^{12}$ $\times 10^{12}$

Ebenso ist in der Tab. 1, der Beobachtungen in Wasserstoff vom Drucke $p = 0{,}14$ mm Hg bei einer Hauptstromstärke $J = 1{,}00$ Milliamp. zugrunde liegen, die Verschiebung des Maximums zu erkennen. Die Maxima der Werte für $i_{10,2}$ und i_s der ersten und fünften Reihe liegen bei $D = 1{,}75$ cm (wobei D wieder den Abstand der Querelektroden von der Hauptkathode bezeichnet), während $i_{83,0}$ und $i_{125,0}$ — in der 3. und 4. Reihe —, aus denen i_s berechnet wurde, ihre höchsten Werte bei $D = 2{,}00$ cm haben.

Gegen die beiden Dunkelräume zu nimmt der Sättigungsstrom ab, und zwar, wie besonders aus Fig. 7 deutlich zu erkennen ist, gegen die Kathode steiler. Bemerkenswert ist,

daß der Abfall hier ziemlich linear erfolgt, um dann umzubiegen, also wieder einen von den beiden der Berechnung zugrunde liegenden Kurven abweichenden Verlauf zeigt. In dem der Kathode nahe liegenden Teil des Hittorfschen Dunkelraumes ist die Leitfähigkeit außerordentlich gering. Für ganz schwache Drucke ergab es sich aber bei einer Anzahl von Beobachtungen, daß i_s in der nächsten Nähe der Kathode, also im Gebiete der „ersten Schicht", ein wenig ansteigt. Im Verlaufe der beobachteten Kurven selbst war von einem solchen Anstieg nie etwas zu bemerken, die Kurven von i fallen gegen die Kathode zu ohne Ausnahme steil ab. Natürlich kann dieser Anstieg von i_s nicht groß sein, da nur höchstens ein kleiner Rand der Querelektroden in die dünne erste Schicht eintauchen kann.

In der 6. Reihe der Tab. 1 ist in der Bezeichnungsweise der Gleichung (2) die Zahl der Ionen berechnet, die sich am Zustandekommen des jeweiligen Sättigungsstromes bet iligen ($e = 1{,}56 \times 10^{-19}$ Coulomb). Dividiert man diese Zahlen durch den Rauminhalt zwischen den Zylindern, der nach den Angaben auf p. 376 0,46 ccm betrug, so erhält man n_0, die Zahl der Ionen, die im Kubikzentimeter an der betreffenden Stelle der Geisslerröhre in der Zeiteinheit durch die Hauptentladung gebildet wird. Reihe 7 der Tabelle zeigt, daß für den angegebenen Druck und die angegebene Hauptstromstärke in der am besten leitenden Schicht des negativen Glimmlichtes ca. $6{,}5 \times 10^{13}$ Ionen im Kubikzentimeter erzeugt werden. Es wird also nur ein Bruchteil der Gasmoleküle ionisiert; denn für den vorliegenden Fall sind ohne Berücksichtigung der Temperatur im Kubikzentimeter

(6) $z = 2{,}8 \times 10^{19} \times p/760 = 37 \times 10^{15} \cdot 0{,}14 = 5{,}2 \times 10^{15}\, p$

Moleküle anzunehmen, wenn für die Loschmidtsche Zahl $2{,}8 \times 10^{19}$ gesetzt wird. Die Zahl

$$\bar{\beta} = \frac{n_0}{z} \cdot 100$$

in der 8. Reihe gibt an, wie viele unter 100 Gasmolekülen im betreffenden Querschnitte des Geisslerrohres ionisiert werden.

§ 15. Die Abhängigkeit der Größe β vom Drucke p ist in der 7. Reihe der Tab. 2 wiedergegeben, die denselben Beobachtungen entspricht wie Fig. 10. Der aus den beob-

achteten Maximalströmen $i_{32,7}$ und $i_{115,8}$ berechnete Sättigungsstrom $i_{s\,(max.)}$ ist in Fig. 10 durch stehende Kreuzchen eingezeichnet (die Ringelchen sind einer anderen Beobachtungsreihe mit denselben Versuchsbedingungen entnommen) und in Tab. 2, 8. Reihe, eingetragen. Alle Buchstaben und Bezeichnungen haben hier dieselbe Bedeutung wie vorher. $D_{max.}$ bedeutet den zu $i_{s\,(max.)}$ gehörigen Abstand der Querelektroden von der Hauptkathode. In Reihe 8 ist die Zusammenstellung von p. 394 wiederholt.

Tabelle 2.

Wasserstoff: $J = 1{,}00$ Milliamp.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	x	$i_{s\,(max.)}$	$D_{max.}$	n	n_0	$\bar{\beta}$	$f_{min.}$
0,069	2,6	4,3	2,8	$2{,}7_5$	6,0	2,3	0,011
0,090	3,4	4,1	$2{,}1_5$	2,6	5,7	1,68	$0{,}011_5$
0,11	4,1	3,9	1,7	2,5	5,4	$1{,}3_2$	$0{,}009_5$
0,13	4,8	3,4	1,5	$2{,}1_7$	4,7	0,98	0,010
0,16	6,1	3,5	$1{,}2_5$	$2{,}2_5$	4,9	0,80	0,010
0,20	7,7	2,7	1,1	$1{,}7_3$	$3{,}7_5$	0,49	$0{,}009_5$
0,25	9.5	2,2	1,0	$1{,}4_1$	$3{,}0_7$	$0{,}32_5$	$0{,}009_5$
0,30	11,5	2,0	0,9	$1{,}7_8$	$2{,}7_8$	$0{,}24_2$	$0{,}010_5$
0,43	16,2	1,3	0,65	$0{,}8_3$	1,70	$0{,}10_5$	$0{,}008_5$
mm Hg	$\times 10^{15}$	Mikro-amp.	cm	$\times 10^{13}$	$\times 10^{13}$	%	$\frac{\text{cm}}{\text{Volt}}$

Man findet, daß $\bar{\beta}$ mit abnehmendem Drucke rasch wächst, und zwar, wie man sich leicht überzeugen kann, mit Ausnahme der geringsten Drucke umgekehrt proportional dem Quadrat des Druckes:

$$\bar{\beta} = \frac{\text{konst.}}{p^2} = \frac{0{,}020}{p^2}. \tag{7}$$

So wird z. B. im bestleitenden Querschnitte des negativen Glimmlichtes bei einem Drucke von $p = 0{,}18$ mm Hg im Mittel jedes hundertste Molekül ionisiert, während bei 0,48 mm Hg nur jedes tausendste Molekül eine Einheitsladung trägt, wobei die Beobachtungen ergaben, daß zwischen Wasserstoff und Luft kein wesentlicher Unterschied besteht.

Wie aber weiter unten gezeigt werden wird, hat $\bar{\beta}$ nur die Bedeutung einer vorläufig eingeführten Rechnungsgröße, die einen Mittelwert darstellt, genommen über die Länge der Querelektroden.

Berücksichtigt man die Gleichungen (2), (6) und (7), so erhält man aus der Definition von β die Beziehung

$$(8) \qquad i_{\infty(\max.)} = \frac{0{,}55}{p} \text{ Mikroamp.},$$

die besagt, daß die Sättigungsströme einen hyperbelartigen Abfall aufweisen mit steigendem Drucke. Die dieser Gleichung entsprechende Kurve ist in Fig. 10 *s* gezeichnet und zeigt, außer bei den niedrigsten Drucken, gute Übereinstimmung mit den Beobachtungspunkten.

§ 16. Die Beziehung (8) läßt sich auch leicht aus theoretischen Überlegungen ableiten, wenn man den Vorgang an der Hauptkathode betrachtet.

Ich nehme an, daß durch die Oberflächenionisation an der Flächeneinheit der Hauptkathode $\mathfrak{N}$ Elektronen frei werden, deren kinetische Energie während der Wanderung durch den Hittorfschen Dunkelraum wächst und in jedem Augenblicke dem gesamten durchflogenen Potentialgefälle Y proportional sein soll. Wenn $\bar{Y}$ den gesamten Kathodenfall bedeutet, dann wird die kinetische Energie der $\mathfrak{N}$ Elektronen bei ihrer Ankunft im negativen Glimmlicht gleich $\mathfrak{N} \cdot e \cdot \bar{Y}$ sein. Nun steht aber bekanntlich mit großer Annäherung der Kathodenfall in geradem Verhältnis zur freien Weglänge λ der Elektronen und ist daher verkehrt proportional dem Drucke; es ist also

$$\bar{Y} \sim \lambda \sim 1/p$$

und bei konstantem Hauptstrom

$$(9) \qquad \mathfrak{N} e \bar{Y} \sim \mathfrak{N} \lambda \sim \mathfrak{N}/p.$$

Dieselbe Beziehung wie für λ muß natürlich auch für „einander entsprechende Stellen" des Geisslerrohres gelten, worunter z. B. bei verschiedenen Drucken solche Abstände D gemeint sind, die gleichen Vielfachen von λ entsprechen, also müssen insbesondere solche Abstände die Entfernungen der Kathode zum bestleitenden Querschnitt des negativen Glimmlichtes sein, die in der Tab. 2 mit $D_{\max.}$ bezeichnet wurden. Tatsächlich ergab sich auch aus einer größeren Zahl von Beobachtungen, allerdings mit großen Abweichungen, da die Messungen nicht gerade darauf angestellt wurden, für Wasserstoff im Mittel ungefähr

$$p \cdot D_{\max.} = 0{,}25.$$

Da diese Größe offenbar eine Materialkonstante ist, so muß sie durch Verunreinigungen des Gases, die etwa aus den Elektroden stammen können, wesentlich beeinflußt werden.

Nun möge zur leichteren Darstellung die Thomsonsche Theorie vereinfacht werden. Es sollen nämlich die $\mathfrak{N}$ aus der Kathode stammenden Elektronen den ganzen Dunkelraum durchfliegen und erst, wenn sie auf diese Weise das Maximum an Energie aufgenommen haben, zur Stoßionisation gelangen, wobei jedes von ihnen μ Ionen erzeugt. Dann werden im ganzen

$$\mathfrak{N} e \overline{Y} \sim N = \mu \mathfrak{N} \tag{10}$$

im negativen Glimmlicht erzeugt. Damit aber jedes der Elektronen auf ein Gasmolekül trifft, wird eine von der Gasdichte abhängige Strecke L notwendig sein, die die betreffenden Elektronen vermöge ihrer Trägheit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchfliegen, da im negativen Glimmlicht das Potentialgefälle verschwindet, wie insbesonders aus den schönen Messungen von Aston[1]) hervorgeht. Daher werden die N neu entstehenden Ionen über einen Raum von der Länge L und dem Querschnitt Eins gleichmäßig verteilt sein und dort eine Dichte

$$\varrho = N/L$$

hervorrufen. Da aber L offensichtlich in geradem Verhältnis zur freien Weglänge steht, also

$$L \sim \lambda \sim 1/p \tag{11}$$

und ebenso

$$N \sim \lambda \sim 1/p \tag{12}$$

ist, wie aus den Beziehungen (9) und (10) hervorgeht, so ergibt sich, daß die *Ionendichte ϱ unabhängig vom Drucke* sein muß, ein Satz, den schon Kurt Eisenmann[2]) und J. Stark[3]) in anderer Form ausgesprochen haben.

Um von der Ionendichte auf den Sättigungsstrom zurückzuschließen, werden zwei Fälle zu unterscheiden sein; es kann nämlich, je nach dem Gasdrucke, L kleiner oder größer sein als die Länge der Zylinderelektroden.

1) l. c.

2) Kurt Eisenmann, Über die Potentialverteilung im dunklen Kathodenraum, Verh. d. D. Physik. Ges. 14. p. 297—314. 1912.

3) J. Stark, Elektrizität in Gasen, J. A. Barth, p. 265. 1902.

Im ersten Falle ist daher die Gesamtzahl der zwischen den Zylindern in der Sekunde erzeugten Ionen

$$n = N \cdot q \,, \tag{13}$$

wenn q den Flächeninhalt zwischen den Zylinderelektroden bedeutet; denn es sind in diesem Falle alle in dem betreffenden Querschnitte erzeugten Ionen auch wirklich zwischen den Zylindern eingeschlossen. Aus den Beziehungen (2), (12) und (13) ergibt sich also für den Sättigungsstrom an der bestleitenden Stelle des Entladungsraumes:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{s\,(\max.)} = N \cdot q \cdot e \sim q \cdot e/p \,, \\ \text{oder} \\ i_{s\,(\max.)} = \dfrac{\text{konst.}}{p} \,, \end{array} \right. \tag{8'}$$

wobei die Konstante durch die Gleichung (8) schon gegeben ist.

Da sich aus den Messungen ergeben hat, daß zwischen Wasserstoff und Luft kein wesentlicher Unterschied bezüglich des Maximums der Sättigungsströme besteht, so muß dies auch für n und N gelten, d. h., daß das Produkt $\mu\,\mathfrak{R}$ anscheinend von der Natur des Gases unabhängig ist, was allerdings erst genauer und bei mehreren Gasen geprüft werden müßte.

Im zweiten Falle, wenn nämlich der Druck so niedrig ist, daß L größer wird als die Länge l der Zylinder, so ist die Zahl der zwischen den Zylindern vorhandenen Ionen

$$n = \varrho \,.\, q \,.\, l \,; \tag{14}$$

es gilt dann also nicht mehr die Gleichung (13), und man erhält jetzt statt der Gleichungen (8') bei konstantem Hauptstrom:

$$i_{s\,(\max.)} = e \cdot \varrho \cdot q \cdot l = \text{Konst.}, \tag{15}$$

eine Gleichung, die besagt, daß die Sättigungsstromstärke — wenigstens im Gebiete der besten Leitfähigkeit — bei niedrigen Drucken unabhängig vom Drucke ist. Vollkommen ist diese Forderung in der Fig. 10 nicht erfüllt; es weicht aber, wie erwähnt, die Kurve, die durch die Beobachtungspunkte (Ringelchen und stehende Kreuzchen) zu legen ist, in Gebieten höherer Verdünnungen (von 0,1 mm Hg abwärts) deutlich von der gezeichneten Hyperbel ab und scheint zu einer Wagrechten umbiegen zu wollen. Außerdem zeigen

Beobachtungen von der Art wie Fig. 7, die bei niedrigeren Drucken aufgenommen wurden, eine wesentliche Verflachung des Strommaximums, insbesonders aber des Maximums des Sättigungsstromes, wie es die eben entwickelte Vorstellungsweise verlangt.

Leider war es mir nicht möglich, bei noch niedrigeren Drucken, als in Fig. 10 angegeben, Beobachtungen zu machen, da die mir zur Verfügung stehende Hochspannungsbatterie nicht ausreicht, um den Hauptstrom bei solchen Drucken in der erforderlichen Stärke zu erhalten.

Man kann aber immerhin aus den in Fig. 10 angegebenen Beobachtungen bei niederen Drucken ersehen, daß im Gebiete der besten Leitfähigkeit sich der Sättigungsstrom im Mittel ungefähr der Größe

$$i_{s\,(max.)} = 4{,}2 \text{ Mikroamp.}$$

nähert und nach der Bezeichnungsweise der Tab. 2 daher unabhängig vom Drucke

$$n_0 = 6 \,.\, 10^{13}$$

Ionen im Kubikzentimeter Gas vorhanden sind. Die Zahl der Ionen unter hundert Gasmolekülen folgt also auch nicht der Gleichung (7), sondern soll richtiger lauten

$$(7') \qquad \beta = \frac{n_0}{x} \cdot 100 = \frac{n_0 \cdot 100 \cdot 760}{2{,}8 \cdot 10^{19} \cdot p} = \frac{0{,}16}{p},$$

während eben die auf p. 399 gegebenen Zahlen nur dadurch vorgetäuscht werden, daß die Querelektroden zu große Dimensionen hatten.

§ 17. Die vorstehenden Zahlen beziehen sich auf die Stromstärke $J = 1$ Milliamp. bzw. nach den Angaben von p. 376 auf eine Stromdichte von 0,088 Milliamp. für 1 qcm. Wenn man Proportionalität der Ionisation mit der Stromdichte annimmt, wozu der nächste Paragraph Berechtigung geben wird, so ergibt sich für eine Stromdichte von 1 Milliamp./qcm in der bestleitenden Schicht des negativen Glimmlichtes die Zahl der im Kubikzentimeter erzeugten Ionen unabhängig vom Drucke zu $16 \,.\, 10^{14}$ und die Zahl der Ionen unter 100 Gasmolekülen zu $4{,}2/p$, wobei p den Druck in Millimeter Hg angibt.

Die wenigen in der Literatur auffindbaren Zahlenangaben über den Ionengehalt im Geisslerrohr lassen sich nicht unmittelbar mit meinen Beobachtungen vergleichen, da sie unter

vollkommen verschiedenen Verhältnissen entstanden sind und sich auf die im Gleichgewichtszustand im Rohr vorhandenen Ionenzahlen beziehen, während ich die in der Zeiteinheit im Kubikzentimeter entstehenden Ionenzahlen beobachtete, und zwar insbesonders im ionenreichsten Teil des negativen Glimmlichtes (n_0). Ich möchte aber versuchen, über die Zahlen, die ich in der Literatur vorfinden konnte, einen Überblick zu geben, da sich daraus Aufschlüsse über die Wiedervereinigung im Geisslerrohr — wenigstens der Größenordnung nach — entnehmen lassen; denn es ist die Halbwertszeit der Wiedervereinigung bekanntlich gleich dem Quotienten aus der im stationären Zustande befindlichen Ionenzahl und der Zahl der in der Zeiteinheit entstehenden Ionen.

Da ist zunächst eine Arbeit von E. Riecke über „freie Elektrizität in Geisslerröhren".[1]) Riecke gibt hier eine Tabelle für die räumliche Ladungsdichte in verschiedenen Abständen s von der Anode; die Kathode scheint in seinem Rohre 88,7 cm von der Anode entfernt gewesen zu sein. Rieckes Beobachtungen erstrecken sich auf dreierlei Stromstärken und zwei Drucke; er berechnet die räumliche Dichte mit Hilfe der Quellengleichung aus Beobachtungen über das Gefälle. Über die Lage der Leuchtgebilde macht Riecke leider keine Angaben. Aus der Dichte läßt sich nun unter Annahme des Elementarquantums zu $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh. die Zahl der im Kubikzentimeter im Überschusse vorhandenen Ionen eines Vorzeichens und unter der Zuhilfenahme der Loschmidtschen Zahl zu $2{,}8 \cdot 10^{-19}$ der Ionenüberschuß eines Vorzeichens unter 100 Molekülen berechnen. Die so berechneten Zahlen sind in den Tabb. 3 und 4 wiedergegeben, wobei das Vorzeichen die Art der Ladung des Überschusses andeutet. Unter n_0 und β sind die Zahlen eingezeichnet, die sich aus dieser Arbeit ergeben würden, wenn Proportionalität mit der Stromstärke und die Formel (7) als richtig angenommen werden.

Es ist bemerkenswert, daß die Rieckeschen Zahlen keine Proportionalität mit der Stromstärke zeigen; die Abhängigkeit der Rieckeschen Werte von der Stromstärke scheint im Gegenteil sehr kompliziert zu sein, was vielleicht zum großen Teile darauf zurückzuführen ist, daß Riecke, im Gegensatze zu den Versuchen, über die hier berichtet wird, mit normaler Ent-

1) E. Riecke, Wied. Ann. 43. p. 220. 1897.

Tabelle 3.

mm Hg	Stromdichte Milliamp./cm²	Ionenüberschuß im Kubikzentimeter $s = 0$ bis 2,6 cm	$s = 29{,}4$ cm	$s = 31{,}5$ cm	$s = 32{,}6$ cm	$s = 33{,}7$ cm	n_0	T
0,6	0,0084	$-0{,}00098 \times 10^{10}$	$+0{,}00079 \times 10^{10}$	$+0{,}00128 \times 10^{10}$	$+0{,}00335 \times 10^{10}$	$+0{,}233 \times 10^{10}$	$0{,}14 \times 10^{14}$	$0{,}17 \times 10^{-3}$
	0,0292	„	$+0{,}00064 \times 10^{10}$	$+0{,}00100 \times 10^{10}$	$+0{,}00189 \times 10^{10}$	$+0{,}760 \times 10^{10}$	$0{,}48 \times 10^{14}$	$0{,}16 \times 10^{-3}$
	0,0642	„ „	„	$+0{,}00096 \times 10^{10}$	$+0{,}00220 \times 10^{10}$	$+3{,}00 \times 10^{10}$	$1{,}05 \times 10^{14}$	$0{,}29 \times 10^{-3}$
0,2	wie oben	$-0{,}00060 \times 10^{10}$	wie oben	wie oben	wie oben	wie oben	wie oben	wie oben

Tabelle 4.

mm Hg	Stromdichte Milliamp./cm²	Ionenüberschuß unter 100 Molekülen $s = 33{,}7$ cm	β
0,6	0,0084	$+0{,}106 \times 10^{-4}$	0,064
	0,0292	$+0{,}345 \times 10^{-4}$	0,22
	0,0642	$+1{,}36 \times 10^{-4}$	0,48
0,2	wie oben	$+0{,}31 \times 10^{-4}$	0,19
		$+1{,}02 \times 10^{-4}$	0,65
		$+4{,}05 \times 10^{-4}$	1,4

ladung beobachtete, also mit nicht vollkommen vom Glimmlicht bedeckter Kathode, wodurch die Berechnung der Stromdichte aus der Elektrodenoberfläche und der Stromstärke ihren Sinn verliert. Die Unabhängigkeit der Ionendichte vom Drucke ist auch bei Riecke größtenteils erfüllt; nur in der Nähe der Anode ist die Dichte des Ionenüberschusses bei kleinerem Drucke geringer.

In Tab. 3 sind unter T die Halbwertszeiten berechnet, die sich ergeben aus dem Vergleich der Rieckeschen Zahlen für $s = 33{,}7$ cm mit n_0. Es ist auffällig, daß danach die Halbwertszeit unabhängig vom Druck und bei konstantem Druck nicht ganz unabhängig von

der Stromdichte sein soll. Da die Rieckeschen Zahlen nur den Ionenüberschuß eines Vorzeichens angeben, kann die daraus berechnete Halbwertszeit nur eine untere Grenze angeben.

J. Stark[1]) berechnet die Ionisation in der positiven Säule bei 7,6 mm Hg-Druck und einer Stromdichte von 0,565 Milliamp./qcm zu $2{,}69 \cdot 10^{13}$ Ionen im Kubikzentimeter, wofür ich unter gleichen Verhältnissen $n_0 = 8{,}9 \cdot 10^{14}$ berechnen würde; weiter findet Stark aus seinen Beobachtungen, daß in der positiven Säule „weniger als $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ Proz. der Gasmoleküle in positive und negative Ionen zerlegt" sind, während ich unter diesen Verhältnissen finden würde, daß im negativen Glimmlichte ca. $\beta = 0{,}32$ Proz. der Moleküle zerlegt werden.

Ähnliche Zahlen ergeben Angaben von R. Seeliger[2]), der anscheinend die Beobachtungen von Stark nachgerechnet hat, nämlich bei Seeliger in der positiven Säule unter einem Luftdruck von 4 mm Hg und 0,565 Milliamp./qcm Stromdichte $8{,}5 \cdot 10^{11}$ Ionen im Kubikzentimeter und $8{,}10^{-4}$ Proz., wofür aus meinen Messungen im negativen Glimmlichte $n_0 = 8{,}9 \cdot 10^{14}$ und $\beta = 0{,}60$ Proz. zu berechnen sind.

Die Zahlen von Stark und Seeliger sind aus der Leitfähigkeit berechnet unter Zuhilfenahme der Differenz (statt der Summe) der Ionengeschwindigkeiten aus Beobachtungen des Halleffektes und geben daher nur eine obere Grenze für die im Kubikzentimeter der positiven Säule im Gleichgewichte bestehenden Ionen an. Es ergeben sich nun die Halbwertszeiten nach Stark zu $8 \cdot 10^{-3}$ Sek. und nach Seeliger zu $0{,}4 \cdot 10^{-3}$ Sek., die mit den früheren nach Riecke berechneten einigermaßen in guter Übereinstimmung stehen; denn auch sie dürften nur eine untere Grenze angeben, da die Ionendichte in der positiven Säule unvergleichlich geringer ist als im negativen Glimmlichte, wodurch die Halbwertszeit mehr beeinflußt werden dürfte, als durch die erwähnte Benutzung der Geschwindigkeitsdifferenz an Stelle der Geschwindigkeitssumme.

Wesentlich tiefer rückt die untere Grenze der Halbwertszeit, wenn man Angaben von Townsend[3]) über die Ionen-

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. p. 269. J. A. Barth, Leipzig 1902.

2) E. Marx, Handbuch der Radiologie. III. Bd. p. 67. Leipzig 1916.

3) J. S. Townsend, Electricity in Gases. Oxford, Clarendon Press 1915. p. 439.

dichte im Geisslerrohr benutzt. Er bestimmt sie in der positiven Säule aus Beobachtungen über Stoßionisation bei 0,29 Milliamp./qcm Stromdichte und 1 mm Hg Luftdruck der Größenordnung nach zu $1{,}5 \cdot 10^8$ Ionen im Kubikzentimeter, während sich nach meinen obigen Angaben hierfür $n_0 = 4{,}6 \cdot 10^{14}$ berechnen würde. Demnach ergibt sich die Halbwertszeit der Größenordnung nach zu mindestens $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ Sek.

Um besseren Aufschluß über die Halbwertszeit im Geisslerrohr zu erhalten, müßten natürlich alle zur Berechnung nötigen Zahlen an ein und derselben Stelle eines Geisslerrohres beobachtet werden.

§ 18. Zieht man endlich die Hauptstromstärke J in den Bereich der Betrachtungen, so kann man wohl bei konstantem Drucke die Annahme machen, daß

$$J \sim \mathfrak{N}$$

ist, d. h. daß auch

$$J \sim \mathfrak{N} \sim \varrho$$

ist. Es ergeben dann die Gleichungen (8′) und (15) dasselbe, nämlich

$$i_s = \text{konst.}\, J \,. \tag{16}$$

In einem Koordinatensystem, in dem die Werte von J und i_s gezeichnet sind, muß also eine durch die Beobachtungspunkte gelegte Kurve eine Gerade sein, die durch den Nullpunkt geht. Anläßlich der Besprechung der Fig. 11 wurde betont, daß direkt beobachtete Querstromstärken in ihrer Abhängigkeit von der Hauptstromstärke auf Geraden liegen, die nicht durch den Nullpunkt gehen. Wenn man aber aus diesen Beobachtungen, die den Gleichungen

$$i_{83,0} = 4{,}05 \cdot J - 0{,}75$$

und

$$i_{124,2} = 5{,}20 \cdot J - 1{,}15$$

genügen, nach der Formel (5) die Gleichung für i_s berechnet, so ergibt sich die Gerade (Fig. 11 *s*) für die die Forderung (12) ausgezeichnet erfüllt ist. Es ist nämlich

$$i_s = 1{,}8 \cdot J \,,$$

wenn i_s in Mikroamp. und J in Milliamp. ausgedrückt wird. Diese Konstante hat aber keine allgemeine Bedeutung, da sie nur für einen bestimmten Abstand der Querelektroden von der Hauptkathode (in Luft) gilt, wie p. 888 erwähnt wurde.

§ 19. Die eben besprochene Tatsache, daß die aus den direkten Beobachtungen berechneten Sättigungsströme der Forderung (16) genügen, mag als Bestätigung für die Richtigkeit der Berechnungsweise der Sättigungsströme nach der Formel (5) dienen. Ebenso kann als Bestätigung hierfür die Eigenschaft der berechneten Sättigungsströme angesehen werden, daß sie in den Stromabstanddiagrammen ihr Maximum über dem Maximum der Ohmschen Ströme haben und nicht die Verschiebung zeigen, die bei den Kurven höherer Spannung auftritt (p. 397). Endlich ist die Steigerung der Ionisation in der nächsten Nähe der Kathode, die sich aus dem Verlaufe der Stromabstandkurven bei einigen Beobachtungen ergeben hat (p. 398), durchaus verständlich und entspricht den Erwartungen, während an den direkt beobachteten Strömen davon nichts zu bemerken war.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit ist eine Versuchsanordnung beschrieben, mit der die Ionisation im Geisslerrohr nach der Methode der Querströme gemessen wurde.

Auf Grund einfacher Annahmen über die Oberflächenionisation an der Nebenkathode wird der gemessene Querstrom in zwei Teile zerlegt, von denen der eine im Zustande der Sättigung ist, während der andere durch Oberflächenionisation mit der Spannung wächst. Der auf diese Weise berechnete Sättigungsstrom genügt besser den bestehenden Anschauungen über die Vorgänge im Geisslerrohr als der gesamte beobachtete Querstrom.

Die Ionisation erreicht im negativen Glimmlichte ein Maximum, ist unabhängig vom Druck und steht in geradem Verhältnis zur Hauptstromstärke im Rohre. Sie zeigt bezüglich Wasserstoff und Luft keine wesentlichen Unterschiede.

Es wird versucht, über die Ionisation im Geisslerrohren zahlenmäßige Angaben zu machen und mit Hilfe in der Literatur bekannter Zahlen die Halbwertszeit der Ionisation im Geisslerrohre zu bestimmen.

(Eingegangen 3. August 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Die Dielektrizitätskonstante fester Körper bei verschiedenen Wellenlängen;*

von Robert Jaeger.

(Auszug aus der Berliner Dissertation.)

Inhaltsverzeichnis. A. Einleitung. — B. Plan der Untersuchung. — C. Angaben über die untersuchten Dielektrika. — D. Theoretische und experimentelle Grundlagen der Messungen. — E. Beschreibung der Meßeinrichtungen und Methoden: I. Maxwellsche Methode. II. Der Thomsonsche Schwingungskreis. III. Lechersche Anordnung. IV. Absolute Messungen nach der Plattenverschiebungsmethode. — F. Versuchsergebnisse. — G. Zusammenstellung der Resultate und Vergleichung mit anderen Beobachtern. — H. Schluß und Zusammenfassung.

A. Einleitung.

Wie Hr. Rubens letzthin gezeigt hat[1]), verhalten sich im langwelligen Teil des ultraroten Spektrums feste Körper und Flüssigkeiten verschieden voneinander.

Aus den mit 19 festen Körpern und 6 Flüssigkeiten angestellten Versuchen ergibt sich folgendes:

Bei den meisten festen Körpern (Kristallen) nimmt das Reflexionsvermögen mit wachsender Wellenlänge zunächst ab, steigt dann schnell, fällt nach Überschreitung des Maximums erst rasch und schmiegt sich schließlich asymptotisch dem Grenzwert an. Bei den Flüssigkeiten ist die Kurve des Reflexionsvermögens im ganzen gestreckt. Bei dem untersuchten Rizinusöl verläuft sie zwischen 30 und 300 μ nahe horizontal, bei den anderen Flüssigkeiten steigt sie fast geradlinig an. Die Endwerte, denen sich die Reflexionskurven nähern, sind mit der Dielektrizitätskonstante durch die bekannte Relation verknüpft:

$$(1) \qquad R = 100 \left(\frac{\sqrt{D} - 1}{\sqrt{D} + 1} \right)^2 .$$

1) H. Rubens, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1915. p. 4; Verh. d. D. Phys. Ges. 17. p. 315. 1915.

In der zitierten Arbeit sind nun die Dielektrizitätskonstanten für die untersuchten Stoffe mit schnellen Schwingungen ($\lambda = 10$—80 m) nach der Lecherschen Methode (vgl. unten) bestimmt worden. Aus den erhaltenen Zahlen D wurde das Reflexionsvermögen für praktisch unendlich lange Wellen (R_∞) berechnet und mit dem mittels Quecksilberdampfstrahlung (ca. 318 μ) optisch gemessenen Reflexionsvermögen zusammengestellt.

Es zeigt sich, daß für die festen Körper die beiden Werte nahe oder vollkommen übereinstimmen. Der Theorie entsprechend sind die aus den Dielektrizitätskonstanten berechneten Werte R_∞ die kleineren (mit zwei Ausnahmen, die aber innerhalb der möglichen Fehlergrenzen liegen). Dieses Ergebnis läßt den Schluß zu, daß von dem betrachteten Spektralgebiet (300 μ) bis zu 10 m (ca. 15 Oktaven) wahrscheinlich keine anomale Dispersion vorhanden ist. Jedenfalls ist sie zur Befriedigung der Maxwellschen Gleichung nicht notwendig.

Im Gegensatz dazu lassen die Resultate, die mit den Flüssigkeiten erhalten wurden, anomale Dispersion im Gebiete der Hertzschen Wellen erwarten, wo sie auch tatsächlich beobachtet wurde.

Die Ursache der Dispersion wurde nach Drude[1]) durch die Vorstellung zu erklären versucht, daß in dem Dielektrikum schwingungsfähige Gebilde von hoher Eigenfrequenz und starker Dämpfung enthalten sind. Als solche Resonatoren können in das Dielektrikum eingebettete leitende Teilchen wirken.

Man gelangt durch diese Anschauung zu Formeln, welche die Dispersion im Gebiete Hertzscher Wellen in ausreichender Weise darstellen. Zum Unterschied gegen diese Hypothese, die zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten keinen Unterschied macht und besonderer, im übrigen für Dielektrika nicht charakteristischer Annahmen bedarf, hat Debye[2]) seine Theorie der molekularen Dipole aufgestellt. Diese macht über die Konstitution der Dielektrika keine besondere Annahme, ist jedoch im Gegensatz zur Drudeschen Theorie nur auf Flüssigkeiten anwendbar.

1) P. Drude, Wied. Ann. 60. p. 500. 1897.
2) P. Debye, Ber. d. D. Physik. Ges. 15. p. 777. 1913.

Nach Debyes Theorie übt die Drehung der Moleküle, die sich als elektrische Dipole mit ihren Axen in Richtung der Kraftlinien zu stellen suchen, den Haupteinfluß auf die Änderung der Dielektrizitätskonstanten aus. Die Einstellung der Dipole erfolgt nicht augenblicklich, sondern nach kurzer Zeit, die aber, wie Hr. Debye gezeigt hat, von der Größe ist, daß erst bei Einfluß Hertzscher Wellen eine stärkere Einwirkung der Dipole auf die Dielektrizitätskonstante resultiert.

Im Widerspruch mit dieser Theorie und im wesentlichen auch mit den letzten Messungen von Hrn. Rubens stehen verschiedene Arbeiten, die eine Änderung der Dielektrizitätskonstanten mancher festen Körper im Gebiete Hertzscher Wellen und bis zu Unterbrechungen von einigen Zehntelsekunden behaupten. Es scheint nach dem vorliegenden Beobachtungsmaterial nicht ausgeschlossen, daß die gefundenen Änderungen der Dielektrizitätskonstanten mit der Wellenlänge durch Nebenwirkungen vorgetäuscht wurden, die besonders bei langsam veränderlichen Feldern leicht auftreten können Leitfähigkeit, dielektrische Nachwirkungserscheinungen).

Aus diesem Grunde wurden auf Veranlassung von Hrn. Rubens die folgenden Untersuchungen über Dielektrizitätskonstanten fester Körper bei verschiedenen Wellenlängen angestellt.

Die Arbeit wurde unter Leitung von Hrn. Geheimrat Rubens im Physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Hrn. Geheimrat Rubens bin ich für die tatkräftige Unterstützung und Förderung der Arbeit zu großem Danke verpflichtet. Auch Hrn. Präsident Warburg möchte ich meinen Dank aussprechen für sein liebenswürdiges Entgegenkommen, welches mir ermöglichte, einen Teil der Arbeit mit den ausgezeichneten Hilfsmitteln der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Charlottenburg auszuführen.

Dr. Lindemann, der leider inzwischen verstorben ist, hat mich in dankenswerter Weise bei der Ausführung dieser Arbeiten in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt unterstützt.

Die Messungen von Dielektrizitätskonstanten fester Körper sind im ganzen noch spärlich, was wohl darauf zurückzu-

führen ist, daß die Methoden im allgemeinen nicht so günstig oder so bequem sind wie bei Flüssigkeiten. Durch einen Kunstgriff von Starke können allerdings feste Körper auch mit solchen Methoden gemessen werden, die sonst nur für Flüssigkeiten geeignet sind; jedoch ist wegen der Löslichkeit dieses Verfahren nicht für alle Materialien anwendbar.

Eine gute Übersicht über die vorliegenden Messungen findet sich in dem von L. Graetz herausgegebenen Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus[1]), so daß an dieser Stelle ein Hinweis auf dieselbe genügt. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Zahlen findet sich in der Dissertation (p. 10).

Bei der hohen Unsicherheit der Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten fester Körper, die aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial hervorgeht, können im Grunde nur diejenigen Bestimmungen der D.K.[2]) bei verschiedenen Wellenlängen miteinander verglichen werden, die von demselben Beobachter an demselben Material ausgeführt wurden.

B. Plan der Untersuchungen.

Die Aufgabe bestand in erster Linie darin, zu untersuchen, ob die Dielektrizitätskonstante fester Körper bei verschiedenen Wellenlängen Unterschiede zeigt. Es genügt dazu eine relative Bestimmung, so daß also die Aufgabe im wesentlichen darauf hinausläuft, eine Kapazität bei verschiedenen Wellenlängen unter möglichst denselben äußeren Bedingungen zu messen. Außerdem ist es jedoch wünschenswert, die absolute Dielektrizitätskonstante zu erhalten, um die Resultate mit den Ergebnissen anderer Beobachter vergleichen zu können und um den Anschluß an die entsprechenden optischen Untersuchungen zu ermöglichen.

I. *Die relativen Messungen* wurden mit Plattenkondensatoren ausgeführt. Diese bestanden aus planparallelen Platten des betreffenden festen Dielektrikums, die auf beiden Seiten mit kreisförmigen metallischen Belegungen versehen waren. Die Belegungen waren verschiedener Art; sie bestanden meist aus Stanniol, bei den Silbersalzen aus Platin- oder

1) L. Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Leipzig 1914. J. A. Barth. Artikel von E. Schrödinger. Bd. I. p. 178.

2) Unter D.K. sei im folgenden stets „Dielektrizitätskonstante" verstanden.

Silberfolie. Sie wurden entweder mit Wasser oder Öl von hoher Dielektrizitätskonstante aufgeklebt. Es ist nicht zu befürchten, daß das Öl zu dicke Schichten bildet und die D.K. wesentlich fälscht. Mit dem Zeissschen Dickenmesser, der tausendstel Millimeter zu messen gestattet, konnte die Dicke der Ölschicht nicht mehr wahrgenommen werden. Das Wasser andererseits wird durch Streichen herausgepreßt, so daß hauptsächlich der äußere Luftdruck die nur 0,01 mm starken Belegungen genügend andrückt.

Die Platten waren bei den Messungen in ein Gestell eingeklemmt, dessen Konstruktion aus der Fig. 1 ersichtlich ist.

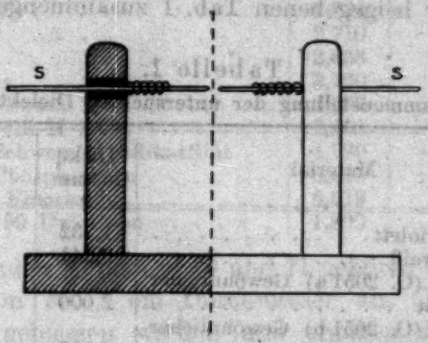


Fig. 1.

Die in dem Holzgestell isoliert gelagerten Zuführungen S können auseinandergezogen werden und legen sich nach Einfügen der Platte mit leichtem Federdruck an dieselbe an. Die Kapazität des leeren Gestells mit Klemmen betrug ca. 2 cm.

II. *Zur Absolutmessung* der Dielektrizitätskonstanten bei schnellen Schwingungen wurde die Plattenverschiebungsmethode angewendet. Die Methoden selbst sind weiter unten näher erörtert.

Die Messungen wurden ausgeführt

I. Mit Kondensatoren
   1. nach der Maxwellschen Methode ($\nu = 166$ bzw. 250);
   2. im Thomsonschen Schwingungskreis mit Poulsenlampe ($\nu = 10^5$) und Löschfunken ($\nu = 10^6$);
   3. in der Lecherschen Anordnung ($\nu = 10^7$).

II. Mit der Plattenverschiebungsmethode
   1. im Thomsonschen Schwingungskreis ($\nu = 10^5$);
   2. im Lecherkreis ($\nu = 3 \cdot 10^7$).

C. Angaben über die untersuchten Dielektrika.

Zur Verfügung stand zunächst der größte Teil derselben Körper, deren optische und dielektrische Eigenschaften bereits Hr. Rubens in der erwähnten Abhandlung beschrieben hat. Dazu kamen neu hinzu amorpher Quarz, natürliches und synthetisches Gummi sowie eine Anzahl Gläser, darunter vier von derselben Schmelznummer (Schott, Jena), wie sie von Starke und Löwe benutzt worden sind. Da drei von diesen nur in Ersatzschmelzen verfügbar waren, so ist es möglich, daß die chemische Zusammensetzung doch nicht ganz die gleiche ist. Die benutzten Dielektriken sind mit ihren Dicken in der beigegebenen Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Zusammenstellung der untersuchten Dielektrika.

Nr.	Material	Dicke in mm	Bemerkungen
1	Glas, violett	1,732	
2	Glas, weiß	2,241	
3	O. 118 (O. 2051 a) Gewöhnlicher Flint	2,000	h_2[1])
4	O. 118 (O. 2051 b) Gewöhnlicher Flint	2,000	〃
5	O. 1266 (O. 1353 a) Baryt Leichtflint	2,000	h_1
6	O. 1266 (O. 1353 b) Baryt Leichtflint	2,000	h_1
7	O. 381 (O. 2074 a) Kron mit hoher Dispersion	1,995	h_5
8	O. 381 (O. 2074 b) Kron mit hoher Dispersion	1,995	h_5
9	O. 1209 (O. 1993) Schwerstes Barytkron	2,000	
12	Quarz, amorph	2,027	
13	〃 〃	1,909	
14	Quarz ⊥	1,930	
15	〃 〃	2,003	nicht genau senkrecht zur Achse
16	〃 〃	2,010	
17	Ebonit	3,920	
18	〃	2,040	
19	Gummi, natürlich	1,754	
20	〃 〃	1,961	
21	Gummi, synthetisch	1,943	
22	〃 〃	1,863	

1) h_1 usw. bedeutet die hydrolytische Klasse nach dem Katalog von Schott u. Gen.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Nr.	Material	Dicke in mm	Bemerkungen
23	Chlorsilber	1,122	
24	Bromsilber	0,928	
25	Cyansilber	2,180	Gepreßtes Pulver
26	Thalliumchlorür	1,488	„ „
27	Thalliumbromür	1,949	„ „
29	Calomel	3,065	optische Achse ⊥ Plattenoberfläche
30	Ammoniumchlorid	3,140	
31	Ammoniumbromid	2,840	
32	Bromkalium	2,580	Geschmolz. Salz
34	Flußspat	2,174	
35	Marmor	2,710	
36	Gips	2,638	Spaltstücke
37	Steinsalz	3,120	
38	Glas, schwarz II	2,537	
39	Glas, weiß II	2,465	
40	S. 461 Schwerstes Silikatflint	4,990	
41	S. 367 Phosphatkron	5,005	
42	O. 7185 Fluorkron	5,019	
43	U. V 3199 Uviolkron	1,800	

Die fehlenden Nummern 10 und 11 gehören kleinen Quarzscheibchen von ca. 4 cm Durchmesser an. Diese konnten wohl relativ gemessen werden und ergaben auch bei 3000 und 300 m Wellenlänge vollkommene Übereinstimmung, nämlich 5,8 bzw. 9,8 cm. Dagegen war es wegen des kleinen Durchmessers nicht möglich, den Absolutwert zu bestimmen.

Der Nummer 28 entsprach eine Platte von Thalliumjodür, die jedoch gesprungen war und deswegen nicht mehr einwandfrei gemessen werden konnte. Jodkalium (33) war von zahlreichen kleinen Löchern durchsetzt, in die das Öl bei der Messung eindrang und die Resultate dadurch fälschte. Deshalb wurde die betreffende Platte nicht mit angeführt.

Die ersten drei Gläser, deren Zusammensetzung uns unbekannt war, sind von Hrn. Geheimrat F. Mylius chemisch analysiert worden. Die Zusammensetzung einiger derselben ist in Tab. 2 angegeben.

Die durch die Färbung angedeutete Änderung im Oxydzustand des Mangans ist dabei nicht berücksichtigt.

Die Zusammensetzung der übrigen Gläser kann nur qualitativ angegeben werden. Tab. 3. (Vgl. H. Rubens, Berl. Ber. 1916. p. 1280.)

Tabelle 2.

Zusammensetzung der Gläser.

Glas	weiß II	violett	schwarz II
Na_2O	11,5	10,6	9,4 Proz.
K_2O	—	11,3	4,0 „
CaO	15,0	11,0	7,2 „
As_2O_3	1,2	0,6	2,6 „
Fe_2O_3	Sp.	Sp.	Sp.
MnO	—	4,8	15,4 „
CoO	—	0,2	Sp.
NiO	—	Sp.	Sp.
CuO	—	Sp.	Sp.
SiO_2	72,3	62,1	61,4 „
	100,0	100,6	100,0 Proz.

Tabelle 3.

Zusammensetzung der Gläser.

Bezeichnung	Chemische Zusammensetzung vorwiegend (über 10 Proz.)	in geringeren Mengen	in kleinen Mengen (unter 1 Proz.)
Fluorkron O. 7185	SiO_2, B_2O_3, K_2O, F, Al_2O_3	—	As_2O_3
Phosphatkron S. 367	P_2O_5, K_2O	Al_2O_3, MgO, B_2O_3	As_2O_3
Uviolkron U. V. 3199	SiO_2, B_2O_3, K_2O	ZnO	—
Kron mit hoher Dispersion O. 381 (O. 2074)	SiO_2, Na_2O, P_2O_5	ZnO, Al_2O_3	As_2O_3
Schwerstes Barytkron O. 1209 (O. 1993)	BaO, SiO_2	ZnO, B_2O_3, Al_2O_3	As_2O_3
Baryt Leichtflint O. 1266 (O. 1353)	SiO_2, PbO, BaO	ZnO, K_2O	Na_2O, As_2O_3, Mn_2O_3
Gewöhnliches Flint O. 118 (O. 2051)	SiO_2, PbO	K_2O, Na_2O	As_2O_3
Schwerstes Silikatflint S. 461	PbO, SiO_2	—	As_2O_3

Für die gepreßten Pulver und geschmolzenen Salze ist die gefundene D.K. zu korrigieren nach einer Formel von H. A. Lorentz[1]):

$$\frac{D_1 - 1}{D_1 + 2}\,\frac{s}{s_1} = \frac{D - 1}{D + 2}, \tag{2}$$

wo D_1 die scheinbare D.K., s_1 die beobachtete und s die normale Dichte bedeutet.

D. Theoretische und experimentelle Grundlagen der Messungen.

I. *Theoretische Grundlagen.* Um die Änderung der Dielektrizitätskonstanten mit der Wellenlänge aus den weiter unten mitgeteilten Versuchsergebnissen abzuleiten, bedarf es der in diesem Abschnitte enthaltenen Betrachtungen nicht. Dagegen sind sie von Nutzen, wenn es sich darum handelt, aus den gemessenen Kapazitäten und den Dimensionen des Kondensators die Dielektrizitätskonstante absolut zu berechnen. Wenn auch diese Berechnung aus verschiedenen Gründen keine sehr genaue sein kann, so habe ich doch nicht darauf verzichten wollen, weil die Ergebnisse dieser Rechnung eine sehr schätzbare Kontrolle und Ergänzung für die nach der Plattenverschiebungsmethode erhaltenen Werte liefern.

Die Untersuchungen sind mit Kondensatoren ausgeführt, die aus zwei gleichartigen, in einem gegenseitigen Abstand a befindlichen Kreisplatten von Metall bestehen. Denkt man sich ein solches System in eine leitende isolierte Hülle eingeschlossen, so setzt sich die Gesamtkapazität aus folgenden Teilkapazitäten zusammen (s. Fig. 2):

1. Aus der Teilkapazität der beiden leitenden Platten aufeinander, c_{12} oder c_{21}; es ist stets $c_{12} = c_{21}$.

2. Aus der Teilkapazität c_1 der Platte 1 gegen die Hülle und

3. Der Teilkapazität der Platte 2 gegen die Hülle.

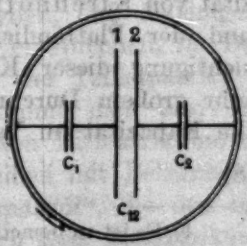


Fig. 2.

Im vorliegenden Falle ist $c_1 = c_2$. Die Teilkapazitäten c_1 und c_2 kann man sich als zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren vorstellen (vgl. Fig. 2).

Daher ist die Gesamtkapazität C des Systems

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 9. p. 641. 1880; vgl. H. Rubens l. c. Tab. III. p. 16.

$$C = c_{12} + \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}. \tag{3}$$

Gilt diese Kapazität für den Fall, daß sich die Leiter im Vakuum befinden, so wird die Kapazität C', die man erhält, wenn der ganze Raum von dem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante D erfüllt ist,

$$C' = D \,.\, C. \tag{4}$$

Ist keine isolierte Hülle vorhanden, so stellen die Größen c_1 und c_2 die Teilkapazitäten der Platten gegen die umgebenden Leiter dar.[1])

Befinden sich alle Leiter in unendlicher Entfernung, so ist die Teilkapazität im Vakuum für jede Platte

$$c = c_1 = c_2 = R/\pi\ , \tag{5}$$

d. h. gleich der Hälfte der Kapazität einer unendlich dünnen, kreisförmigen Scheibe vom Radius R. In einem Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstante D sind die Teilkapazitäten D mal so groß.

Wird eine der Platten geerdet, z. B. Platte 1, so ist c_1 unendlich groß und man erhält für die Kapazität in Vakuum

$$C_g = c_{12} + c = c_{12} + \frac{R}{\pi}\ ^2), \tag{6}$$

während wegen $c_1 = c_2$ im oben angegebenen Falle, daß keine Platte geerdet ist, folgt:

$$C = c_{12} + \frac{c}{2} = c_{12} + \frac{R}{2\pi}. \tag{7}$$

Für den Fall eines *Kreisplattenkondensators* ist die Kapazität von Kirchhoff unter Berücksichtigung der Randwirkung und der Plattendicke berechnet worden[3]). Ohne Berücksichtigung dieser Korrektionen, d. h. also für Platten von sehr großem Durchmesser R und geringer Entfernung a ist die Kapazität im Vakuum

$$C = R^2/4a. \tag{8}$$

---

1) Es ist zu bemerken, daß diese Teilkapazitäten von den oben erwähnten der Größe nach verschieden sind.

2) Diese Formel kommt für die Maxwellsche Methode in Betracht.

3) G. Kirchhoff, Ges. Abh. p. 112; Sitzungsber. der Berl. Akad. 1877. p. 144; Vorl. über Elektr. u. Magn. (herausgeg. von Dr. M. Planck) Leipzig 1891. p. 109.

Für einen Kondensator, dessen eine Platte geerdet ist, berechnet sich nach Kirchhoff die Kapazität im Vakuum für die Plattendicke $d = 0$ zu

$$C_g = c_{12} + \frac{R}{\pi} = \frac{R^2}{4a} + \frac{R}{4\pi}\left\{\ln\frac{16\pi R}{a} + 1\right\}. \tag{9}$$

Die Teilkapazität c_{12} ist daher

$$c_{12} = \frac{R^2}{4a} + \frac{R}{4\pi}\left\{\ln\frac{16\pi R}{a} - 3\right\}. \tag{10}$$

Sind die Platten nicht geerdet, so lautet die Formel:

$$C = c_{12} + \frac{R}{2\pi} = \frac{R^2}{4a} + \frac{R}{4\pi}\left\{\ln\frac{16\pi R}{a} - 1\right\}. \tag{11}$$

Dabei ist angenommen, daß das Verhältnis a/R sehr klein ist.

Haben die Platten endliche Dicke d, die aber klein gegen den Abstand a ist, so tritt an die Stelle des Gliedes

$$\ln\frac{16\pi R}{a}$$

der Ausdruck

$$\ln\frac{16\pi(a+d)R}{a^2} + \frac{d}{a}\ln\frac{a+d}{d}. \tag{12}$$

Für einen Teil der vorliegenden Messungen sind die Kondensatoren in der Weise hergestellt worden, daß auf dem plattenförmigen Dielektrikum zu beiden Seiten dünne metallische Belegungen befestigt wurden. Diese waren kreisrund und so bemessen, daß das Dielektrikum überall mindestens einige Millimeter hervorstand. Die exakte Berechnung dieses Falles würde große Schwierigkeiten bereiten; doch kann man in erster Annäherung die Annahme machen, daß diejenigen Kraftlinien, welche der Teilkapazität c_{12} entsprechen, im Dielektrikum verlaufen, während sich die der Teilkapazität c entsprechenden in Luft befinden. Bestimmt man also die Dielektrizitätskonstante eines solchen festen Dielektrikums in der Weise, daß man die Kapazität derselben mit Belegungen mißt, und wird die sogenannte *„Leerkapazität"*, die den im selben Abstande a befindlichen Belegungen *ohne* Dielektrikum entsprechen würde, nach der Kirchhoffschen Formel berechnet, so wird man nur angenäherte Werte erhalten. Zur absoluten Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten ist daher diese Methode weniger geeignet.

Wird die Kapazität eines derartigen, in Luft befindlichen Kondensators gemessen, so muß man, je nachdem die eine Belegung geerdet ist oder nicht, die Teilkapazität c oder $c/2$ von dem beobachteten Werte abziehen, um die Teilkapazität c_{12} des mit dem Dielektrikum ausgefüllten Kondensators zu erhalten.

Die Leerkapazität ist dann nach der Formel zu berechnen:

$$(13)\quad C_0 = c_{12} = \frac{R^2}{4a}\left\{1 + \frac{a}{\pi \cdot R}\left[\ln\frac{16\pi(a+d)R}{a^2} + \frac{d}{a}\ln\frac{a+d}{d} - 3\right]\right\}.$$

Bezeichnet man die mit dem Dielektrikum gemessene Kapazität, wenn die eine Belegung geerdet ist, mit C'_g, wenn sie nicht geerdet ist, mit C'_i, so erhält man also für die Dielektrizitätskonstante:

$$(14)\quad D = \frac{C'_g - \frac{R}{\pi}}{C_0}, \text{ bezw.}$$

$$(15)\quad D = \frac{C'_i - \frac{R}{2\pi}}{C_0}.$$

Hierbei ist aber zu beachten, daß wegen der Nähe der umgebenden Körper (Tisch, Wände u. a.) die Teilkapazität c im allgemeinen größer ist als R/π, so daß aus diesem Grunde die berechnete Dielektrizitätskonstante zu groß ausfallen kann (vgl. weiter unten).[1])

II. *Experimentelle Grundlagen.* Die Kirchhoffsche Formel ist schon mehrfach geprüft worden, so zunächst von Klemenčič[2]) und Himstedt[3]) welche die Lichtgeschwindigkeit nach der Kondensatormethode bestimmten, ferner von Cohn und Heerwagen[4]). Sie maßen die Kapazität zweier großer Kondensatoren und berechneten sie nach der Kirchhoffschen Formel.

Doch sind wegen der Nähe der umgebenden Leiter, wie in der Arbeit erwähnt wird, die berechneten Werte kleiner als die beobachteten.

---

1) Vgl. auch E. Grüneisen u. E. Giebe, Verh. d. D. Physik. Ges. **14.** p. 921. 1912.

2) J. Klemenčič, Wiener Ber. **89.** p. 298. 1884.

3) F. Himstedt, Wied. Ann. **29.** p. 560. 1886.

4) E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. **48.** p. 343. 1891.

Die erwähnten Messungen bestätigen im wesentlichen die Richtigkeit der Kirchhoffschen Formel.

In der vorliegenden Arbeit wurden zur weiteren Prüfung der Kirchhoffschen Formel zwei Plattenkondensatoren benutzt. Der eine derselben (A) hatte Platten vom Halbmesser 9,99 cm und einer Plattendicke von 0,427 cm. Der Abstand der Platten konnte durch dazwischen gelegte, verschieden hohe planparallele Glasstückchen variiert werden (vgl. Fig. 3). Der andere Kondensator von kleineren Abmessungen (B) war fest verschraubt und durch dazwischen gelegte Ebonitscheibchen in bestimmtem Abstand gehalten. Die Dimensionen der Kondensatoren sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Tabelle 4.

Plattenkondensatoren.

Kondensator	Durchmesser der Platten	Dicken der Platten	Ebonitstücke		Fläche der Ebonitstücke (f)
			Durchmesser	Dicke	
A	19,98 cm	4,27 mm	—	—	—
B	10,0 „	2,04$_5$ „	9,2 mm	1,08 mm	1,995 cm^2

Bei der Berechnung der Kapazität sind die zwischen den Platten liegenden Glas- bzw. Ebonitstückchen zu berücksichtigen.

Ist F die Gesamtfläche einer Platte, f die Gesamtfläche des zwischen den Platten befindlichen Materials von der Dielektrizitätskonstante D, so ist für die Berechnung der Kapazität der Kondensatoren in Luft statt der Fläche F einzusetzen der Wert

$$F' = F + f(D-1)\,. \tag{16}$$

Die Teilkapazität c_{12} ist also, da diese Korrektion klein ist, zu berechnen nach der Formel:

$$\left\{\begin{aligned} C = c_{12} &= \frac{R^2}{4a}\left\{1 + \frac{f}{F}(D-1)\right. \\ &\left. + \frac{a}{R\pi}\left[\ln\frac{16\pi R(a+d)}{a^2} + \frac{d}{a}\ln\frac{a+d}{d} - 3\right]\right\}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Eine schematische Ansicht des Kondensators A zeigt Fig. 3.

Der Kondensator wird in horizontaler Lage benutzt, so daß die eigene Schwere der oberen Platte bei guter Reinigung der Innenflächen und Glasstücke einen exakten gegenseitigen Plattenabstand gewährleistet. Meist sind drei Glasstücke benutzt worden. Eine Durchbiegung der massiven Platten ist nicht zu befürchten. Die untere Platte steht zur Isolation auf einer Glasschale. Die dünnen Zuführungsdrähtchen sind an kleinen Schrauben in der Mitte der Platte befestigt und gehören mit zu dem Kondensator. Die Zuführung der unteren Platte ist durch ein kleines Loch in der Glasschale nach außen geführt.

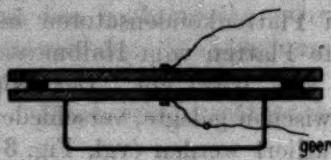


Fig. 3.

Der Plattenhalbmesser beträgt 9,99 cm, so daß

$$\frac{R}{\pi} = 318$$

ist. Die Dicke der Platten ist im Mittel 0,427 cm. Die Dielektrizitätskonstante der Glasstückchen ist zu 6 angenommen.

Die Kapazitätsmessung des Kondensators wurde mit Hilfe der Maxwellschen Methode (vgl. später) für die in der Tabelle 5 p. 423 angegebenen Plattenabstände a bei 166 Aufladungen in der Sekunde vorgenommen.

Die in Farad erhaltenen Werte sind in Zentimeter umgerechnet unter Annahme einer Lichtgeschwindigkeit von $3 \cdot 10^{-8}$ m/sec. Die beobachteten Kapazitäten, abzüglich der Teilkapazität $c = R/\pi = 3{,}18$ cm sind in Spalte 4 der umstehenden Tab. 5 angegeben. Diese Werte wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate in Funktion des Plattenabstandes ausgeglichen. Hierzu mußten zunächst die Glaskorrektionen

$$\left\{\frac{R^2}{4a} \cdot \frac{f}{F}(D-1)\right\},$$

welche unregelmäßige Zuschläge ergeben, abgezogen werden. (Vgl. Spalte 11). Die ausgeglichenen Werte sind mit den nach der Kirchhoffschen Formel berechneten Kapazitäten (vgl. Spalte 10) zu vergleichen. Die Tabelle enthält außerdem in Spalte 2 die Abstände der Platten in Millimeter, die der Höhe der zwischengelegten Glasstücke entsprechen. Diese sind mit

Tabelle 5.

Großer Kreisplatten-Kondensator A (berechnet nach Formel (17) p. 421).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Nr.	Abstand a in mm	$\frac{a}{R}$	Kapaz. beob. in cm $-\frac{R}{\pi}$	$\frac{R^2}{4a}$ in cm	Fläche der Glasstücke f in cm²	Glaskorrekt. in cm	Rand- u. Dickenkorrekt. in cm	Zuschlag für Luft in cm	Kapaz. c_{12} berechn. in cm	Kapaz. beob. ausgeglichen in cm	Beob.-Rechn. in cm	Abweichung nach Abzug von 3,8 cm	
												in cm	in Proz.
1	0,524	$0{,}00_5$	492,0	476,1	0,57	4,5	7,28	$0{,}3_0$	488,1	492,3	4,2	+ 0,4	+ 0,1
2	0,725	$0{,}00_7$	353,8	344,1	0,72	4,0	6,78	$0{,}2_0$	355,1	358,8	3,7	− 0,1	0
3	0,900	$0{,}00_9$	295,4	277,2	0,72	3,5	6,46	$0{,}2_0$	287,3$_5$	290,9	3,6	− 0,2	− 0,1
4	1,082	$0{,}01_1$	245,7	231,0	0,30	1,4	6,19	$0{,}1_5$	238,7$_5$	241,8	3,0	− 0,8	− 0,3
5	1,25	$0{,}01_2$	211,9	199,6	0,27	1,0	5,97	$0{,}1_5$	206,7	210,2	3,5	− 0,3	− 0,1$_5$
6	1,47	$0{,}01_5$	182,5	169,7	1,08	2,8	5,74	$0{,}1_0$	178,3$_5$	181,9	3,5	− 0,3	− 0,1$_5$
7	2,91$_5$	$0{,}02_9$	94,6	85,7	0,63	0,9	4,77	$0{,}0_5$	91,4$_5$	95,2$_5$	3,8	0	0
8	3,42	$0{,}03_4$	82,6	72,9$_5$	0,88	1,1	4,55	$0{,}0_5$	78,6$_5$	82,7	4,0	+ 0,2	+ 0,2$_5$
9	4,52	$0{,}04_5$	63,9	55,2	1,10	1,1	4,18	$0{,}0_5$	60,5$_5$	64,8	4,2	+ 0,4	+ 0,6
10	5,82	$0{,}05_8$	52,8	42,8$_5$	2,37	1,3	3,85	$0{,}0_5$	48,0$_5$	52,6	4,5	+ 0,7	+ 1,3
										Mittel	3,8$_6$		

dem Zeissschen Dickenmesser ermittelt worden, der noch $^1/_{1000}$ mm zu messen gestattet. Die Bedeutung der in den übrigen Spalten angegebenen Zahlen ist aus den Überschriften ersichtlich. Die Differenzen der in den Spalten 10 und 11 angeführten berechneten und beobachteten (ausgeglichenen) Werte befinden sich in Spalte 12. Es zeigt sich, daß die beobachteten Kapazitäten um eine konstante Differenz — im Mittel 3,80 cm — größer sind als die berechneten, worauf unten näher eingegangen werden soll. Zieht man diese konstante Differenz von den beobachteten Werten ab, so erhält man die übrigbleibenden Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung, die in Spalte 13 in Zentimetern und in Prozenten zusammengestellt sind.

Die erwähnte konstante Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Kapazitäten rührt zum Teil von den Drähten her, die am Kondensator befestigt sind und als zu diesem zugehörig angesehen werden. Der wesentliche Teil der Differenz jedoch ist auf den früher bereits besprochenen Umstand zurückzuführen, daß die Teilkapazität c der Platte gegen die Erde infolge der Nähe der umgebenden Körper größer ausfällt als der theoretische Wert R/π (vgl. p. 420). Zur Kontrolle wurden noch besondere Messungen mit den hier benutzten Kondensatorplatten angestellt, indem z. B. die Kapazität derselben gegen Erde in verschiedenen Lagen und unter verschiedenen Verhältnissen nach der Maxwellschen Methode ermittelt wurde. Dabei gelangte man zu Ergebnissen, die obige Annahme bestätigen.[1])

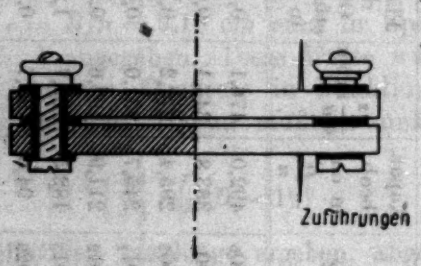


Fig. 4.

Der kleine Kondensator B ist zur Prüfung der Kirchhoffschen Formel seiner Konstruktion wegen weniger geeignet. Den Querschnitt eines solchen Kondensators zeigt Fig. 4.

[1]) Vgl. Dissertation p. 27.

In bezug auf die Kapazitätsmessung kann auf Kondensator *A* verwiesen werden. Die Resultate zeigt die folgende Tabelle 6.

Tabelle 6.

Kapazität des kleinen Kondensators.

Kondensator	Radius R	Abstand a	$\frac{R^2}{4a}$	$\frac{R}{\pi}$	Kapazität berechnet	Kapazität gemessen
B	5,0 cm	0,103 cm	60,85, cm	1,59 cm	65,8 cm	66,7 cm

In Anbetracht des Umstandes, daß die Teilkapazität c größer ist als der theoretische Wert R/π (vgl. p. 420), stimmt die Beobachtung und Rechnung auch bei dem Kondensator *B* befriedigend überein.

Da bei den späteren Messungen kleine Plattenkondensatoren, welche die zu untersuchende Substanz enthalten, in Parallelschaltung mit einem Drehkondensator benutzt wurden, schien es erwünscht, zu untersuchen, ob keine störende gegenseitige Beeinflussung der Kondensatoren stattfindet.

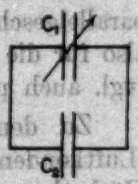


Fig. 5.

Bedeutet in Fig. 5 C_1 die Kapazität des Drehkondensators, C_2 diejenige des Plattenkondensators, so muß gelten:

$$C = C_1 + C_2 .$$

Der Drehkondensator war ein kleiner Kondensator Modell „Liliput $^1/_4$“ von Dr. C. Seibt mit einer Maximalkapazität von ca. 360 cm; dabei entsprach 1 Teilstrich ca. 2 cm. Die linke Klemme des Kondensators (bei aufrechter Skala) war mit der Hülle verbunden.

Die Messungen wurden mit Hilfe der Maxwellschen Methode vorgenommen, und zwar bei 250 Aufladungen in der Sekunde. Die mit der Hülle verbundene Klemme war bei den Messungen geerdet. Die Schaltungskapazität der Meßanordnung betrug 14,65 cm. Als Kapazität C_2 diente eine mit kreisförmigen Stanniolplatten belegte Ebonitscheibe. Sie wurde bei den Messungen in das auf p. 418 beschriebene Gestell eingeklemmt, dessen Kapazität ca. 2 cm betrug.

Die Ergebnisse dieser Messung sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Tabelle 7.

Parallelschaltung von Kondensatoren	Kapazitäten
1. Drehkondensator (auf Teilstrich 157°) und leeres Gestell parallel	$C_1 = 324{,}36$ cm
2. Ebonitplatte allein	$C_2 = 27{,}79$ „
3. Drehkondensator und Ebonitplatte im Gestell parallel	$C = 352{,}23$ „
Berechneter Wert	$C = C_1 + C_2 = 352{,}15$ cm

Die Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werte ist also auf 0,2 Prom. genau.

Mit demselben Ergebnis wurde die Prüfung mit dem großen Plattenkondensator A ausgeführt bei einem Plattenabstand von 5,82 mm.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der Unterschied zwischen berechneter und beobachteter Kapazitätssumme der parallelgeschalteten Kondensatoren nie 2 Prom. übersteigt, also für die vorliegenden Messungen nicht in Betracht kommt (vgl. auch p. 433).

Zu den Messungen stand zuerst ein Drehkondensator (Luftkondensator) der Telefunken-Gesellschaft mit einer Höchstkapazität von ca. 1000 cm zur Verfügung, der mir von Hrn. Prof. Wehnelt in liebenswürdiger Weise für diese Messungen überlassen worden war. Der Kondensator besitzt eine isolierte Hülle; er wurde nach der Maxwellschen Methode bei 250 Unterbrechungen in der Sekunde geeicht. Dabei war die eine Klemme geerdet. Die Teilung des Kondensators geht bis 180°; sie wurde bei den Messungen jedoch nur bis 50° benutzt. Die Kapazitäten zwischen 0° und 50° sind, um die Werte genauer entnehmen zu können, durch eine mittels Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Formel

$$C = 32{,}5 + 5{,}44\,\alpha \tag{18}$$

dargestellt worden.

Für die Messungen wurden die nach der obigen Formel berechneten Werte benutzt.

Die späteren Messungen wurden mit dem bereits erwähnten (vgl. p. 425) Seibtschen Drehkondensator (Luft-

kondensator) „Liliput $^1/_4$“ ausgeführt, bei dem besonders für kleine Kapazitäten eine größere Genauigkeit zu erzielen ist, da 1° ca. 2 cm entspricht, gegenüber 5,4 cm bei dem Telefunkenkondensator. Die linke Klemme ist, wie bereits erwähnt, mit der Hülle verbunden. Der Kondensator wurde nach der Maxwellschen Methode mit zwei verschiedenen Frequenzen (166 bzw. 250 pro Sekunde) gemessen, wobei die linke Klemme geerdet wurde. Die erhaltenen Werte und die daraus gebildeten Mittelwerte sind in der folgenden Zusammenstellung wiedergegeben.

Tabelle 8.

Kapazität des Drehkondensators „Liliput“.

Einstellung α	Kapazität $n = 166$	$n = 250$	Mittel
0°	20,0 cm	20,2 cm	20,1 cm
5	19,6 „	20,0 „	19,8 „
10	20,2 „	20,2 „	20,2 „
15	—	23,9 „	23,9 „
20	33,0 „	33,2 „	33,1 „
30	—	53,5 „	53,5 „
50	—	95,8 „	95,8 „
60	116,6 „	—	116,6 „
70	—	138,8 „	138,8 „
90	—	180,6 „	180,6 „
110	—	224,2 „	224,2 „
120	245,5 „	245,5 „	245,5 „
130	—	266,8 „	266,8 „
150	—	307,9 „	307,9 „
160	328,3 „	328,1 „	328,2 „
170	347,8 „	348,1 „	347,9 „
175	—	357,7 „	357,7 „
180	362,3 „	362,9 „	362,6 „

Der Kondensator kann, wie aus der Tabelle 8 ersichtlich ist, erst von etwa 10° an benutzt werden.

E. Beschreibung der Meßeinrichtungen und Methoden.

I. *Maxwellsche Methode.* Die Maxwellsche Methode wurde in der Anordnung benutzt, wie sie von Hrn. Giebe eingehend beschrieben worden ist.[1]) Sowohl hinsichtlich der Apparatur wie Ausführung der Methode kann auf die zitierte Arbeit verwiesen werden. Hier sei beides nur kurz erläutert.

1) E. Giebe, Zeitschr. f. Instrumentenk. **29**. p. 269, 301. 1909.

Die schematische Schaltung zeigt Fig. 6, in welcher C den Kondensator bedeutet. V ist eine Gleichstromquelle (meist 80 Volt), G ein Galvanometer, das mit Spiegelablesung als Nullinstrument benutzt wird.

Der Kondensator wird mit Hilfe eines rotierenden Unterbrechers U, der gleichfalls in der zitierten Abhandlung beschrieben ist, abwechselnd periodisch aufgeladen und kurzgeschlossen.

Die Widerstände der Brücke (w_1, w_2 und w_3) sind so bemessen, daß w_1 sehr klein und w_2 sehr groß ist, während w_3 in der Mitte liegt.

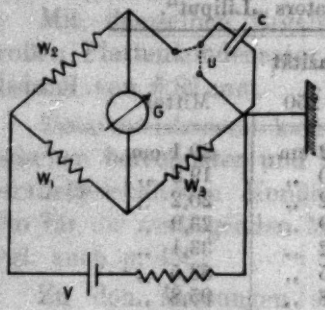


Fig. 6.

Der den Kondensator enthaltende Brückenzweig hat den Scheinwiderstand $1/nC$, wenn n die Anzahl der Aufladungen in der Sekunde bedeutet. Dann berechnet sich nach der Brückengleichung die Kapazität zu

$$C = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_1}{w_2 \cdot w_3}. \quad (19)$$ [1])

Wenn die Widerstände in Ohm angegeben sind, erhält man die Kapazität in Farad.

Im folgenden ist zur Orientierung ein Meßbeispiel angegeben.

Meßbeispiel.

21. September 1916.

Dünne Ebonitplatte mit Stanniolbelegungen von 2,51$_5$ cm Radius im Gestell parallel zum Liliputkondensator, der auf 157° eingestellt ist. Die linke Klemme des Kondensators ist geerdet.

Messung der Unterbrechungszahl n

1. Marke . . . — 0,49 sec
2. Marke . . . 71,74 sec

Zeitdauer für 10 Marken: $10\,x = 72{,}23$ sec, also

$$n = \frac{1800}{x} = \frac{1800}{7{,}22_3} = 249{,}2,$$

$V = 80$ Volt. $w_1 = 10\,\Omega$

$w_2 = 10000\,\Omega$.

1) Für größere Werte der Kapazität ist die nach der vorstehenden Formel berechnete Kapazität mit einem von Thomson angegebenen Korrektionsfaktor zu multiplizieren, der aber bei den hier in Betracht kommenden Kapazitäten zu vernachlässigen ist (vgl. Giebe l. c.).

Einstellung:
$w_1 = 9844\ \Omega$
kommutiert $= 9844\ \Omega$
Mittel $= 9844\ \Omega$.

Hieraus folgt:

$$C = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_1}{w_2 \cdot w_3} = 407{,}8_5 \cdot 10^{-12}\ F$$

$$= 366{,}8_5\ \text{cm}$$

Schaltungskapazität $= 14{,}6_5$ cm

Ergebnis $352{,}2_5$ cm.

II. *Der Thomsonsche Schwingungskreis.* Ein Thomsonscher Schwingungskreis besteht aus einer Selbstinduktion L, die in Reihe mit der zu messenden Kapazität C (in diesem Falle also mit zwei parallelen Kondensatoren) geschaltet ist (vgl. Fig. 7).

Besitzt der Schwingungskreis noch einen Widerstand R so ist das logarithmische Dekrement des Schwingungskreises

$$\Lambda = \frac{R}{2L} T.$$

Bezeichne ν die Frequenz, ω die Kreisfrequenz, so ist

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda},$$

wo v die Lichtgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge bedeutet.

Es gilt dann im Falle der Resonanz im quasistationären Zustande die Gleichung

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{\Lambda\nu}{\lambda}\right)^2. \tag{20}$$

Bei den vorliegenden Messungen war der Widerstand des Schwingungskreises und infolgedessen das logarithmische Dekrement so klein, daß man an Stelle der obigen Gleichung die Thomsonsche Resonanzformel

$$\omega^2 L C = 1 \tag{21}$$

setzen kann. Bei konstanter Wellenlänge ist also das Produkt LC konstant. Da die Selbstinduktion bei den Messungen stets ungeändert blieb, ergibt die Resonanzstellung stets den gleichen Gesamtwert der Kapazität. Es wurde nun in der Weise verfahren, daß zunächst die Resonanzeinstellung des Drehkondensators bei leerem Gestell, welche der Kapa-

zität C entsprach, ermittelt wurde; wenn nun der zu untersuchende Körper in das Gestell eingeführt wurde, ergab sich eine andere Einstellung des Drehkondensators für die Resonanz, aus der sich entsprechend eine Kapazität C_1 ermitteln ließ. Die Kapazität C_2 des zu messenden Kondensators war dann zu berechnen als (vgl. p. 425)

$$C_2 = C - C_1. \tag{22}$$

Die Erregung des Schwingungskreises geschah entweder durch die ungedämpften Schwingungen einer *Poulsenlampe* oder durch *Stoßerregung*, worauf weiter unten näher eingegangen wird.

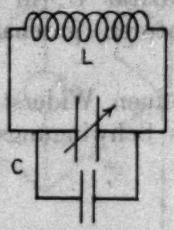


Fig. 7.

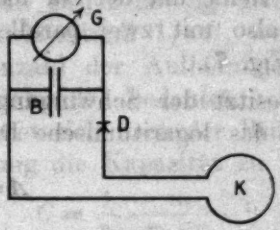


Fig. 8.

Zur Feststellung der Resonanz diente ein aperiodisch gedämpfter Detektorkreis mit Gleichstromgalvanometer, der in Fig. 8 dargestellt ist. D bezeichnet einen durch eine Schraube regulierbaren Kontaktdetektor (Siliciumdetektor), der mit einem Blockkondensator B von 2 μF und der Koppelungsspule K in Reihe liegt. Parallel zu dem Blockkondensator liegt ein Zeigergalvanometer von Hartmann & Braun mit 40 Teilstrichen.

Die im folgenden näher beschriebenen beiden Methoden lassen im allgemeinen keine größere Genauigkeit als ca. 2 Proz. zu.

Erregerkreis mit Poulsenlampe. Die *Meßanordnung* zeigt Fig. 9. Der Lichtbogen der Poulsenlampe P brannte in einer Atmosphäre von Wasserstoff und wurde nach dem Vorgange von Hrn. Lindemann durch eine stromdurchflossene Spule in langsamer Rotation erhalten. Die Kupferelektrode der Lampe wurde durch zirkulierendes Wasser gekühlt. Als Gleichstromquelle V diente eine Spannung von 240 Volt.

In den Gleichstromkreis war eine Drosselspule *Dr.* und ein Beruhigungswiderstand aus Nernstschen Eisendrähten im Vakuum (*R*) eingeschaltet.

Die Wechselstromseite des mit der Poulsenlampe gekoppelten Erregerkreises *I* bestand aus einem drehbaren Luftkondensator *C*, der Selbstinduktivität *L* und der Koppelungsspule *K'*, welche sich in großer Entfernung von dem Erregerkreis *I* und von dem Meßkreis *II* befand, um die Rückwirkung des Meßkreises *II* auf den Erregerkreis zu ver-

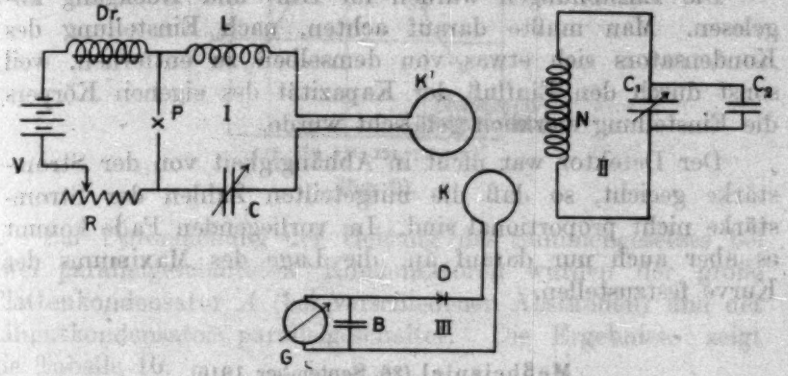


Fig. 9.

meiden. Da die Koppelung also sehr lose war, stand nicht zu befürchten, daß im Meßkreis zwei verschiedene Frequenzen auftreten würden, wie es bei fester Koppelung auch bei Resonanz der Fall ist.

Der Meßkreis *II* wurde gebildet aus den bereits erwähnten parallelgeschalteten Kapazitäten des beschriebenen Drehkondensators „Liliput" C_1 und des Meßkondensators C_2. Die Selbstinduktion bestand in einer Normalspule *N* von $6 \cdot 10^{-3}$ Henry und wurde gebildet durch Litzendraht, der auf einen Glaszylinder von großem Durchmesser aufgewickelt war.

Der Indikatorkreis *III* war der schon oben beschriebene Detektorkreis mit Gleichstromamperemeter *G*, dessen Koppelungsspule *K* dem Meßkreis so weit genähert wurde, daß das Amperemeter bei Resonanz einen größeren Ausschlag zeigte. Die genaue Resonanzeinstellung des Drehkondensators C_1 wurde durch Aufnahme einer Resonanzkurve ermittelt (vgl. das Beispiel weiter unten).

Vor den Messungen wurde zunächst der Meßkreis so eingestellt, daß die Nulleinstellung des Liliputkondensators ca. 150°—160° betrug. Dies entspricht, unter Berücksichtigung der oben angegebenen Induktivität von $6 \cdot 10^{-3}$ Henry und der Kapazität von 308 bzw. 328 cm, einer Wellenlänge von 2710 bzw. 2780 m, die im folgenden rund zu 3000 m angegeben ist. Der Erregerkreis wurde mit Hilfe des variablen Kondensators C so abgestimmt, daß er sich in Resonanz mit dem Meßkreis befand.

Die Einstellungen wurden im Hin- und Rückgang abgelesen. Man mußte darauf achten, nach Einstellung des Kondensators sich etwas von demselben zu entfernen, weil sonst durch den Einfluß der Kapazität des eigenen Körpers die Einstellung merklich gefälscht wurde.

Der Detektor war nicht in Abhängigkeit von der Stromstärke geeicht, so daß die mitgeteilten Zahlen der Stromstärke nicht proportional sind. Im vorliegenden Falle kommt es aber auch nur darauf an, die Lage des Maximums der Kurve festzustellen.

Meßbeispiel (26. September 1916).

Tabelle 9.

Liliputkondensator mit leerem Gestell (Nullpunktskurve).

α Einstellung des Drehkondensators	Ausschlag des Galvanometers		
	Hingang	Rückgang	Mittel
147,5°	7,6°	7,5°	7,5°
148	10	10	10
148,5	13	15	14
149	20	21	20,5
149,5	27,5	29,5	28,5
150	38	38,5	38,2
150,5	37,8	36	36,9
151	27	26	26,5
152	14	12	13
153	7,5	—	7,5

Aus diesen Werten wurde die folgende Resonanzkurve konstruiert, aus der sich die Resonanzeinstellung zu 150,2° bzw. 308,1 cm ergibt (vgl. Fig. 10, p. 427, Tab. 8).

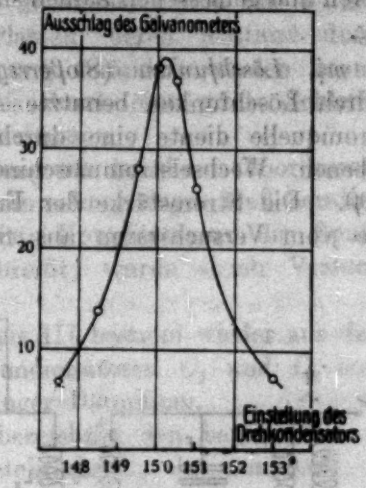


Fig. 10.

Zur Untersuchung der Geltung des Summengesetzes bei zwei parallelgeschalteten Kondensatoren wurden der große Plattenkondensator *A* (bei verschiedenen Abständen) und der Liliputkondensator parallelgeschaltet. Die Ergebnisse zeigt die Tabelle 10.

Tabelle 10.

Prüfung des Summengesetzes der Kapazitäten.

1	2	3	4	5
Abstand des Plattenkondensators	Einstellung des „Liliput"	Entsprechende Kapazität in cm	Kapazität gemessen in cm	Kapazität berechnet nach Kirchhoff in cm
0,9 mm	30,5°	54,7	288,0	289,0
1,47 „	81,4	162,5	180,2	180,0
4,52 „	136,3	279,0	63,7	62,1
Kondensat. allein (Nullpunkt) .	167,1	342,7	—	—

Die Werte der Spalte 4 sind gebildet aus der Differenz der Kapazitäten des leeren Kondensators (vgl. unterste Zeile) und der in Spalte 3 angegebenen.

Spalte 5 zeigt die nach der Kirchhoffschen Formel berechneten Werte.

Die berechneten und gemessenen Zahlen sind in genügender Übereinstimmung.

Erregerkreis mit Löschfunken (Stoßerregung). Die bei der Erregung durch Löschfunken benutzte Anordnung zeigt Fig. 11. Als Stromquelle diente eine durch einen Elektromotor angetriebenen Wechselstrommaschine M von der Frequenz $\nu = 500$. Die Stromstärke der Erregung E dieser Maschine konnte vom Versuchsraum aus reguliert werden,

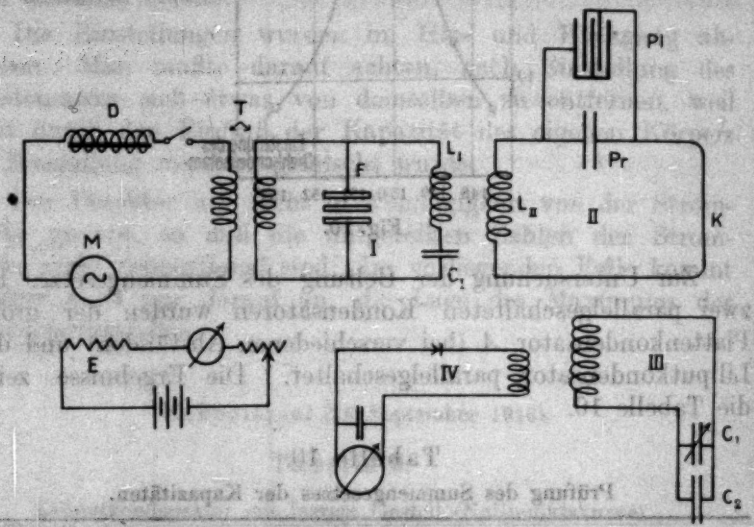


Fig. 11. Anordnung nach Dr. Lindemann.

so daß man auf diese Weise die günstigsten Bedingungen herstellen konnte. Die Maschine war unter Vorschaltung einer Drosselspule D mit der Primärseite eines Transformators T verbunden, dessen Sekundärspule durch die Löschfunkenstrecke F geschlossen wurde.

Parallel zur Löschfunkenstrecke lag der Schwingungskreis I, der gebildet wurde aus einem Kondensator C_1 in Form einer Leidnerflasche von ca. 10000 cm Kapazität in Reihe mit einer Selbstinduktionsspule L_1.

Zwischen den Eregerkreis I und den Meßkreis III war noch ein Schwingungskreis II eingeschaltet.

Bei diesem wurde die Kapazität aus einer Leidnerflasche Pr (Preßgaskondensator) gebildet, zu der ein verstellbarer Plattenkondensator Pl parallelgeschaltet war.

Dieser war zusammengesetzt aus 5 im Durchmesser ca. 1 m großen Platten, deren Abstand durch eine scherenförmige Anordnung verändert werden konnte.[1]) Im übrigen wurde der Kreis durch eine große Schleife K aus dickem Kupferdraht geschlossen.

Die Dämpfung war bei dieser Anordnung durch besondere Maßregeln auf ein sehr geringes Maß herabgedrückt.

Der günstigste Kopplungsgrad der Spulen, bei dem der Löschfunken abreißt, wurde durch Versuche experimentell festgestellt.

Der Meßkreis III bestand wieder aus den beiden parallelgeschalteten Kondensatoren C_1 und C_2 sowie einer Induktivität von geringer Dämpfung.

Kreis IV bezeichnet den bereits beschriebenen Detektorkreis, der zur Aufnahme der Resonanzkurven diente.

Die erhaltenen Resonanzkurven weisen wegen der sehr geringen Dämpfung der Anordnung eine große Schärfe auf.

Auch hier wurde das Summengesetz für Kapazitäten geprüft und bestätigt gefunden. Man kann also zusammenfassend sagen, daß bei dem Thomsonschen Schwingungskreis bis herab zu 300 m ($\nu = 10^6$) Wellenlänge eine Eichung des Drehkondensators mittels eines Plattenkondensators, wie zu erwarten stand, nicht nötig ist.

III. *Lechersche Anordnung.* Die hauptsächlich benutzte Lechersche Anordnung (Fig. 12) bestand aus einem von fünf Akkumulatoren betriebenen Induktorium J, das durch eine Funkenstrecke F von variablem Abstande geschlossen war. Die von der Funkenstrecke ausgehenden Drähte endigten in zwei Zinkplatten Z_1 (30×30 cm), die in ihrer Ebene verschoben werden konnten (vgl. H. Rubens l. c.).

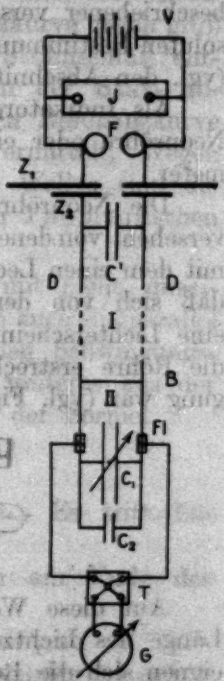


Fig. 12.

1) Vgl. H. Diesselhorst, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 1 p. 262. 1907.

Diesen gegenüber standen zwei kleinere quadratische Platten Z_2 (10 × 10 cm), deren Abstand gegen die Primärplatten veränderlich war. Mittels der hierdurch gebildeten Kondensatoren war das Lechersystem elektrostatisch mit dem Erregerkreis gekoppelt. Zur Vergrößerung der Kapazität des primären Lecherkreises I konnte zwischen die Lecherschen Drähte D ein variabler Plattenkondensator (Luftkondensator) C' geschaltet werden. Die Lecherdrähte hatten eine Länge von 3,5 m und waren in einem gegenseitigen Abstand von 8 cm ausgespannt. Eine verschiebbare Brücke B teilte das System in zwei aufeinander abstimmbare Teile I und II. Am Ende des Systems befanden sich die beiden zueinander parallelgeschalteten Kondensatoren C_1 und C_2 bzw. ein weiter unten beschriebener verschiebbarer Plattenkondensator, der zur absoluten Bestimmung der Dielektrizitätskonstante benutzt wurde (vgl. den Abschnitt „Plattenverschiebungsmethode").

Als Indikatoren für die Resonanz dienten entweder eine Neonröhre oder ein Thermoelement mit Gleichstromgalvanometer.

Die Neonröhre war mit aufgeschobenen Außenelektroden versehen, von denen meist nur die eine in metallischer Berührung mit dem einen Lecherdraht stand. Dadurch wurde es erreicht, daß sich von der mit dem Drahte verbundenen Elektrode eine Lichterscheinung ausbreitete, die sich um so weiter in die Röhre erstreckte, je stärker die Amplitude der Schwingung war (vgl. Fig. 18a).

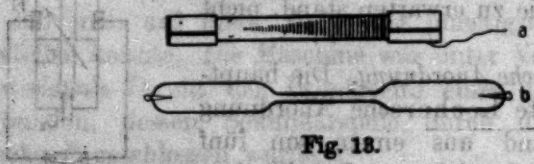


Fig. 18.

Auf diese Weise konnte die Resonanz durch maximale Länge des Lichtzeigers ermittelt werden. Für diesen Zweck eignen sich die Röhren, die in der Mitte nicht verjüngt sind, besser als die anderen (vgl. Fig. 18b).

Macht man eine genügend große Anzahl Einstellungen mit der Röhre hintereinander und mittelt diese, so erhält man ausreichend genaue Werte.

Eine genauere und dazu reproduzierbare Ermittlung der Resonanzstellung ist möglich durch Aufnahme einer Resonanz-

kurve mittels des oben erwähnten Thermoelementes T. Dieses bestand aus Cu-Konstantandrähten und war in ein Vakuumröhrchen eingeschlossen. Die Energie wurde von den Drähten kurz vor der Einmündung derselben in den Kondensator durch die Rubensschen Fläschchen *Fl* abgenommen. Das Thermoelement befand sich direkt unterhalb der Flaschen. Als Galvanometer G wurde ein Drehspulinstrument mit objektiver Spiegelablesung benutzt. Die Wellenlänge, die nur der Größenordnung nach bekannt zu sein brauchte, wurde mit Hilfe eines Slabyschen Stabes in der Nähe der Funkenstrecke gemessen.

Die Messungen wurden so ausgeführt, daß das Induktorium vom Platze des Beobachters aus betätigt werden konnte. Die Zeitdauer des Stromschlusses wurde mittels eines Metronoms für jeden Punkt der entsprechenden Resonanzkurve gleich groß gewählt (meist 8 Sekunden). Der diesem Stromschluß entsprechende ballistische Ausschlag wurde an der Skala abgelesen und aus der graphisch aufgetragenen Resonanzkurve die Resonanzstellung des Drehkondensators ermittelt. Wegen der verhältnismäßig starken Dämpfung der Wellen sind die Kurven nicht so scharf ausgeprägt wie beim Thomsonschen Schwingungskreis.

Da man es bei dieser Anordnung mit nicht quasistationären Zuständen zu tun hat, so stellen auch die parallel geschalteten Kondensatoren C_1 und C_2 einen Schwingungskreis dar, so daß man nicht mehr ohne weiteres aus der Einstellung des Drehkondensators mit Hilfe der Formel

$$C_2 = C - C_1$$

die zu messende Kapazität ermitteln kann. Es tritt folgendes ein:

Man betrachte das Kondensatorsystem am Ende der Lecherdrähte (Fig. 14).

Ist die Kapazität des Drehkondensators C_1 so groß, daß die Kapazität C_2 des zu messenden Körpers dagegen verschwindet, so schwingt hauptsächlich der Teil BC_1 als sekundäres System.

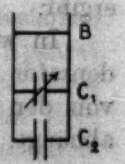


Fig. 14.

Hierin ist C groß gegen L. Dabei gilt für Resonanz die Gleichung $\omega\sqrt{LC} = 1$. Man kann sich nun vorstellen, daß wenn man etwa den Drehkondensator auf Null stellt, also aus dem System entfernt, die in C_2 zuzuschal-

tende Kapazität nicht der ausgeschalteten bei C_1 entspricht. Denn jetzt schwingt das System BC_2 mit größerer Selbstinduktion, folglich kleinerer Kapazität, da $\omega\sqrt{LC}=1$ bestehen bleibt. Aus dieser Überlegung ergibt sich also, daß die bei C_2 eingeschaltete Kapazität, wenn sie einen größeren Betrag annimmt, zu groß gemessen wird. Man kann ferner ersehen, daß der Einfluß des Schwingungskreises C_1C_2 um so geringer werden wird, je weiter die Brücke nach dem primären Ende des Lechersystems gerückt ist und je kürzer die Verbindung zwischen den beiden Kondensatoren gewählt wird.

Daher kann wohl bei dem oben angegebenen Beispiel ohne weiteres die nach der Maxwellschen Methode ermittelte Kapazität des Kondensators eingesetzt werden; doch ist dies nicht mehr der Fall, wenn sich das zu messende Dielektrikum im Gestell befindet. Für diesen Fall müssen vielmehr die der Einstellung des Kondensators entsprechenden Kapazitäten durch eine besondere Eichung ermittelt werden. Zu dieser Eichung diente der früher erwähnte große Plattenkondensator A, bei dem der Plattenabstand durch zwischengelegte Glasstückchen verändert werden konnte. Auch hierbei wurden die Resonanzeinstellungen mit Hilfe der Resonanzkurven nach der oben angegebenen Weise ermittelt, aus denen mit Hilfe der oben erwähnten Eichkurven die wahren Kapazitätswerte abgeleitet wurden. Da aus verschiedenen Gründen die Messungen häufig für längere Zeit unterbrochen werden mußten, so war es notwendig, jedesmal eine neue Eichung vorzunehmen.

Die Eichkurven wurden teils so aufgetragen, daß man aus der Einstellung des Drehkondensators C_1 die eingeschaltete Kapazität des Kondensators C_2 direkt ablesen kann, teils so, daß sich aus der am Drehkondensator ausgeschalteten Kapazität die wirkliche zu messende Kapazität des Kondensators C_2 ergibt.

In welcher Weise die Lage der Resonanz auf dem Kondensator und ihre Güte (Höhe der Resonanz und Schärfe) von den verschiedenen Faktoren des Lecherschen Systems abhängt, wurde durch eine besondere Untersuchung festgestellt.

Es wurde geprüft:

Der Einfluß der Brückenstellung;

der Einfluß der Zusatzkapazität am primären Ende des Systems (Abstand der Kondensatorplatten);

der Einfluß der Funkenstrecke und
der Einfluß der Koppelung.

Die Resultate sind hier nicht mitgeteilt worden. Für Resonanzhöhe und Breite konnte ein gemeinsames Optimum festgestellt werden.

IV. *Absolute Messungen nach der Plattenverschiebungsmethode.* Außer mit den parallelgeschalteten Kondensatoren wurden mit der Lecherschen Anordnung (bei 10 m) und mit dem Poulsenkreis (bei 3000 m) Messungen mit einem verschiebbaren Plattenkondensator ausgeführt, der die absolute Dielektrizitätskonstante sicherer und bequemer zu messen gestattete, als es mit der Belegungsmethode möglich ist. Auch hierbei treten zahlreiche Fehlerquellen auf, über deren Größe und Sinn man nur schwer etwas aussagen kann. Nur soweit, als die Methode unabhängig von der Plattendicke richtige Werte für gewisse Normalsubstanzen liefert, deren Dielektrizitätskonstante auch nach anderen Methoden mit dem gleichen Ergebnis ermittelt worden ist, hat man sichere Anhaltspunkte für die Zuverlässigkeit der Messungen.

Das Prinzip der Plattenverschiebungsmethode besteht darin, daß einmal die Resonanzstellung ohne zwischengelegtes Dielektrikum, das andere Mal mit demselben festgestellt wird. Dazu ist eine bestimmte Verschiebung δ der Platten notwendig Ist d die Dicke des zu messenden Dielektrikums, so berechnet sich die Dielektrizitätskonstante nach der Formel

$$D = \frac{d}{d - \delta} \cdot \tag{23}$$

Der beschriebene Plattenkondensator ist bereits von Hrn. Rubens benutzt worden. Der Apparat besteht aus zwei horizontal gelagerten, auswechselbaren Platten, deren obere fest montiert ist, während die untere senkrecht zu ihrer Ebene mittels einer feinen Mikrometerschraube meßbar verschoben werden kann. Für zuverlässige Messungen muß der Apparat und besonders die Schlittenführung sehr sorgfältig gearbeitet sein. Ferner ist nach einer mündlichen Mitteilung von Hrn. Rubens folgende Vorsichtsmaßregel nötig, um einwandsfreie Resultate zu erzielen. Liegt das Dielektrikum auf der unteren Platte des Kondensators auf, so wird durch den Druck desselben der horizontale Tragarm etwas durchgebogen und die Platte senkt sich um eine geringe Größe. Daher ist es not-

wendig, den Druck des Dielektrikums auf den Tragarm auch dann wirken zu lassen, wenn sich dasselbe nicht im Kondensator befindet. Dies kann dadurch erreicht werden, daß man entweder Gewichte anhängt, die der Schwere des Dielektrikums entsprechen, oder dieses selbst in eine kleine, an dem Tragarm hängende Tasche einlegt. Wendet man diese Vorsichtsmaßregel nicht an, so erhält man offenbar, besonders für schwere Platten, zu kleine Werte der Dielektrizitätskonstanten. Daraus erklären sich vielleicht die Angaben in der Mitteilung früherer Beobachter, daß diese Methode unbrauchbare und wesentlich zu kleine Werte liefert.

Um die Verhältnisse möglichst zu variieren, konnten verschieden große Platten (Durchmesser ca. 3,3, 4,5 und 5,0 cm) in den Apparat eingesetzt werden. Die meisten Beobachtungen wurden mit zwei verschieden großen Plattenpaaren angestellt (vgl. Versuchsergebnisse p. 450 u. 451).

Die Messungen selbst wurden in der folgenden Weise ausgeführt. Zunächst wurde die Brücke so eingestellt, daß man Resonanzeinstellung für möglichst geringen Plattenabstand erhielt, ohne daß Funken zwischen den Platten übersprangen; bei dieser Stellung der Brücke wurden verschiedene Messungen mit eingelegter Platte vorgenommen, darauf nach Einlegen der Platte in die Tasche doppelt soviel Einstellungen ohne Dielektrikum ausgeführt. Schließlich wurde die Platte wieder eingelegt und die erste Messung mit derselben Anzahl Einstellungen wiederholt. Auf diese Weise konnte man erkennen, ob sich bei den verschiedenen Manipulationen etwas an der Einstellung verändert hatte. Dasselbe Verfahren wurde für vier andere Brückenstellungen angewendet, bei denen sich die Kondensatorplatten in größerem Abstand befanden. Dadurch erhielt man Resonanz für verschiedene Stellen der Trommelteilung. Die erhaltenen Werte von δ wurden gemittelt.

In der folgenden Tab. 11 ist zur Erläuterung ein Meßbeispiel vollständig wiedergeben.

Messung von O. 118 (O. 2051) 10. Oktober 1916.

λ = ca. 10 m.

Durchmesser der Kondensatorplatten = 5,0 cm.

Tabelle 11.

Meßbeispiel für die Plattenverschiebungsmethode.
Einstellungen mit (m.) und ohne (o.) Dielektrikum. Dicke $d = 2{,}000$ mm.

m.	o.	m.	o.	m.	o.	m.	o.	m.	o.	
5,470	3,740	5,499	3,790	5,538	3,800	5,571	3,832	5,612	3,863	
482	740	494	771	537	810	571	850	608	869	
478	746	502	760	538	810	570	834	610	870	
488	743	501	774	548	810	580	832	611	880	
468	739	508	777	547	800	560	836	610	873	
469	751	508	769	550	809	571	830	615	868	
469	740	495	790	536	812	573	840	604	873	
482	740	503	778	531	806	565	849	613	872	
460	738	511	760	538	806	570	835	612	873	
482	750	511	770	538	806	581	832	608	876	
5,475	3,743	5,503	3,774	5,540	3,807	5,571	3,837	5,610	3,872	
$\delta = m - o$	1,732	—	1,729	—	1,733	—	1,734	—	1,738	
$d - \delta$	0,268	—	0,271	—	0,267	—	0,266	—	0,262	Mittel 0,267

$$D = \frac{d}{d-\delta} = \frac{2{,}000}{0{,}267} = 7{,}49\,.$$

In der Tabelle sind für fünf Brückenstellungen die Resonanzeinstellungen der Trommel mit und ohne Platte (m. und o.) angegeben.[1]) In der Spalte m. entsprechen die über dem Strich befindlichen Zahlen den ersten Einstellungen mit Platte. Darauf sind die in der Spalte o. enthaltenen Zahlen aufgenommen, schließlich die unter dem Strich der Spalte m. stehenden.

Unter jeder Spalte sind die Mittelwerte und die daraus sich ergebenden Größen δ und $d - \delta$ angegeben. Aus d und dem Gesamtmittel von $d - \delta$ ist die Dielektrizitätskonstante D ermittelt worden.

Die Plattenverschiebungsmethode wurde außer bei $\nu = 3 \cdot 10^7$ im Lecherkreis auch bei $\nu = 3 \cdot 10^5$ im Poulsenkreis verwendet.

Von verschiedenen Glassorten der Firma Schott & Gen. waren mehrere Platten aus demselben Material vorhanden. Um zu sehen, ob es einen Unterschied gäbe, wenn man nur eine Glasplatte mißt oder deren mehrere im Plattenverschiebungsapparat aufeinanderschichtet, wurden einige Kontrollversuche angestellt, deren Ergebnisse im folgenden kurz zusammengestellt sind. Die Werte stimmen mit den übrigen innerhalb der Fehlergrenzen.

1) Die Trommeleinstellungen ergeben direkt Millimeter.

Tabelle 12.

Plattenverschiebungsmethode mit mehreren Platten.

Material	Dielektrizitätskonstante		
	mit 3 Platten	mit 2 Platten	mit 1 Platte
O. 1266 (O. 1353)	—	7,64	7,86
O. 381 (O. 2074)	6,93	7,04	6,81
O. 118 (O. 2051)	7,37	7,44	7,46
O. 1209 (O. 1993)	—	8,30	8,41

Von den Gläsern wurden stets zwei identische Exemplare gemessen, deren Werte in der großen Tabelle gemittelt wurden. Um zu zeigen, wie die Einzelwerte miteinander übereinstimmen, wurden dieselben in der folgenden Tab. 13 zusammengestellt, in der auch die anderen Substanzen, von denen zwei Exemplare vorhanden waren, aufgeführt sind.

Tabelle 13.

Mittelwerte der Dielektrizitätskonstante.

		Mittel			Mittel
3.	O. 118	7,20	7,19	14. Quarz ⊥	4,48	4,45
4.		7,18		15. „ ⊥	4,46	
5.	O. 1266	7,64	7,60	16. „ ⊥	4,42	
6.		7,57		17. Ebonit	3,04	3,02
7.	O. 381	6,84	6,76	18. „	3,00	
8		6,68		19. Gummi, nat. I	2,76	2,77
12.	Quarz, amorph	3,66	3,66	20. „ „ II	2,78	
13.		3,67		21. „ synth. I	2,76	2,76
				22. „ „ II	2,76	

Da die für das schwerste Silikatflint S. 461 nach der Plattenverschiebungsmethode ausgeführten Messungen auffallend hohe Werte ergaben (17,3 bzw. 17,5), wurden noch Kontrollmessungen mit Belegung vorgenommen, die für $\nu = 10^5$ und 10^6 den Wert 16,3 ergaben (vgl. p. 447, 448). Da die Plattenverschiebungsmethode für hohe Dielektrizitätskonstanten ungenau wird, wenn die Messung in Luft vorgenommen wird, wurden von Hrn. Rubens nach dieser Methode Messungen in Benzol statt in Luft ausgeführt. Das bietet den Vorteil, daß $d - \delta$ um die Größe der Dielektrizitätskonstanten von Benzol, also rund um das 2,3fache, vergrößert, somit hierbei eine größere Empfindlichkeit der Einstellung erzielt wird. Bei diesen Messungen wurde für das oben erwähnte Glas der

Wert 15,5 bei $\nu = 3 \cdot 10^7$ gefunden. Der Wert 16,3 kommt dem wahren Werte der Dielektrizitätskonstanten für die Glassorte S. 461 sicherlich nahe. In analoger Weise wurden auch bei einer Anzahl anderer Substanzen die Dielektrizitätskonstanten in Luft wie in Benzol, zum Teil von Hrn. Rubens, zum Teil von mir ermittelt. Über die Verwertung der auf die verschiedenen Weisen erhaltenen Zahlen vgl. Tabelle auf p. 452, 453.

F. Versuchsergebnisse.

Die aus den Beobachtungen abgeleiteten Ergebnisse (bei der Maxwellschen Methode unmittelbar die Kapazitäten, bei den anderen die Resonanzeinstellungen und die daraus abgeleiteten Kapazitäten) sind zusammen mit den berechneten Leerkapazitäten und den hieraus ermittelten Dielektrizitätskonstanten für die einzelnen Methoden im folgenden zusammengestellt. Die Zusammenstellung der erhaltenen Resultate folgt auf p. 452—454.

Die Tabellen 14—19 (p. 445—451) enthalten die Versuchsergebnisse für

I.	Maxwells Methode	($\lambda = 2 \cdot 10^6$ m)
II.	Poulsenkreis	($\lambda = 3000$ m)
III.	Löschfunkenkreis	($\lambda = 300$ m)
IV.	Lecheranordnung	($\lambda = 30$—40 m)
V.	Plattenverschiebungsmethode	($\lambda = 10$ m)
VI.	„	($\lambda = 3000$ m)

Die Nummern der Materialien auf allen Tabellen entsprechen den auf p. 414—415 für diese Stoffe angegebenen Nummern. Die erste Spalte enthält das Material, die zweite die Dicke der Platten in Millimetern.

I. *Maxwellsche Methode.* In Spalte 3 der Tab. 14 ist der Radius der Belegung in Zentimetern angegeben, in Spalte 4 die nach Gleichung (13) p. 420 berechnete Leerkapazität ($C_0 = c_{12}$). Die Unterbrechungszahl n (vgl. p. 428 u. 429) befindet sich in Spalte 5, die gemessene Kapazität abzüglich der Größe $c = R/\pi$ in Spalte 6 und die daraus abgeleitete Dielektrizitätskonstante D in Spalte 7.

Ebonit (17 und 18) wurde mit zwei verschiedenen Belegungen ($R = 2{,}51_5$ und 1,49 cm) gemessen. Die damit erhaltenen Werte der D.K. sind in guter Übereinstimmung.

Marmor und Gips sind mit verschiedenen Unterbrechungen ($n = 250$ und 160) untersucht und zeigen zwischen diesen auch keinen Unterschied.

Bei Glas O. 1993 (9) ist zu bemerken, daß davon zwei schmale Stücke von gleicher Dicke zur Verfügung standen, die möglichst dicht aneinandergelegt und zwischen die Platten eines kleinen Luftkondensators von 5 cm Durchmesser gebracht wurden, weil eine Belegung mit Stanniolplatten dieser Größe technisch schwer ausführbar war. Um den Einfluß des zwischen den Glasplatten befindlichen Spaltes zu ermitteln, wurde dieser bei der einen Messung absichtlich verbreitert, wodurch aber nur eine geringe Änderung der D.K. auftrat (vgl. Tabelle). Rückte man die Platten nun wieder zusammen, so erhielt man genau den ursprünglichen Wert. Jedoch ergab sich die daraus berechnete D.K. als zu klein (5,5 gegen 8,3 bei der Plattenverschiebungsmethode bei $\nu = 10^5$ und $3 \cdot 10^7$). Eine Wiederholung der Kapazitätsmessung nach der Maxwellschen Methode ergab wieder den kleinen Wert, so daß also der Fehler an der Art des Aufliegens der Belegung usw. liegen mußte. Die Messung wurde deshalb mit einem einzigen Glasstück vorgenommen, das mit einer kleinen Stanniolbelegung von 3,25 cm Durchmesser versehen war, die mit Ricinusöl aufgeklebt wurde. Es ergab sich als D.K. in Übereinstimmung mit den Messungen nach der Plattenverschiebungsmethode $D = 8{,}23$. Der hohe Wert ist also tatsächlich der richtige. Dementsprechend sind auch die bei anderen Frequenzen erhaltenen Zahlen korrigiert worden. Die Durchführung der Messungen bei anderen Frequenzen mit kleiner Belegung mußte wegen Einberufung zum Heeresdienst unterbleiben. Aus den beschriebenen Messungen ist aber ersichtlich, daß man selbst für ziemlich kleine Belegungen noch einigermaßen brauchbare Werte für die D.K. erhalten kann.

Beim Gips (Nr. 36) waren die Belegungen zunächst mit Wasser aufgeklebt. Dabei erhielt man aber unzuverlässige Werte; es stellte sich heraus, daß das Material Spalten enthielt, in die das Wasser eindrang. Als dagegen die Belegungen mit Öl befestigt worden waren, erhielt man dieselbe Kapazität wie bei den anderen Frequenzen.

Die Gläser O. 381 (Nr. 7 u. 8 der Tabelle) ließen auf Leitfähigkeit oder Oberflächenleitung schließen; denn das

Galvanometer kroch nach Abgleichung der Widerstände noch weiter. Diese Gläser zeigten bei der Maxwellschen Methode ($\nu = 250$) auffallend hohe Werte der D.K. Die Kapazität des Glases mit Belegung betrug bei der Maxwellschen Methode ca. 51 cm, während die anderen Methoden nur ca. 40 cm ergaben. Wenn Oberflächenleitung die Ursache dieser Erscheinung bildete, so war zu vermuten, daß diese Fehlerquelle durch Abkochen des Glases nach der Vorschrift von Hrn. Warburg beseitigt werden konnte. Das Verfahren wurde daher bei diesem Glase angewendet, worauf die Stanniolbelegungen mit Öl befestigt wurden; die Messung der Kapazität ergab dann 41,1 cm. Der Unterschied gegen die anderen Messungen liegt also schon innerhalb der Fehlergrenzen. Dieser

Tabelle 14.

I. Versuchsergebnisse bei Maxwellscher Methode (1 bis $2 \cdot 10^6$ m.)

	1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Material	Dicke mm	Radius der Beleg. cm	Leerkapaz. cm	n	Kapaz. gemess. $- R/\pi$ cm	D
3	O. 118 (O. 2051) a	2,00	2,507	8,528	250	60,17	7,06
4	O. 118 (O. 2051) b	2,00	2,50$_2$	8,528	250	60,77	7,15
5	O. 1266 (O. 1353) a	2,00	2,515	8,600	250	66,21	7,70
6	O. 1266 (O. 1353) b	2,00	2,525	8,664	250	65,71	7,59
7	O. 381 (O. 2074) a	1,995	2,045	5,769	250	(50,92)	(8,82) [1]
8	O. 381 (O. 2074) b	1,995	2,05$_0$	5,979	250	(53,86)	(9,29) [1]
9	O. 1209 (O. 1993)	2,00	2,48$_9$	8,704	250	48,93	(5,61)
	do. mit Spalt	2,00	2,405	8,704	250	48,63	(5,59)
	do. ohne Spalt	2,00	2,480	8,704	250	48,91	(5,61)
	do. [2]	2,00	1,62$_5$	3,39	250	27,9	8,23
12	Quarz amorph c	2,027	2,050	5,711	250	20,89	3,66
13	„ „ d	1,909	2,050	6,041	250	22,25	3,69
15	Quarz ∥ b	2,003	2,050	5,775	250	24,89	4,32
16	„ ∥ c	2,010	2,050	5,755	250	25,53	4,43
17	Ebonit dick	3,920	2,515	4,591	250	14,27	3,11
	„ „	3,920	1,49	3,07	250	9,57	3,12
18	Ebonit dünn	2,040	2,515	8,400	250	26,73	3,17
	„ „	2,040	1,49	1,69	250	4,99	2,95
29	Hg_2Cl_2	3,065	2,515	5,77$_4$	250	54,40	9,42
35	Marmor	2,710	3,150	9,998	250	83,80	8,38
	„	2,710	3,150	9,998	166	82,05	8,20
36	Gips	2,638	2,492	6,612	250	34,36	5,21
	„	2,638	2,492	6,612	166	34,44	5,21

1) Werte des unabgekochten Glases (vgl. Bem. p. 444).
2) Mit *einer* Platte und Stanniolbelegung (vgl. p. 444).

letzte Wert ist in die endgültige Tabelle aufgenommen worden. Wahrscheinlich ist die Kapazität durch längeres Abkochen noch etwas herabzudrücken. Ferner ist aber auch zu bedenken, daß nach Herausnehmen des Glases aus dem Exsikkator bis zur Messung eine kleine Zeit verstreicht. Bei längerem Stehen an der Luft zeigte sich jedenfalls ein deutliches Ansteigen der scheinbaren Kapazität bzw. D.K., so daß nach genügend langer Zeit der alte Wert wieder erreicht wurde. Hieraus ergibt sich die Regel, daß man bei Anwendung von Schwingungen geringer Frequenz Gläser abkochen muß, falls man nicht eine scheinbare anomale Dispersion finden will. Diese Vermutung kann auch noch darin eine Stütze finden[1]), daß das Glas O. 381 im Katalog der Firma Schott & Gen. zur höchsten hydrolytischen Klasse gezählt und dementsprechend mit dem Zeichen h_5 versehen ist (p. 414).

Die anderen Gläser sind bei der Maxwellschen Methode nicht abgekocht worden; die Notwendigkeit dieses Verfahrens wurde erst gegen Schluß der Arbeit erkannt, und es blieb wegen Einberufung zum Heeresdienst keine Zeit mehr, die anderen Gläser auf dieselbe Weise zu behandeln. Es ist daher möglich, daß die betreffenden Werte noch etwas zu hoch sind.

II. *Poulsenkreis.* In Spalte 3 der Tab. 15 ist wieder der Radius der Belegung, in Spalte 4 die in derselben Weise berechnete Leerkapazität angegeben. Spalte 5 enthält die Einstellung des Drehkondensators in Verbindung mit dem Dielektrikum, Spalte 7 die unter Berücksichtigung des jeweiligen Nullpunkts (Spalte 6) ermittelte Kapazität, abzüglich der Erdkapazität $R/2\pi$. Spalte 8 zeigt die Dielektrizitätskonstante D. Die geschmolzenen Salze KBr und KJ (32 u. 33) ergaben keine zuverlässigen Einstellungen; vielmehr änderte sich diese etwas während des Stromdurchganges. Die Ursache dieser Erscheinungen ist auf den Umstand zurückzuführen, daß die Platten porös waren und daß Öl in die Poren eindrang. Ebenso ist AgBr unsicher. Für einige der Materialien sind Kontrollmessungen angestellt worden, die meist zu Mittelwerten vereinigt sind.

---

1) Vgl. H. Rubens, Über Reflexionsvermögen und Dielektrizitätskonstante einiger amorpher Körper. p. 1280. 1916.

III. *Löschfunkenkreis.* Die Tab. 16 ist genau so eingerichtet wie beim Poulsenkreis; auch hier wurden zum Teil Kontrollbeobachtungen angestellt, die meist zu Mittelwerten vereinigt wurden.

IV. *Lecherkreis mit parallelgeschalteten Kondensatoren.* Die Spalten 2, 3 und 4 der Tab. 17 entsprechen denen

Tabelle 15.

II. Versuchsergebnisse beim Poulsenkreis.

1		2	3	4	5	6	7	8
Nr.	Material	Dicke in mm	Radius d. Belegung cm	Leerkap. berechnet cm	Einst. mit Dielektr.	Einst. ohne Dielektr.	Kapaz. $= R/2\pi$ gemessen cm	D
1	Glas violett . .	1,73	2,51	9,848	135,2°	168,2°	67,0	6,81
2	Glas weiß . . .	2,24	2,51	7,729	140,6	168,2	56,2	7,28
3	O. 118 (O. 2051)	2,00	2,51	8,528	121,2	150,2	59,8	7,01
4	„	2,00	2,51	8,528	121,2	150,2	59,8	7,03
5	O. 1266 (O. 1315)	2,00	2,51	8,600	119,0	150,2	64,2	7,47
6	„	2,00	2,52	8,664	118,8	150,2	64,8	7,48
7	O. 381 (O. 2074)	1,99	2,04	5,769	131,3	150,2	38,8	6,72
8	„	1,99	2,05	5,797	131,3	150,2	38,8	6,69
9	O. 1209 (O. 1993)	2,00	2,48	8,704	127,7	150,2	46,4	5,33
12	Quarz amorph .	2,03	2,05	5,711	143,3	153,3	20,6	3,61
13	„ „ .	1,91	2,05	6,041	142,5	153,3	22,4	3,71
14	Quarz ∥ . . .	1,93	2,05	5,980	155,0	168,2	26,3	4,40
14	„	2,00	2,05	5,775	140,8	153,3	25,5	4,41
16	„	2,01	2,05	5,755	141,0	153,3	25,4	4,41
17	Ebonit	3,92	2,51	4,591	160,9	168,2	14,2	3,09
18	„	2,04	2,51	8,440	155,2	168,2	25,7	3,04
19	Gummi nat. I .	1,75	2,52	9,840	123,9	137,9	28,1	2,85
20	„ „ II .	1,96	2,51	8,760	156,1	168,2	24,1	2,75
21	Gummisynthet. I	1,94	2,51	8,836	155,8	168,2	24,5	2,77
22	„ „ II	1,86	2,51	9,195	155,6	168,2	25,2	2,74
23	AgCl	1,12	2,76	17,892	66,0	168,2	213,9	11,90
24	AgBr	0,93	2,76	21,991	44,0	168,2	263,1	11,90
25	AgCN	2,18	2,76	9,502	143,8	168,2	49,3	5,19
26	TlCl	1,49	2,05	7,639	60,0	168,2	227,1	29,7
27	TlBr	1,95	2,05	5,925	92,0	168,2	159,4	26,9
29	Hg_2Cl_2	3,06	2,51	5,774	127,2	153,3	53,6	9,30
					141,2	168,2	55,0	9,52
30	NH_4Cl	3,14	2,54	5,756	148,7	168,2	39,5	6,85
31	NH_4Br	2,84	2,52	6,225	145,1	168,2	46,7	7,50
32	KBr	2,58	3,01	9,601	146,5	168,2	43,7	4,55
33	KJ	2,86	3,59	12,288	141,0	168,2	55,1	4,48
34	Fluorit	2,17	2,25	6,432	147,1	168,2	42,3	6,58
35	Marmor	2,71	3,15	9,998	109,2	150,2	85,3	8.53
36	Gips.	2,64	2,49	6,612	133,9	150,2	33,3	5,03
40	S. 461	4,99	2,00	2,164	120,3	137,8	35,4	16,3

Tabelle 16.

III. Versuchsergebnisse beim Löschfunkenkreis.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Nr.	Material	Dicke in mm	Radius d. Belegung cm	Leerkap. berechnet cm	Einst. mit Dielektr.	Einst. ohne Dielektr.	Kapaz. $= R/2\pi$ gemessen cm	D
1	Glas violett . .	1,73	2,51	9,848	121,4°	153,4	66,4	6,75
					121,7	153,4	66,1	6,71
2	Glas weiß . . .	2,24	2,51	7,729	126,9	153,4	54,6	7,07
3	O. 118 (O. 2051)	2,00	2,51	8,528	120,4	149,9	60,7	7,11
4	„	2,00	2,51	8,528	120,7	149,9	60,6	7,13
5	O. 1266 (O. 1315)	2,00	2,51	8,600	118,9	149,9	64,2	7,46
6	„	2,00	2,52	8,664	118,7	149,9	64,6	7,46
7	O. 381 (O. 2074)	1,99	2,04	5,769	130,9	149,9	39,2	6,79
8	„	1,99	2,05	5,797	131,2	149,9	38,3	6,61
9	O. 1209 (O. 1993)	2,00	2,48	8,704	124,9	149,9	50,3	5,78
12	Quarz amorph .	2,03	2,05	5,711	141,2	151,3	20,4	3,58
13	„ „ .	1,91	2,05	6,041	140,7	153,4	21,7	3,59
14	Quarz ∥ . . .	1,93	2,05	5,980	140,7	153,4	26,3	4,40
15	„	2,00	2,05	5,775	138,8	151,3	25,2	4,37
16	„	2,01	2,05	5,755	138,8	151,3	25,3	4,40
17	Ebonit	3,92	2,51	4,591	146,7	153,4	13,9	3,03
18	„	2,04	2,51	8,440	141,3	153,4	24,8	2,94
19	Gummi nat. I .	1,75	2,52	9,840	126,2	140,0	28,1	2,85
20	„ „ II .	1,96	2,51	8,760	141,6	153,4	24,5	2,80
21	Gummisynthet. I	1,94	2,51	8,836	141,6	153,4	24,5	2,77
22	„ „ II	1,86	2,51	9,195	141,3	153,4	25,0	2,72
23	AgCl	1,12	2,76	17,892	56,2	153,4	206,1	11,5
24	AgBr	0,93	2,76	21,991	26,7	153,4	267,7	12,3
					20,8	149,9	262,5	11,9
25	AgCN	2,18	2,76	9,502	130,1	153,4	47,6	5,01
26	TlCl	1,49	2,05	7,639	53,4	153,4	211,7	29,35
					45,5	151,3	223,8	
27	TlBr	1,95	2,05	5,925	79,6	153,4	156,0	26,35
					75,1	151,3	161,0	27,1
29	Hg_2Cl_2	3,06	2,51	5,774	127,2	153,4	54,1	9,37
					125,4	151,3	54,1	9,37
30	NH_4Cl	3,14	2,54	5,756	134,1	153,4	39,6	6,88
					132,1	151,3	39,4	6,85
31	NH_4Br	2,84	2,52	6,225	131,2	153,4	45,8	7,36
					129,9	151,3	44,1	7,09
					127,8	149,9	45,3	7,29
32	KBr	2,58	3,01	9,601	132,7	153,4	42,6	4,44
					130,2	151,3	43,0	4,48
33	KJ	2,86	3,59	12,288	128,3	153,4	51,2	4,16
					127,9	151,3	47,9	4,42
34	Fluorit	2,17	2,25	6,432	133,1	153,4	41,7	6,49
35	Marmor	2,71	3,15	9,998	113,0	153,4	84,0	8,40
36	Gips	2,64	2,49	6,612	137,0	153,4	33,8	5,11
					133,1	149,9	34,2	5,17
40	S. 461	4,99	2,00	2,164	122,6	139,9	35,4	16,3

Tabelle 17.

IV. Versuchsergebnisse beim Lecherkreis (30—40 m).

1	2	3	4	5		6	7
Nr.	Material	Dicke mm	Radius d. Beleg. cm	Leerkap. berechnet cm	Einstellung leer	Einstellung mit Platte	Kapaz. $-R/2\pi$ cm	D
1	Glas violett . .	$1{,}73_2$	—	18,92	89,3°	65,7°	126,6	6,83
2	Glas weiß . . .	$2{,}24_1$	—	18,92	89,3	65,8	128,6	6,95
3	„ O. 2051 a (O. 118)	2,00	$2{,}50_7$	$8{,}52_8$	147,0	117,8	60,6	7,11
4	„ O. 2051 b (O. 118)	2,00	$2{,}50_7$	$8{,}52_8$	144,5	117,6	60,6	7,14
5	„ O. 1353 a 1266	2,00	$2{,}51_5$	$8{,}60_0$	147,0	117,0	64,25	7,48
6	„ O. 1353 b 1266	2,00	$2{,}52_5$	$8{,}66_4$	144,5	115,5	65,1	7,51
7	„ O. 2074 a (O. 381)	$1{,}99_5$	$2{,}04_5$	$5{,}76_9$	144,5	127,8	38,5	6,68
8	„ O. 2074 b (O. 381)	$1{,}99_5$	$2{,}05_6$	$5{,}79_7$	144,5	128,5	38,0	6,61
9	„ O. 1993 (O. 1209)	2,00	$2{,}48_0$	$8{,}70_4$	144,5	121,3	48,2	5,54
12	Quarz amorph c	$2{,}02_7$	$2{,}05_0$	$5{,}71_1$	—	153,8	20,4	3,57
13	„ „ d	$1{,}90_9$	$2{,}05_0$	$6{,}04_1$	—	135,4	21,5	3,56
15	Quarz ⊥ b . .	$2{,}00_3$	$2{,}05_0$	$5{,}77_5$	146,2	134,5	25,1	4,34
16	„ „ c . .	$2{,}01_0$	$2{,}05_0$	$5{,}75_5$	—	134	25,5	4,43
17	Ebonit dick . .	$3{,}92_0$	$2{,}51_5$	$4{,}59_1$	—	160,5	14,0	3,05
18	„ dünn . .	$2{,}04_0$	$2{,}51_5$	$8{,}44_0$	—	115	25,1	$2{,}97_5$
19	Gummi nat. I .	$1{,}75_4$	$2{,}51_5$	$9{,}73_4$	168	154,5	25,6	2,63
20	„ „ II	$1{,}96_1$	$2{,}51_5$	$8{,}76_0$	168	155	24,6	2,81
21	Gummi synthet. I	$1{,}94_3$	$2{,}51_5$	$8{,}83_6$	168	155	24,6	2,79
22	„ „ II	$1{,}86_3$	$2{,}51_5$	$9{,}19_5$	168	154,5	25,6	2,79
23	AgCl	$1{,}12_2$	$2{,}76_1$	$17{,}89_2$	—	68	$204{,}5_5$	$11{,}4_2$
24	AgBr	$0{,}92_8$	$2{,}76_1$	$21{,}99_1$	—	42,5	278,6	12,7
25	AgCN	$2{,}18_0$	$2{,}76_1$	$9{,}50_2$	—	110,5	48,7	$5{,}1_3$
26	TlCl	$1{,}48_8$	$2{,}05_0$	$7{,}63_9$	—	60,5	218,7	28,6
27	TlBr	$1{,}94_9$	$2{,}05_0$	$5{,}92_5$	—	94,5	151,7	25,6
29	Hg_2Cl_2	$3{,}06_5$	$2{,}51_5$	$5{,}77_4$		120,5	54,2	$9{,}3_8$
30	NH_4Cl	$3{,}14_0$	$2{,}54_2$	$5{,}75_6$	—	149	38,8	6,74
						90,8	42,7	6,81
31	NH_4Br	$2{,}84_0$	$2{,}52_3$	$6{,}22_5$	—	92	48,7	7,14
34	Fluorit	$2{,}17_4$	$2{,}25_5$	$6{,}43_2$	—	147	42,15	6,57
						146		
35	Marmor	$2{,}71_0$	$3{,}15_0$	$9{,}99_8$	—	127	83,5	8,35
36	Gips	$2{,}63_8$	$2{,}49_2$	$6{,}61_2$	—	149,5	33,6	5,08

der früheren Tabellen. In Spalte 5 sind die Einstellungen des leeren Kondensators und desselben mit Platte nebeneinander angegeben. Aus diesen beiden Zahlen ergibt sich die mittels der Eichkurve (vgl. p. 438) ermittelte Kapazität (vgl. Spalte 6), von der noch der Wert $R/2\pi$ abgezogen ist. Spalte 7 enthält die Dielektrizitätskonstanten.

V. *Plattenverschiebung im Lecherkreis bei* $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ ($\nu = 3 \cdot 10^7$). Die Tab. 18 enthält direkt die Dielektrizitätskonstanten für die verschiedenen Plattengrößen (3,3, 4,5 und 5,0 cm) und die daraus gebildeten Mittelwerte. Um nochmals die Zuverlässigkeit der Anordnung zu prüfen, wurden zuerst einige bekannte Stoffe wie Fluorit, Marmor und Steinsalz gemessen. Das Glas weiß (Nr. 2) ist nicht dasselbe Stück wie bei den früheren Messungen, jedoch ist die Zusammensetzung die gleiche.

Die Genauigkeit der Messungen mag im Durchschnitt ca. 2 Proz. betragen.

Tabelle 18.

V. Versuchsergebnisse bei der Plattenverschiebungsmethode (10 m) $\nu = 3 \cdot 10^7$.

Nr.	Material	d Dicke mm	D Durchmesser der Platte 3,3 cm	4,5 cm	5,0 cm	D Mittel
1	Glas violett . . .	1,73$_3$	6,85	6,94	—	6,89$_5$
2	Glas weiß	2,24$_1$	—	7,13	7,23$_5$	7,18
3	O. 2051 a	2,00	—	7,42$_5$	7,49	7,46
5	O. 1353 a	2,00	—	7,75	7,9$_7$	7,86
7	O. 2074 a	1,99$_5$	6,76	6,87	—	6,81$_5$
9	O. 1993	2,00	8,48	—	8,34	8,41
13	Quarz amorph d .	1,90$_9$	3,79$_5$	3,80	—	3,80
14	Quarz ∥ a	1,93$_0$	4,71	4,68	—	4,69$_5$
19	Gummi nat. I . .	1,75$_4$	2,73$_5$	2,74	—	2,74
20	„ „ II . .	1,96$_1$	—	2,76	2,79	2,77$_5$
21	Gummi synthet. I	1,94$_3$	—	2,73$_5$	2,73$_5$	2,73$_5$
22	„ „ II	1,86$_3$	2,79$_5$	2,82	—	2,81
34	Fluorit	2,17$_4$	6,82	6,78	—	6,80
35	Marmor	2,71$_0$	—	8,34	—	8,34
36	Steinsalz	3,12	—	6,04	—	6,04
38	Glas schwarz II .	2,53$_7$	—	7,31	—	7,31
39	Glas weiß II . . .	2,46$_5$	—	7,16	—	7,16
40	Silikatflint	4,99	—	17,70	—	17,70
41	Phosphatkron . .	5,00$_5$	—	6,43	—	6,43
42	Fluorkron	5,01$_9$	—	5,89	—	5,89
43	Uviolglas	1,80	—	5,61	—	5,61

VI. *Plattenverschiebungsmethode im Thomsonkreis bei* 3000 m ($\nu = 10^5$). Ganz in derselben Weise wie unter V. wurden die Substanzen mit der Plattenverschiebungsmethode bei $\nu = 10^5$ gemessen, wobei der Plattenverschiebungsapparat parallel zum Drehkondensator in den Thomsonschen Schwingungskreis eingeschaltet wurde (vgl. Tab. 19).

Tabelle 19.

Versuchsergebnisse bei der Plattenverschiebungsmethode ($\lambda = 3000$ m, $\nu = 10^5$).

Nr.	Material	Dicke der Platte d mm	D	Nr.	Material	Dicke der Platte d mm	D
1	Glas violett . .	1,732	6,85	29	Hg_2Cl_2	3,06	9,14
3	O. 118 (O. 2051)	2,00	7,44	30	NH_4Cl	3,14	6,74
5	O. 1266 (O. 1353)	2,00	7,91	31	NH_4Br	2,84	6,95
7	O. 381 (O. 2074)	1,995	6,95	32	KBr	2,58	4,44
9	O. 1209 (O. 1993)	2,00	8,33	34	Flußspat . . .	2,17$_4$	6,80
12	Quarz amorph.	1,909	3,72	35	Marmor . . .	2,710	8,31
15	Quarz ∥	1,93	4,65	36	Gips	2,638	5,15
18	Ebonit	2,04	2,94	37	Steinsalz . . .	3,12	5,79$_5$
19	Gummi nat. I.	1,75$_4$	2,75	38	Glas schwarz II	2,537	7,47
21	Gummi synth. I	1,94$_3$	2,77	39	Glas weiß II .	2,46$_5$	7,16
23	AgCl	1,122	11,12	40	Silikatflint . .	4,99	17,46
24	AgBr	0,928	12,25	41	Phosphatkron .	5,00$_5$	6,40
25	AgCN	2,18	5,07	42	Uviolglas . . .	1,800	5,66
26	TlCl	1,488	28	43	Fluorkron . . .	5,01$_9$	5,84

G. Zusammenstellung der Resultate und Vergleichung mit anderen Beobachtern.

In der Tab. 20 sind die Kapazitäten für die verschiedenen Frequenzen zusammengestellt, bei denen die Substanzen mit Belegung gemessen wurden. Da die Größe der Belegung bei den angegebenen Wellenlängen nicht in allen Fällen genau dieselbe war, so sind die Zahlen nicht ohne weiteres vergleichbar. Der Vergleich ist erst möglich nach Berechnung der Dielektrizitätskonstanten, die in der darauffolgenden Tabelle 21 aufgeführt sind. Hier ist hinter dem Material zunächst die ungefähre Kapazität (Spalte 2) angegeben, die das Dielektrikum mit Belegung besaß. Aus der Größenordnung derselben läßt sich ein Schluß darauf ziehen, welche Genauigkeit man etwa erwarten darf. Die Genauigkeit ist

naturgemäß bei kleinen Werten prozentisch geringer als bei großen. Da in keinem einzigen Falle eine außerhalb der Fehlergrenze liegende Änderung der D.K. mit der Wellenlänge mit Sicherheit festgestellt werden konnte, so wurden die bei den verschiedenen Frequenzen nach der Belegungs-

Tabelle 20.

Zusammenstellung der gemessenen Kapazitäten in cm.

Nr.	Wellenlänge in m Schwingungszahl ν	$1{,}2 \cdot 10^6$ 250	3000 10^5	300 10^6	30—40 10^7
	Material				
1	Glas violett	—	67,0	66,4	—
2	Glas weiß	—	56,2	54,6	—
3	O. 118 (O. 2051) a . .	60,17	59,8	60,7	60,6
4	O. 118 (O. 2051) b . .	60,77	59,8	60,6	60,6
5	O. 1266 (O. 1353) a .	66,21	64,2	64,2	64,25
6	O. 1266 (O. 1353) b . .	65,71	64,8	64,6	65,1
7	O. 381 (O. 2074) a . .	41,10	38,8	39,2	38,5
8	O. 381 (O. 2074) b . .	—	38,8	38,3	38,0
9	O. 1209 (O. 1993) . .	27,9[1])	—	—	—
12	Quarz, amorph.	20,89	20,6	20,4	20,4
13	Quarz, amorph.	22,25	22,4	21,7	21,5
14	Quarz ∥	—	26,35	26,3	—
15	„ ∥	24,89	25,5	25,2	25,1
16	„ ∥	25,53	25,4	25,3	25,5
17	Ebonit	14,27	14,2	13,9	14,0
18	„	26,73	25,7	24,8	25,1
19	Gummi nat. I	—	28,1[2])	28,1[2])	25,6
20	„ „ II	—	24,1	24,5	24,6
21	Gummi synthet. I . .	—	24,5	24,5	24,6
22	„ „ II . .	—	25,2	25,0	25,6
23	AgCl	—	213,9	206,15	204,5
24	AgBr	—	263,15	265,0	278,6
25	AgCN	—	49,35	47,65	48,7
26	TlCl[3])	—	227,1	223,8	218,7
27	TlBr[3])	—	159,4	158,0	151,7
29	Hg_2Cl_2	54,4	55,0	54,1	54,2
30	NH_4Cl	—	39,5	39,6	40,0
31	NH_4Br	—	46,7	45,8	48,7
32	KBr	—	43,7	43,0	—
33	KJ[4])	—	55,1	51,2	—
34	Fluorit	—	42,3	41,75	42,15
35	Marmor	82,9	85,3	84,0	83,5
36	Gips	34,4	33,3	33,8	33,6
40	S. 461	—	35,4	35,4	—

1) Vgl. die Ausführungen p. 444.

2) Die Belegungen sind hier andere als bei $\nu = 10^7$.

3) Einfluß von Leitung.

4) Vgl. die Bemerkung über die Porösität der Platte.

Tabelle 21.

Endergebnisse.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			Belegungsmethode					Plattenverschiebungsmethode				Gesamtmittel b	
Wellenlänge in m Schwingungszahl ν			$1{,}2 \cdot 10^6$ 250	3000 10^5	300 10^6	30—40 10^7	Mittel	3000 10^5	10 $3 \cdot 10^7$	Mittel	Gesamtmittel a		Auf normale Dichte reduz.
Nr.	Material	Kap. rund in cm											
1	Glas violett . .	127	—	6,81	6,73	6,83	6,79	6,85	6,90	6,87	6,83	6,84	—
2	Glas weiß . . .	129	—	7,28	7,07	6,95	7,10	7,18	7,18	7,18	7,14	7,15	—
3, 4	O. 118 (O. 2051)	61	7,10	7,02	7,12	7,13	7,09	7,44	7,45	7,44	7,27	7,32	—
5, 6	O. 1266 (O. 1353)	64,5	7,65	7,48	7,46	7,50	7,50	7,91	7,80	7,85	7,67	7,73	—
7, 8	O. 381 (O. 2074)	38	7,10	6,71	6,70	6,65	6,73	6,95	6,81	6,85	6,79	6,81	—
9	O. 1209 (O. 1993)	28	8,33	—	—	—	8,33	8,33	8,41	8,37	8,35	8,34	—
12	Quarz amorph .	20	3,66	3,61	3,58	3,57	3,60	3,72	3,80	3,76	3,68	3,71	—
13	„ „ .	22	3,69	3,71	3,59	3,56	3,64	—	3,80	3,80	3,72	3,75	—
14	Quarz ‖	26	—	4,40	4,40	—	4,40	—	4,65	4,65	4,52	4,57	—
15	„	25	4,32	4,41	4,37	4,34	4,36	4,65	4,65	4,65	4,50	4,55	—
16	„	25	4,43	4,41	4,40	4,43	4,42	—	—	—	—	—	—
17	Ebonit	14	3,11	3,09	3,03	3,05	3,07	—	$2{,}94_R$	2,94	3,00	2,98	—
18	„	25	3,17	3,04	2,94	2,97	3,04	2,94	2,94	2,94	2,99	2,97	—
19	Gummi nat. I . .	30	—	2,85	2,85	2,63	2,77	2,75	2,74	2,74	2,76	2,75	—
20	„ „ II .	25	—	2,75	2,80	2,81	2,79	—	2,77	2,77	2,78	2,78	—
21	„ synthet. I	25	—	2,77	2,77	2,79	2,78	2,77	2,73	2,75	2,77	2,76	—
22	„ „ II	25	—	2,74	2,72	2,79	2,75	—	2,81	2,81	2,78	2,79	—
23	AgCl	206	—	11,90	11,50	11,42	11,60	11,12	$10{,}9_R$	11,0	11,30	11,20	—
24	AgBr	265	—	11,90	12,18	12,70	12,20	12,25	$12{,}1_R$	12,15	12,20	12,17	—

Tabelle 21 (Fortsetzung).

1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
			Belegungsmethode					Plattenverschiebungsmethode				Gesamtmittel b	
Wellenlänge in m			$1{,}2 \cdot 10^6$	3000	300	30—40		3000	10		Gesamtmittel a		Auf normale Dichte reduz.
Schwingungszahl ν			250	10^5	10^6	10^7	Mittel	10^5	$3 \cdot 10^7$	Mittel			
Nr.	Material	Kap. rund in cm											
25	AgCN	48	—	5,19	5,01	5,12	5,11	5,07	$5{,}02_R$	5,05	5,08	5,07	5,62
26	TlCl	224	—	29,7	29,35	28,60	29,20	ca. 28	—	—	29,20	29,20	46,9
27	TlBr	158	—	26,9	27,10	25,60	26,50	—	—	—	26,50	26,50	53,8
29	Hg_2Cl_2	54	9,42	9,41	9,37	9,38	9,37	9,14	$9{,}26_R$	9,20	9,28	9,26	9,36
30	NH_4Cl	40	—	6,85	6,86	6,81	6,83	6,74	$6{,}62_R$	6,68	6,75	6,73	6,96
31	NH_4Br	45	—	7,50	7,30	7,14	7,31	6,95	$6{,}98_R$	6,97	7,14	7,08	7,08
32	KBr	43	—	4,55	4,46	—	4,50	4,44	$4{,}53_R$	4,48	4,49	4,49	4,61
33	KJ	50	—	4,48	4,42	—	4,45	4,26	$4{,}21_R$	4,24	4,34	4,31	5,20
34	Fluorit	42	—	6,58	6,49	6,57	6,55	6,80	6,80	6,80	6,67	6,72	—
35	Marmor	84	8,29	8,53	8,40	8,35	8,39	8,31	8,30	8,31	8,35	8,34	—
36	Gips	34	5,21	5,03	5,14	5,08	5,11	5,15	5,05	5,10	5,11	5,10	—
37	Steinsalz	—	—	—	—	—	—	5,795	$5{,}82_R$	5,81	5,81	5,81	—
38	Glas schwarz II .	—	—	—	—	—	—	7,47	7,31	7,39	7,39	7,39	—
39	Glas weiß II . .	—	—	—	—	—	—	7,16	7,16	7,16	7,16	7,16	—
40	Silikatflint S. 461	—	—	16,36	16,36	—	16,36	17,46	17,7	17,58	16,45[1])	16,48	—
41	Phosphatkron S. 367	—	—	—	—	—	—	6,40	6,43	6,41	6,41	6,41	—
42	Fluorkorn O. 7185	—	—	—	—	—	—	5,84	5,89	5,87	5,87	5,87	—
43	Uviolglas	—	—	—	—	—	—	5,66	5,61	5,63	5,63	5,63	—

1) Bei der Mittelwertbildung wurde der bei Benzolfüllung beobachtete Wert 15,5 mit berücksichtigt.

methode erhaltenen Werte (vgl. Spalte 3, 4, 5, 6) in Spalte 7 zu einem Mittelwert vereinigt, ebenso die aus der Plattenverschiebungsmethode resultierenden Werte (Spalte 8, 9, 10). Aus den auf diese Weise gefundenen Mittelwerten ist ein Gesamtmittel (*a*) gebildet worden, das in Spalte 11 enthalten ist.

Die Vereinigung der nach beiden Methoden erhaltenen Dielektrizitätskonstanten ist insofern nicht unberechtigt, als keine erheblichen systematischen Unterschiede zwischen den Ergebnissen beider Methoden vorhanden sind. Im Durchschnitt ergeben sich die D.K. nach der Plattenverschiebungsmethode um ca. 1 Proz. größer als nach der Kondensatormethode; aber die Differenzen sind fast ebenso oft positiv wie negativ. Sie betragen durchschnittlich 3 Proz. Im allgemeinen sind, wie bereits oben bemerkt wurde, die nach der Plattenverschiebungsmethode gemessenen D.K. die genaueren. Sie sind von Hrn. Rubens ausschließlich zum Vergleich mit seinen optischen Messungen verwendet worden.

Die von Hrn. Rubens für die D.K. der Gläser angegebenen Werte sind mit denjenigen der Tab. 21 auf p. 453, Spalte 10, nicht vollkommen übereinstimmend, weil die von ihm ausgeführten Kontrollmessungen mit Benzolfüllung des Meßkondensators bei seinen Zahlen mit berücksichtigt worden sind. Die Abweichungen sind aber gegenüber den in Tab. 21 aufgeführten Werten nicht erheblich und bleiben meist unter 1 Proz.

Man wird jedoch auch den mit Hilfe der Kondensatormethode beobachteten Werten einen gewissen Einfluß auf das Endresultat einräumen dürfen. Ich habe deshalb in Spalte 12 der letzten Tab. 21 die nach beiden Methoden erhaltenen Werte zu einem zweiten Gesamtmittel (*b*) vereinigt, in welchem der Plattenverschiebungsmethode doppelt so großes Gewicht beigemessen ist als der Kondensatormethode. Diese Mittelwerte *b* unterscheiden sich von den Mittelwerten *a* nur wenig. *Sie gelten in dieser Arbeit als das Endresultat* und sind zum Vergleich mit den Ergebnissen anderer Beobachter herangezogen worden.

Nur die Werte für die aus Platten gepreßten Pulver, welche keine normale Dichte besitzen, mußten nach der Lorentzschen Formel korrigiert werden (vgl. p. 417). Die Daten für

s und s_1 sind der Arbeit des Hrn. Rubens entnommen. Die betreffenden korrigierten Werte sind in Tab. 21, Spalte 13, aufgeführt und in Tab. 22 mit Sternchen * versehen.

Wegen des Glases O. 1993 (O. 1209) sei auf die Ausführungen p. 444 hingewiesen, ebenso wegen O. 2074 (O. 381) auf p. 444. Zwischen natürlichem und synthetischem Gummi, die ihrer chemischen Zusammensetzung nach noch einen geringen Unterschied aufweisen, ist in der Dielektrizitätskonstante ein solcher nicht zu bemerken. Bei dem Silberchlorid hatte sich die Oberfläche der Platte verändert, vermutlich durch Ausscheidung von Silber; es ist daher nicht ausgeschlossen, daß das Resultat etwas gefälscht ist. Ferner kann bei den Kaliumsalzen das Eindringen von Öl in die porösen Platten von Einfluß gewesen sein.

Die D.K. für elektromagnetische Wellen von 300 μ Länge sind aus den optischen Messungen des Hrn. Rubens für die langwellige Strahlung der Quecksilberlampe mit Hilfe der Fresnelschen Gleichung berechnet:

$$D = \left(\frac{10 + \sqrt{R}}{10 - \sqrt{R}}\right)^2,$$

worin R das Reflexionsvermögen in Prozenten der auffallenden Strahlung bedeutet.

Eine Zusammenstellung dieser Werte von D_{300} mit den hier erhaltenen D_∞ ist in der folgenden Tab. 22 enthalten. Die Werte von D_∞ stimmen mit den von Hrn. Rubens nach der Verschiebungsmethode gemessenen befriedigend überein.

Nur für die beiden Thalliumsalze wurden hier erheblich höhere Werte für D_∞^* gefunden, was möglicherweise wiederum mit einem Eindringen des Öls in die Poren des gepreßten Pulvers zusammenhängt.

Die Werte von D_{300} bzw. D_∞ für Calomel und Gips beziehen sich auf verschiedene Kristallorientierung; daher ist der optische Wert nicht mit dem elektrischen vergleichbar.[1]) Die betreffende Dielektrizitätskonstante D_∞ ist aus diesem Grunde in Klammern gesetzt.

Das Gummi war schlecht politurfähig. Möglichenfalls ist deshalb das Reflexionsvermögen und auch die Dielektrizitätskonstante D_{300} zu klein ausgefallen.

---

1) Vgl. H. Rubens, Berl. Ber. 1913. p. 531 u. 1915. p. 18.

Tabelle 22.

Vergleichung der Ergebnisse für D_∞ mit den optischen Daten für 300 μ

Nr.	Material	Reflexionsvermög. R für 300 μ	Dielektrizitätskonstante D für 300 μ	Dielektrizitätskonstante D_∞
1	Glas violett	19,6	6,72	6,84
2	Glas weiß	19,9	6,82	7,15
3, 4	O. 118 (Q. 2051)	21,3	7,39	7,32
5, 6	O. 1266 (O. 1353)	22,4	7,82	7,73
7, 8	O. 381 (O. 2074)	19,6	6,72	6,81
9	O. 1209 (O. 1993)	23,4	8,28	8,34
38	Glas schwarz II	20,0	6,84	7,39
39	Glas weiß II	19,9	6,82	7,16
40	Schwerstes Silikatflint S. 461	35,5	15,65	16,48
41	Phosphatkron S. 367	18,1	6,17	6,41
42	Fluorkron O. 7185	16,3	5,55	5,87
43	Uviolkron U.V. 3199	15,8	5,40	5,63
12, 13	Quarz amorph	10,2	3,74	3,73
14, 15	Quarz ‖	13,6	4,71	4,56
17, 18	Gummi (Ebonit)	—	—	2,98
19, 20	Gummi nat.	5,53	2,60	2,76
21, 22	Gummi synthet.	5,34	2,57	2,78
23	AgCl	31,4	12,29	11,20
24	AgBr	35,6	15,70	12,17
25	AgCN	17,3	5,88	5,62*
26	TlCl	56,7	50,3	46,9*
27	TlBr	59,7	61,0	53,8*
29	Hg_2Cl_2	33,5	14,05	(9,36)*
30	NH_4Cl	19,8	6,78	6,96*
31	NH_4Br	21,1	7,28	7,08*
32	KBr	14,9	5,09	4,61*
33	KJ	15,8	5,39	5,20*
34	Fluorit	19,9	6,80	6,72
35	Marmor	24,5	8,77	8,34
36	Gips	22,1	7,69	(5,10)
37	Steinsalz	17,9	6,08	5,81

Größere Unterschiede zwischen den Werten von D_{300} und D_∞ sind mit diesen Ausnahmen nur in solchen Fällen vorhanden, in welchen der betreffende Körper sehr langwellige Reststrahlengebiete besitzt, wie z. B. bei Bromsilber und Thalliumbromür. Im übrigen ist bezüglich der Diskussion der Zahlen auf die Arbeiten des Hrn. Rubens zu verweisen.

Zunächst war es beabsichtigt, dieselben Gläser, die von den Herren Löwe und Starke gemessen waren, auch hier zu benutzen. Die Firma Schott hatte jedoch mit Ausnahme eines Glases nur Ersatzschmelzen zur Verfügung. In der Tabelle der Materialien (Nr. 1 p. 414, 415) bedeutet die erste

Nummer die neue Schmelznummer des Katalogs; die eingeklammerte Zahl entspricht den alten Substanzen. Der chemischen Zusammensetzung nach sind die Gläser möglichst identisch. Wenn nun aber die hier erhaltenen Werte von den früher gefundenen teilweise erheblich abweichen, so könnte dies vielleicht zum Teil doch auf die andere chemische Zusammensetzung zurückgeführt werden. Indessen muß darauf hingewiesen werden, daß die auf p. 444 nachgewiesene Fehlerquelle, welche durch die Wasserhaut des Glases verursacht wird, unter Umständen eine erhebliche Rolle spielen kann. Jedenfalls würde eine solche Fehlerquelle in dem Sinne der hier beobachteten Differenz wirken. Die Platten aus amorphem Quarz (12 und 13) ergaben in dem untersuchten Intervall den Mittelwert 3,73. Thomson fand nach der Methode von Matteucci 3,78, F. A. Schulze nach der Schmidtschen Methode 3,2. Letzterer Wert ist wohl zu klein. Der Quarz 14 (ebenso 15 und 16) ist $\perp$ Achse geschnitten (die Stücke 15 und 16 nicht genau), so daß die Werte für die D.K. $\parallel$ Achse gelten. Der Mittelwert beträgt 4,57 in guter Übereinstimmung mit H. W. Schmidt (4,60). Für verschiedene Gummisorten wurden Werte zwischen 2,98 und 2,75 gefunden. Von Pellat-Sacerdote ist gemessen 2,97, von Winkelmann 2,72. Der für Steinsalz gefundene Wert 5,82 stimmt gut mit den Werten der Herren Rubens (5,82) und Curie (5,85), während Schmidt 5,50—5,60, Starke 6,29 und Pirani 6,12 angeben. Flußspat ergab den Wert 6,72, in ausreichender Übereinstimmung mit anderen Beobachtern (Rubens 6,82, Schmidt 6,70, Romisch und Nowak 6,72, Curie 6,80).

H. Schluß und Zusammenfassung.

Zunächst wurde die Kirchhoffsche Formel auf ihre Richtigkeit in verschiedener Weise experimentell geprüft und gezeigt, daß unter Berücksichtigung der Erdkapazität die Formel richtige Werte für die Kondensatoren liefert. Es ergab sich ferner, daß die hier verwendete Methode für die Messung von Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe von Plattenkondensatoren bei sorgfältiger Messung und Berechnung angenähert richtige Resultate liefert und Werte ergibt, die auch mit den nach der Plattenverschiebungsmethode erhaltenen Zahlen ausreichend übereinstimmen.

Überblickt man das gesamte hier vorliegende Material, so kann man sagen, daß unter Berücksichtigung der Größe der Beobachtungsfehler (vgl. Tab. 21) kein Grund zur Annahme elektrischer Dispersion der untersuchten festen Körper in dem hier verwendeten Spektralbereich vorliegt.

Die vorstehenden Untersuchungen sollten ursprünglich auch auf das Bereich der kurzen Hertzschen Wellen ausgedehnt werden. Dies mußte jedoch aus Mangel an Zeit unterbleiben, da meine Einberufung zum Heeresdienste den sofortigen Abschluß der Arbeit notwendig machte. Aus dem gleichen Grunde mußte von der Ausführung mancher wünschenswerten Ergänzungs- und Kontrollmessungen Abstand genommen werden.[1])

Daß in der Lücke, die zwischen den von Herrn Rubens[2]) verwendeten längsten Lichtwellen (300 μ) und den hier benutzten elektrischen Wellen (10 m) noch eine Dispersion vorhanden ist, wird nicht anzunehmen sein, zum mindesten ist eine solche zur Befriedigung der Maxwellschen Relation nicht notwendig.

Bedenkt man nun, daß die Debyesche Theorie der molikularen Dipole nur auf Flüssigkeiten anwendbar ist, feste Körper also tatsächlich keine Dispersion zeigen dürften, daß ferner unter festen Körpern in gleicher Weise die Kristalle wie die amorphen Körper zu verstehen sind, da für beide die innere Reibung im Verhältnis zu derjenigen bei Flüssigkeiten unendlich groß ist, so kann man sagen, daß das Ergebnis der Arbeit eine Stütze für die Debyesche Theorie bildet. Denn einen Repräsentanten der Klasse amorpher Körper bildet in erster Linie Glas, von dem eine größere Anzahl möglichst verschiedener Sorten hier untersucht wurde, ohne daß sich eine Dispersion feststellen ließ. Auf das Verhalten hygroskopischer Gläser und die dabei zu befolgenden Vorsichtsmaßregeln sei hier nochmals hingewiesen.

---

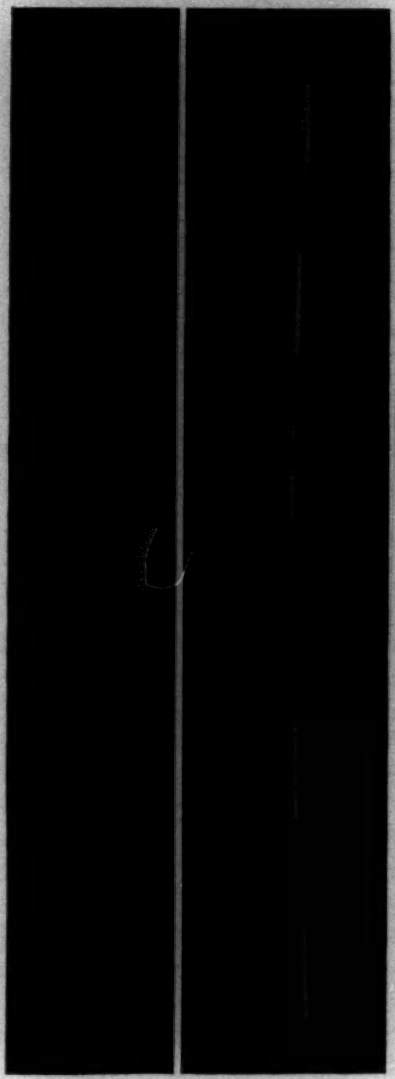
1) Unterdessen sind von Herrn Rubens Messungen mit Hertzschen Wellen von $\lambda = ia$ 5,7 cm an 5 Krystallen und 5 Gläsern der hier untersuchten Materialien ausgeführt worden. (Vgl. Ber. d. Berl. Akad. 1917, p. 556.) Sie ergaben ausreichende Übereinstimmung mit den Zahlen dieser Arbeit, sodaß damit auch innerhalb dieser Lücke den hier untersuchten Substanzen keine Dispersion zukommt.

2) H. Rubens, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1917. p. 556.

Zum Schluß ist noch zu betonen, daß die Resultate der Arbeit zunächst nur soweit Geltung haben, als sie sich auf das bis jetzt untersuchte Material beziehen. Besonders ein Punkt bedarf noch der Erwähnung, der möglicherweise zu anderer Auffassung Anlaß geben könnte, als sie sich aus den vorliegenden Messungen ergibt. Das ist die dielektrische Nachwirkung, wie sie von Pellat, Maxwell, und neuerdings von K. W. Wagner[1]) und Ulfilas Meyer[2]) behandelt wurde. Sie kann zu Änderungen der Dielektrizitätskonstante bei ganz langen Wellen Ursache geben. Sollte eine solche gefunden werden, so wäre es aber erst Sache einer präziseren Begriffsbestimmung, zu entscheiden, ob diese Erscheinung als Dispersion im gewöhnlichen Sinne anzusehen ist.

1) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrotechnik. 2. p. 371. 1914.
2) Ulfilas Meyer, Verh. d. D. phys. Ges. 19. p. 139. 1917.

(Eingegangen 26. Oktober 1917.)



a Nr. 1. b

Nr. 2.

Der Schaft der Antikathode ist auf der phot. Platte mit einem Stück Al-Blech von 1 mm Dicke teilweise abgedeckt worden.

H. Seemann.

2. *Zur Optik der Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallstrukturflächen. II;*

von H. Seemann.

(Hierzu Tafel IV.)

Bei der Laue-Friedrichschen Anordnung wird ein linienförmig einfallendes inhomogenes Röntgenstrahlenbündel an den Strukturflächen eines Kristallvolumenelements in verschiedenen Richtungen reflektiert. Aus der Lage der Durchstoßungspunkte der reflektierten, gleichfalls linienförmigen Bündel auf der Projektionsfläche (phot. Platte) können die Neigungen der Strukturflächen gegen das einfallende Bündel in einfacher Weise abgelesen werden (gnomonische Reflexprojektion). Strahlenbündel, Kristall und Platte sind hierbei fest gegeneinander angeordnet. Über den Abstand der parallelen Gitterebenen, die Gitterkonstante, jeder Struktur fläche sagt das Diagramm direkt nichts aus, da jeder Fleck nur *eine* am Diagramm nicht erkennbare Wellenlänge aus dem Spektrum darstellt (oder deren ganzzahligen Bruchteil gleichzeitig). Erst aus dem durch das gesamte Diagramm gewonnenen Bilde des Kristallbaues, dem Strukturmodell, kann dann das Verhältnis der Gitterkonstanten der einzelnen Strukturflächen entnommen werden.

Noch weniger gibt das Punktdiagramm als solches direkten Aufschluß über das Verhältnis der Gitterkonstanten zweier verschiedenen Kristalle. Vielmehr geben gleichgebaute Kristalle auch gleichgemusterte Diagramme, unabhängig von der Verhältniszahl ihrer analogen Gitterkonstanten. Auch die verschiedene Helligkeit der Flecke jedes Diagramms, die durch die verschiedene beugende Kraft der vorkommenden Atomgattungen bedingt ist, gibt keine direkten Anhaltspunkte.

Erst das Verfahren Braggs, die zu untersuchenden charakteristischen Strukturflächen gegen den einfallenden linienförmigen Strahl zu drehen und dadurch Spektren zu erhalten, ermöglicht es, aus deren Größenverhältnis das Gitterkonstantenverhältnis der Flächen direkt zu berechnen.

Dieses Verfahren, wie die Braggs es benutzt haben, ist jedoch experimentell langwierig, da sie jede zu untersuchende Strukturfläche, auch bei demselben Kristall, einzeln für sich reflektieren ließen, indem sie den Kristall jedesmal derart geneigt aufstellten, daß der reflektierte Strahl bei der Drehaufnahme immer in derselben durch das Spektrometer gegebenen Ebene blieb. Es gehört also eine goniometrisch komplizierte Einstellung dazu. Außerdem müssen alle Strukturflächen, die die natürlichen Spaltflächen nicht parallel einer Spaltkante schneiden, z. B. die Oktaederflächen von Steinsalz, am Kristall angeschliffen werden, falls die großen experimentellen Vorzüge der Oberflächenreflexion, vor allem deren große Helligkeit, ausgenutzt werden sollen.

Die eingehende röntgenoskopische Untersuchung von Kristallen besteht daher aus mindestens einem Lauediagramm und einigen Braggschen Spektralaufnahmen mit goniometrischer Ablesung, ist also recht umständlich.

Es besteht jedoch die Möglichkeit der Kombination aller dieser Diagramme, nämlich die Aufnahme *sämtlicher* von *einer* Spaltfläche — gerade und schief — reflektierten Spektren auf einmal. Zu diesem Zwecke wird ein in der Einfallsebene zu einer Spaltfläche verlaufender ebener Strahlenfächer, der auch durch Drehung des Kristalls gegen ein linienförmiges Bündel entstanden gedacht werden kann, wie zuerst wohl auf den von de Broglie[1]) publizierten Aufnahmen zu sehen war, nicht nur von den der Spaltfläche parallelen Strukturflächen, sondern auch von den dichtest besetzten Flächen derjenigen Zone kräftig reflektiert, deren Achse parallel der Spaltfläche und der Einfallsebene des Strahlenbündels verläuft oder doch wenig gegen diese Richtung geneigt ist. Alle diese zur Oberfläche geneigten Flächen entwerfen gemäß ihrer Besetzung mehr oder weniger starke „Nebenspektren" zu beiden Seiten des „Hauptspektrums", deren Richtung über die Neigung ihrer Spiegelflächen und deren spektrale Länge über die Flächenkonstante Aufschluß gibt.

Der Endzweck der vorliegenden Arbeit soll die geometrische Deutung solcher Vielfachspektren sein, die als kombinierte Laue-Bragg-Diagramme zur Kristalluntersuchung empfohlen,

1) De Broglie, Compt. rend. 158. p. 179. Fig. 1. 1914.

nicht zuletzt aber auch wegen ihrer Schönheit wiedergegeben und behandelt werden sollen. Bei der Ableitung muß fast die gesamte geometrische Optik der selektiven Spiegelung entwickelt werden, die sich ohne Zwang völlig elementar durchführen läßt. Es dient zum besseren Verständnis, daß dazwischen auch Fehlerquellen und experimentelle Einzelheiten genauer erörtert werden.

Allgemeines.

Die Reflexion der Röntgenstrahlen an *einer* Strukturfläche eines Kristalls erfolgt etwa analog der Reflexion optischen Lichtes an einem Satz aufeinandergeschichteter planparalleler Platten mit dem Brechungsindex 1 nach dem bekannten Gesetz:

$$n\lambda = 2d\sin\alpha . \tag{1}$$

Während bei einer planparallelen Platte die Interferenzrichtung, d. i. die Neigung *der* einfallenden Strahlen, bei denen ein Reflexionsmaximum durch Interferenz auftritt, nur unscharf ausgebildet ist, werden durch die Addition der Strahlen sehr vieler aufeinandergeschichteter Platten die Maxima so sehr in die Höhe getrieben und dadurch so spitz, daß ganz scharfe Spektrallinien entstehen. Diese Addition ist eine völlig andere als diejenige, wie sie z. B. bei Lummerschen Platten durch Linsen erreicht wird. Dort findet die Interferenzreflexion gleicher Neigung für eine Wellenlänge auf der ganzen Glasfläche statt und die Ausnutzung des einfallenden Lichtes wird dadurch noch wesentlich gesteigert, daß vielfache Reflexion der eingetretenen Strahlen stattfindet. Die Linse des Beobachtungsfernrohres addiert diese von nebeneinanderliegenden Orten der ganzen Platte stammenden parallelen Bündel, indem sie sie in der objektiven Bildebene zu Kurven sammelt, die sich um so schärfer von ihrer Umgebung abhebt, je mehr Strahlen gleicher Neigung gesammelt wurden, d. h. je größer die Platte ist. Bei der Röntgenstrahlen-Interferenzreflexion kann diese Art der Addition nicht eintreten, da an *einer* Platte, die durch zwei benachbarte Atomgitterebenen begrenzt zu denken ist, nur eine einmalige Reflexion eines sehr kleinen Bruchteiles der einfallenden Energie stattfinden kann und da keine Linsen für sie existieren, die das von einer größeren Platte ausgehende parallele Bündel von Strahlen gleicher

Neigung sammelt. Statt dessen tritt aber eine andere sehr wirkungsvolle Addition durch die Mitwirkung einer sehr großen Zahl solcher *aufeinander* liegenden Platten auf, bei der die Strahlen gleicher Neigung sich von selbst ohne künstliche Richtungsänderung ihrer Bahn derart häufen, daß weit schärfere Linien zustande kommen, als bei den optischen einfachen Platten oder dem Michelsonschen Stufengitter, das im Prinzip der Häufung den Verhältnissen im Kristall noch näher kommt als jenes.

Dieser Umstand bedingt wesentlich primitivere Erzeugungsverfahren der Röntgenspektren als die optischen Methoden mit Linsen. An Stelle von breiten parallelen Strahlenbündeln aller Neigungen tritt hier nur je ein Strahl. Im übrigen sind die Bedingungen für den Strahlengang dieselben. *Die Strahlen müssen aus dem diffus einfallenden Licht derart ausgesondert werden, daß innerhalb des erwünschten Neigungsintervalls nur je ein Strahl jeder möglichen Richtung auf die Projektionsfläche gelangen kann. Ferner muß die Richtungsänderung im Querschnitt des Bündels stetig sein.* Nur ein homozentrisches Bündel, wie es durch ein feines Loch als Blende praktisch genügend genau hergestellt werden kann, oder ein astigmatisches Bündel, das durch zwei gekreuzte Spalte ausgeschnürt wird, erfüllt diese Anforderung. Bei kleinen Glanzwinkeln ist auch die Ausblendung des Bündels durch einen kurzen Spalt parallel der Spaltfläche zulässig, sofern nur das Hauptspektrum dieser Fläche entworfen werden soll. Dabei können außerordentlich viel engere Lochblenden und Spalte benutzt werden, als bei sichtbarem Licht, da die Beugung der Röntgenstrahlen an deren Rändern praktisch nicht in Frage kommt. Die Grenze der erreichbaren Linienschärfe ist durch die erreichbare Güte der Kristallstruktur, vielleicht aber auch nur durch die Wärmebewegung der Kristallatome gegeben. Spaltbreiten unter 0,005 mm dürften dieser Grenze entsprechen.

Ob die Ausblendung aus den diffusen Strahlen vor, bei oder nach Passieren der Kristallfläche stattfindet, ist gleichgültig, solange es sich um Spiegelung an ebenen, sehr dünnen Oberflächenschichten handelt. Diese bedeutet geometrisch nur eine Knickung des gesamten Strahlenganges ohne Änderung der gegenseitigen Neigung der Strahlen. Mit anderen Worten: *Die Reihenfolge der geometrischen Aussonderung der Strahlen-*

richtung einerseits und der spektralen Aussonderung der Wellenlänge bei gleichzeitiger regulärer Spiegelung andererseits ist vertauschbar, ebenso wie die Reihenfolge von einmaliger geradliniger Polarisation und Brechung in einem optischen Instrument.

Eine weitere notwendige Bedingung zur Erzielung scharfer Spiegelbilder bzw. Spektren ist, daß die spiegelnde Kristallschicht sehr dünn ist, sei es, daß die Schwere des Kristalls und die Weichheit der Strahlen von selbst dafür sorgt, daß nur eine dünne Oberflächenschicht an der Reflexion beteiligt ist, sei es, daß künstlich durch Dünnschliffe oder Blenden die Mitwirkung tieferer Schichten verhindert wird (vgl. auch die Lochkameramethode). Nur wenn das Strahlenbündel *nach* Passieren des reflektierenden Kristalls durch Loch- oder Spaltblenden ausgeschnürt wird, ist die Schärfe der Linien nicht von der Dicke der wirksamen Schicht abhängig, sondern nur von der Loch- oder Spaltweite.[1]) Für die Nebenspektren gilt das gleiche, d. h. wenn Spalte oder Loch (astigmatische oder homozentrische Bündel) *hinter* dem Kristall liegt, darf die Schicht, aus der die wabenförmig sich durchdringenden, beliebig geneigten Strukturflächen noch reflektiertes Licht nach außen gelangen lassen, beliebig dick sein, andernfalls nicht, d. h. die schräg zur Oberfläche geschichteten Netzebenen dürfen nur mit ihren in der Oberfläche liegenden Kanten reflektieren (ähnlich einem Stufengitter). Die Länge und Breite der reflektierenden Schicht kann beliebig sein. Auch regelmäßig gekrümmte, z. B. zylinder-, kegel- oder kugelförmige Kristallflächen geben genau berechenbare Linienspektren. Die Achsen (Mittellinien) der Spektren sind aber im allgemeinen nicht mehr geradlinig. Im Vorliegenden sollen nur ebene reflektierende Schichten regulär geformter Kristalle behandelt werden.

I. Die Form der Linien im einfachen geraden Spektrum von einer Strukturfläche.

Während bei optischen Spektrographen mit Linsenoptik die Spektrallinien die photographischen Abbildungen des Spaltes darstellen und somit in ihrer Längsrichtung begrenzt

1) H. Seemann, Physik. Zeitschr. 18. p. 242—249. 1917.

sind, falls nur die Beleuchtung des Spaltes mit diffusem oder bereits gerichtetem Licht genügend weitwinkelig ist, sind die Röntgenlinien Kegelschnittbogen, d. h. sie werden projiziert von Strahlenbüscheln, die sich bei homozentrischen Bündeln auf Kreiskegelmänteln längs den Erzeugenden und bei astigmatischen auf einer Regelfläche, die weiter unten genau behandelt werden wird, gleichfalls längs deren Erzeugenden ausbreiten. Auch diese Regelfläche schneidet die Projektionsebene in der Mehrzahl der praktischen Fälle in Hyperbeln.

A. Homozentrisches Bündel.

1. Zentrum in der Kristalloberfläche.

a) Punktförmiges Zentrum.

In Fig. 1 sind die geometrischen Orte der Interferenzmaxima zweier Wellenlängen (oder zweier Ordnungen ein und derselben Wellenlänge) bei der Reflexion an dem Volumenelement S der Oberflächenschicht F des Kristalls K dargestellt. Es sind die beiden koaxialen Kegel, deren Achse senkrecht zur spiegelnden Spaltfläche F steht. Stellt man die Strahlenquelle B, die als ebene rechteckige Fläche senkrecht F gezeichnet ist, so auf, daß sie von beiden Kegeln in den Hyperbelbogen H_1 und H_2 geschnitten wird, wobei H_2 stärker gekrümmt ist als H_1, so wird auf einer Platte P, die die beiden Kegel auf der gegenüberliegenden Seite in den Hyperbelbogen GC bzw. DE schneiden möge, eine spiegelbildliche Zentralprojektion MR und LN von H_1 und H_2 entworfen. Diese projizierten Hyperbelbogen sind von monochromatischen Strahlen erzeugt, auch wenn die Strahlenquelle B polychromatisch ist. In jedem Kegelmantel kann sich nur eine Wellenlänge oder deren ganzzahliger Bruchteil ausbreiten. Jeder monochromatische Strahl kann in S nur reflektiert werden, wenn er eine Erzeugende eines auf F senkrecht stehenden Kegels bildet, dessen halber Öffnungswinkel das Komplement zu einem Glanzwinkel seiner Wellenlänge (auf K bezogen) ist, oder derjenigen koaxialen Kegel, deren Kosinus des halben Öffnungswinkels ein ganzes Vielfaches dieses charakteristischen Kegels sind.

Enthält die Strahlung von B ein kontinuierliches Spektrum, dessen charakteristische Reflexionskegel von den in Fig. 1 gezeichneten Kegeln begrenzt sein mögen, so entsteht auf der

Platte P ein Spektralband von der Form der Fläche $MRNL$, das zusammengesetzt ist aus unendlich vielen koaxialen Hyperbelbogen. Die Strahlung eines jeden Bogens enthält eine Wellenlänge oder deren ganzzahligen Bruchteil und entstammt dem spiegelbildlich perspektiv gelegenen Hyperbelbogen von B. Ist der von B ausgesandte Wellenlängenbereich noch größer,

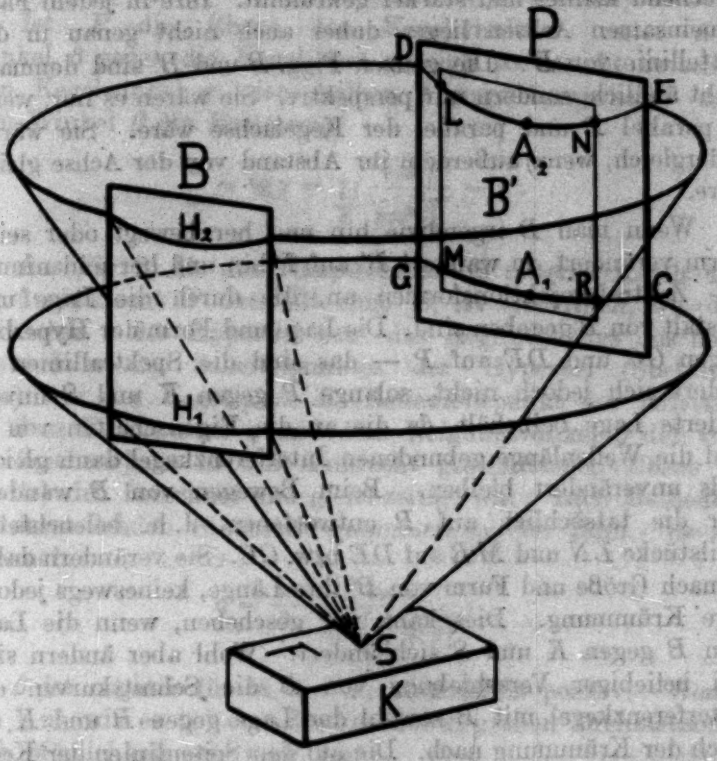


Fig. 1.

so daß die charakteristischen Reflexionskegel (Interferenzkegel) über die obere und untere Kante von B hinausreichen, so wird B als ganzes auf P perspektiv abgebildet, wie es in der Fig. 1 dargestellt ist. So kommt es, daß z. B. der Brennfleck der Röntgenröhren sich im Bandengebiet des Spektrums photographisch getreu wie mittels einer Lochkamera abbildet, falls S punktförmig ist, oder, wie unten gezeigt werden wird, wenn überhaupt ein homozentrisches Bündel benutzt wird.

B und P sind in der Fig. 1 der besseren perspektiven Erkennbarkeit halber parallel der Kegelachse gezeichnet worden. P ist ihr jedoch näher und nicht parallel B gelegt worden, um einen etwas allgemeineren Fall darzustellen. Die Zentralprojektion B' von B auf P ist daher etwas schiefwinklig und kleiner als B. Ihre Hyperbelbogen MR und LN sind entsprechend kleiner und stärker gekrümmt. Ihre in jedem Falle gemeinsamen Achsen liegen daher auch nicht genau in der Mittellinie von B'. Die ganzen Figg. B und B' sind demnach nicht ähnlich, sondern nur perspektiv. Sie wären es nur, wenn B parallel P und parallel der Kegelachse wäre. Sie wären widergleich, wenn außerdem ihr Abstand von der Achse gleich wäre.

Wenn man B irgendwie hin und her bewegt oder seine Form verändert, so wandert B' auf P hin und her und nimmt alle Zentralprojektionsformen an, die durch die Lage und Gestalt von B gegeben sind. Die Lage und Form der Hyperbelbogen GC und DE auf P — das sind die Spektrallinien — ändert sich jedoch nicht, solange P gegen K und S unveränderte Lage beibehält, da die an die Eigenschaften von K und die Wellenlänge gebundenen Interferenzkegel dann gleichfalls unverändert bleiben. Beim Bewegen von B wandern nur die tatsächlich auf P entworfenen, d. h. beleuchteten Teilstücke LN und MR auf DE bzw. GC. Sie verändern dabei je nach Größe und Form von B' ihre Länge, keineswegs jedoch ihre Krümmung. Dies kann nur geschehen, wenn die Lage von B gegen K und S sich ändert. Wohl aber ändern sich bei beliebiger Verschiebung von B die Schnittkurven der Interferenzkegel mit B sowohl der Lage gegen B und K als auch der Krümmung nach. Die auf den Seitenlinien der Kegel als geometrischen Orten nach DE und GC gelangenden Strahlen entstammen also beim Bewegen von B jedesmal anderen Punkten von B. Eine Verschiebung des Spektrums oder irgendeine Veränderung der einzelnen Linien tritt dabei nicht auf.

Die Scheitel A_1 und A_2 der Hyperbeln sind allgemein diejenigen Punkte der Hyperbeln, die der Ebene F oder der Kegelachse am nächsten liegen. Sie halbieren, wie P auch immer liegen möge, alle Schnittkurvenstücke mit P, deren Enden von S gleich weit entfernt sind, wie das bei den Punkten D und

E bzw. G und C in Fig. 1 der Fall ist. Die Hyperbelachsen fallen immer zusammen und liegen in demjenigen Hauptschnitt des Kegels S, der auf P senkrecht steht. Im speziellen Falle der Fig. 1, in dem P der Kegelachse parallel liegt, sind die Halbachsen a der Hyperbel direkt die Abstände von A_1 bzw. A_2 von der Ebene F, die Halbachsen b ihr Abstand von der Kegelachse. Der Asymptotenwinkel ist gleich dem Kegelwinkel.

Ist P die Ebene des Kegelschnittes, unter dem Winkel β gegen die Kegelachse geneigt, so besteht zwischen dem Kegelwinkel φ, dem halben Asymptotenwinkel γ und dem Winkel β die Beziehung:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} - 1}\,. \tag{2}$$

Aus Fig. 2, die den Hauptschnitt des unteren Kegels der Fig. 1 senkrecht P darstellt ohne B, ist ersichtlich, wie die Halbachse a der Hyperbel bzw. des Kegelschnittes aus dem Abstand m des Scheitelpunktes der Hyperbel (Spektrallinie) von der Kegelspitze S (Reflexionspunkt des Kristalls K), dem Kegelwinkel φ und dem Neigungswinkel β der von der Zeichenebene in OB senkrecht geschnittenen Ebene P (Platte) sich berechnet und gleichzeitig, wie γ nach Methoden der darstellenden Geometrie gewonnen werden kann. Es ist allgemein:

$$a = \frac{m}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} \mp \beta\right)}\,. \tag{3}$$

β ist negativ für $m < A'S$, andernfalls positiv. Wenn $OB \perp m$, wie es bei der Bragg-Herwegschen Drehmethode nach Möglichkeit sein muß, ist:

$$a_1 = \frac{m}{2}\operatorname{tg} 2\beta = \frac{m}{2}\operatorname{tg} 2\,\alpha\,. \tag{3a}$$

$\beta = \alpha$ ist dann, wie in (1), der Interferenzwinkel (Glanzwinkel).

Für denselben Fall wird aus Gleichung (2):

$$\frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}\,. \tag{2a}$$

Die Hyperbel ist durch (2) und (3), ferner (2a) und (3a) gegeben. Ihre Scheitelgleichung nach x aufgelöst lautet:

$$(4) \qquad x = a\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1} - 1\right).$$

Für den praktischen Gebrauch wird man oft mit dem Krümmungskreis im Scheitel arbeiten können. Der Krümmungsradius ist:

$$(5) \qquad \varrho = p = \frac{b^2}{a} = \frac{m}{2} \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} \mp \beta\right)} \sqrt{\frac{\cos^3\beta}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}} - 1,$$

$$(5a) \qquad \varrho_1 = \frac{b_1^2}{a_1} = \frac{m}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (\operatorname{ctg}^2\alpha - 1) = m \operatorname{ctg}\alpha.$$

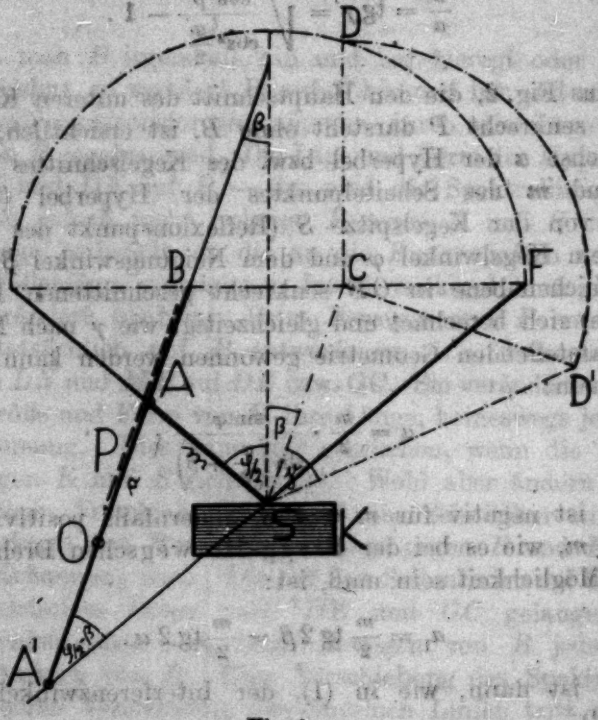


Fig. 2.

Eine experimentelle Prüfung der Linie $L a_1$ in erster und zweiter Ordnung ergab für den Fall, daß die photographische Platte annähernd senkrecht zum reflektierten Strahlenkegelsegment stand ($m \perp OB$, Fig. 2).

Tabelle 1.

Bogenwinkel δ des Kegelgrundkreises	$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$	Hyperbelscheitelkoordinaten y	x gemessen	x berechnet	Krümmungsradius im Scheitel
I. Ordnung 14,5°	13° 8′	11,7 mm	0,16 mm	0,17 mm	231 mm
II. „ 17,0°	28°	12,4 „	0,44 „	0,42 „	177 „

Die Sehnenlänge MR bzw. LN (Fig. 1) der Bögen betrug also 23,4 mm und 24,8 mm. P lag hierbei aber senkrecht zur Ebene SA_1A_2 derart, daß etwa $SA_1 = SA_2 = 95$ mm, also anders als in der Fig. 1. Die zugehörigen Zentriwinkel der Kegelgrundkreise betrugen demnach etwa 14,5° bzw. 17°.

Da die Aufnahmen mittels einer gewöhnlichen Röntgenröhre gemacht wurden, deren Brennfleck nur einen kleinen Bruchteil dieser Bogenbereiche gleichzeitig zu entwerfen gestattet, so wurde die Röhre während der beiden Aufnahmen längs der Kegelmäntel in Richtung der Bögen schrittweise verschoben bzw. der Aufnahmeapparat geradlinig auf seinem Stativ gehoben. Die Nr. 1 der Taf. IV zeigt die Originalaufnahmen, auf denen auch die Linie La_2 noch mit sichtbar ist. Die Sehne ist auf dem Papierpositiv eingezeichnet worden.

Wenn die Platte so gestellt wird, daß der Kegelschnitt mit ihr eine Ellipse oder Parabel ist, ist die Berechnung analog. Für die Ellipse gilt Gleichung (8) oder (8a). Dagegen ist:

$$b = a\sqrt{\frac{\cos\varphi - \cos 2\beta}{\cos\varphi + 1}} \tag{6}$$

und bei der für (2a) und (3a) gültigen Voraussetzung, daß $a \perp m$, also $\beta = \pi/2 - \varphi/2 = \alpha$:

$$b_1 = a_1\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\beta}\,. \tag{6a}$$

Für den höchstens zufällig vorkommenden Fall der Parabel gilt:

$$p = m(1 - \cos\varphi)\,. \tag{7}$$

Auch ein elliptischer Schnitt der Reflexionskegel wird bei der gewöhnlichen spektralanalytischen Anordnung kaum vorkommen.

Der Wert von m ist aus den Apparatedimensionen und dem Abstand des Scheitels der zu messenden Linie vom spektralen

Nullpunkt bzw. der Nullgeraden zu berechnen. Wenn P gegen m und die Kristallebene schiefwinklig steht wie in Fig. 2, muß der Abstand der Nullinie, d. i. die Schnittlinie mit der Kristallebene, von S genau bekannt sein und auch die Neigung von P gegen die Kristallebene. Dieser Fall wird bei der fokussierenden Drehmethode immer gewählt werden, da die Platte den Fokuskreis Sm dort berühren oder auf ein kurzes Stück als Sekante schneiden muß, wohin etwa die mittlere Linie des zu messenden Spektralgebietes fällt. Da es sich bei der Reflexion an Kristalloberflächen meistens nur um kleine α, also um stumpfe Kegel handelt, ist die genaue Kenntnis der Neigung der Platte nicht erforderlich, da die Kegelschnittbogen dann nur schwach gekrümmt sind. Auch ist in den Spektrographen der Bogenwinkel δ (vgl. Tab. 1) immer nur klein, schon weil der Brennfleck der Röhre, d. i. B in Fig. 1, nur klein ist und in der Richtung längs der Peripherie der Kegelgrundkreise nicht bewegt wird. Wie aus Obigem hervorgeht, ist es jedoch wichtig, daß das Lot vom Kristallreflexionspunkt S auf die Platte in die Mittellinie des Spektrums trifft, damit die Hauptachse der Hyperbeln in ihr verläuft. Nur für sie gilt Gleichung (1). Wie der Kristall dabei orientiert ist, ist gleichgültig.

Aus demselben Grunde der geringen Krümmung und Länge der Spektrallinienbogen im praktischen Falle kann man die obigen Formeln (2a) und (3a) oder (6a) auch dann für kurze Bogenstücke anwenden, wenn ein zylindrisch gebogener Film statt einer ebenen Platte benutzt wird, dessen durch S gehende Achse senkrecht zur Kegelachse steht, d. i. senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 2, wie es vom Verf. früher[1]) angegeben wurde. Erst wenn große Teile von Kegelmänteln auf solche Zylinder projiziert werden, wie es z. B. Debye und Scherrer[2]) getan haben, müssen sie als Abwickelungen von Durchdringungen von Kegeln mit Zylindern behandelt werden.

Die praktische Ausführung der oben beschriebenen Aufnahme ist nach dem l. c.[1]) in den Figg. 4, 5 u. 6 gekennzeichneten Verfahren leicht für alle vorkommenden Winkel möglich, wenn man außer der anzusetzenden Schneide seitlich noch prismatische Klötze anbringt, die die einfallenden Strahlen

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. 49. p. 470. 1916.
2) Gött. Nachr. 1916. Heft 1. Physik. Zeitschr.

nur an einen Punkt der Schneide gelangen lassen.[1]) Fig. 8 stellt eine solche Schneidenblende dar. Der Bleischirm B mit der Schneide S ist derselbe, wie er im Grundriß in der Fig. 6 der zitierten Arbeit[2]) gekennzeichnet ist. Die Schneide ist vorteilhaft nicht aus Blei, sondern aus einem härteren, gleichfalls schweren Material herzustellen, etwa Platin oder Gold-Silberlegierungen oder auch Woodschem Metall. Am besten aber aus dem sehr harten und fein schleifbarem Wolfram, das sich freilich nur nach Vernickelung anlöten läßt. Die beiden prismatischen Metallklötze (schraffiert), die die von rechts in den Pfeilrichtungen kommenden Strahlen nur an ein kleines Stückchen von S gelangen lassen, liegen in einer Ebene mit S (in der Zeichenebene) und dienen gleichzeitig als Anlageflächen für den Kristall. Sie sind vorteilhaft nach oben und unten verschiebbar einzurichten, um die Länge des von S freizulassenden Stückes verändern zu können.

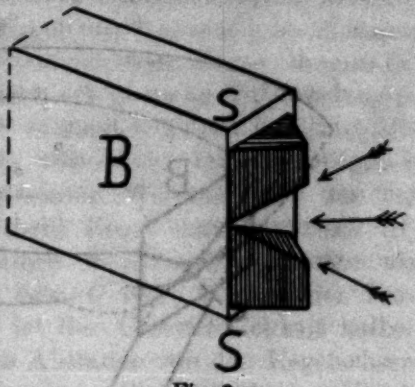


Fig. 8.

Eine andere Lösung ist natürlich die der Fig. 2 der zitierten Arbeit entsprechende.[2]) Statt zweier Schneiden wird ein Bleiblech mit flach konisch gebohrtem Loch auf der Kristallfläche befestigt. Für kleine a und scharfe Linien ist diese Anordnung nicht geeignet.

b) Linienförmiges Zentrum.

Es erscheint zunächst klar, daß bei Benutzung einer flächenförmigen Strahlenquelle, deren einfallende Strahlen in Richtung der Pfeile der Fig. 8 konvergieren, um so hellere Spektrallinien entstehen, je länger der von der Schneide und den Prismen freigelassene Kristalloberflächenstreifen ist, da die aus verschiedenen Einfallsrichtungen stammenden Strahlen sich nach der Reflexion im mittleren Teil der ganzen Linien-

1) Vgl. auch H. Seemann, Physik. Zeitschr. 18. p. 242. 1917. Fig. 3.

2) H. Seemann, Ann. d. Phys. 49. p. 470. 1916.

länge überlagern, d. h. eine Kern- und Halbschattenwirkung hervorrufen, die das spitze Auslaufen der photographisch gewonnenen Linien verursacht. Diese Überlagerung ist jedoch geometrisch recht kompliziert, da es sich um Hyperbelbogen handelt. Dadurch kommt es, daß durch Verlängerung von Schneiden bzw. Spalt eine unsymmetrische Verbreiterung der Linien nach der langwelligen Seite auftritt. Sie ist es, die in

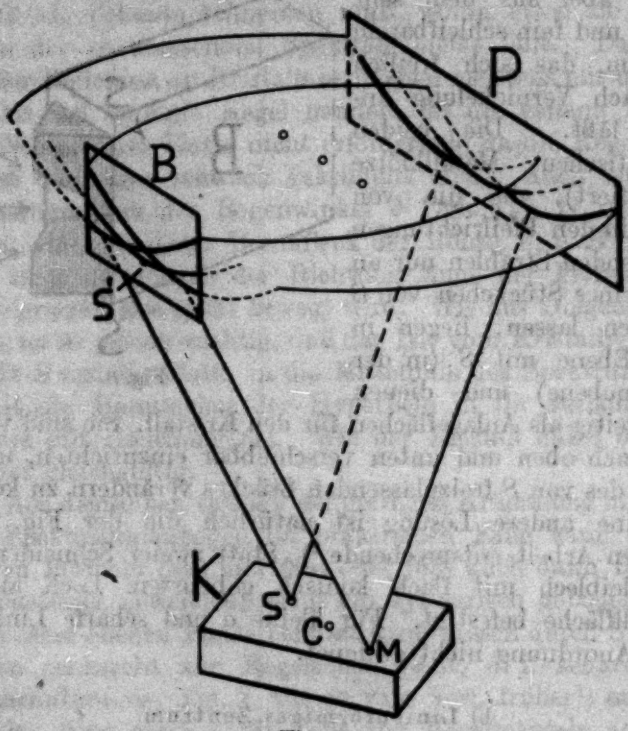


Fig. 4.

diesem Abschnitt hauptsächlich behandelt werden soll und derentwegen die obigen Ausführungen so eingehend gestaltet wurden. Sie spielt in der Spektrographie eine nicht zu unterschätzende Rolle.

Fig. 4 gibt den Strahlenverlauf bei der Reflexion einer von der flächenförmigen Strahlenquelle B ausgehenden homogenen Strahlung an einem Kristall K wieder. S, C und M sind drei Punkte des durch eine auf K aufgesetzte Schneide oder flache Spaltblende zur Reflexion gebrachten linienförmigen

Kristalloberflächenstreifens SM. Die Fig. 4 enthält also die Schnittkurven von drei gleichen Interferenzkegeln mit B und P, die ein ausreichendes Bild von der Überlagerung der Schnittkurven sämtlicher zwischen S und M möglichen gleichen Interferenzkegeln geben, wie sie auch in Fig. 1 durch kontinuierliche geradlinige Parallelverschiebung des in S stehenden Kegels über die Kristalloberfläche entstanden gedacht werden können.

Es sind nur die beiden Kegel von Punkt S und M durch je zwei Seitenlinien und ihre geraden Grundkreise dargestellt. Sie schneiden B in zwei leicht erkennbaren Hyperbelbogen. Die Schnitthyperbel des in C stehenden Kegels ist gleichfalls auf B eingetragen. Nur die von diesen drei ausgezogenen Hyperbelbogen auf B ausgehenden Wellenlängen, für die der Öffnungswinkel der (gleichen) Kegel charakteristisch ist, gelangen auf ihren zugehörigen Kegelmantelsegmenten als geometrischen Orten über S bzw. C bzw. M nach der Projektionsebene P. B und P ist der Übersichtlichkeit halber parallel SCM und in gleichem Abstande von den Kegelachsen gezeichnet. Die teils ausgezogenen, teils gestrichelten Kegelschnittfiguren sind demnach auf beiden Ebenen gleich. Die optisch zusammengehörigen Bogenstücke, d. i. die von B auf P durch Strahlen tatsächlich entworfenen sind in der Figur dick ausgezogen, müssen jedoch verschieden liegen, wie man sich durch Verbinden ihrer korrespondierenden Endpunkte mittels ihrer zugehörigen Grundkreisdurchmesser leicht überzeugen kann. Es entsteht also keine scharfe Spektrallinie auf P, sondern ein aus einer Schaar von ungleichen Hyperbelbogen zusammengesetzter Streifen (vgl. Fig. 5 oben), wenn man die Zahl der zwischen S und M liegenden Reflexionspunkte unbegrenzt wachsen läßt. Dieser Fall entspricht unmittelbar dem bei einer der Schneiden- oder Blendenmethoden, bei denen ein schmaler Kristallstreifen zwischen S und M zur Wirkung kommt. Aber auch bei den Methoden mit Spalt tritt die gleiche Erscheinung auf.

Läßt man B bei unveränderter Höhe in der Richtung parallel SM nach der Mitte zu zusammenschrumpfen, so daß die strahlenden Hyperbelbogenstücke kürzer werden, so schrumpfen entsprechend auch die auf P entworfenen bestrahlten Bogen nach ihren Mitten zu. Ist B schließlich nur noch eine senkrecht zu K stehende Linie, also die Mittellinie

der ursprünglichen Fläche B, so bleiben auf P nur noch drei weit auseinanderliegende bestrahlte Punkte übrig, die, wie man direkt aus der Figur entnehmen kann, weder auf der gemeinsamen Tangente, noch auf ein und derselben von den drei projizierten Hyperbeln liegen, sondern auf einem Kegelschnitt, der entstände, wenn die Oberfläche von K ganz frei läge und nur der Punkt S' strahlte.

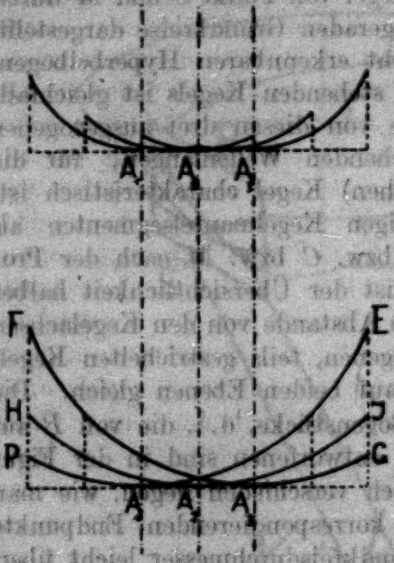


Fig. 5.

Vergrößert man B in Fig. 4 in der Richtung seiner Kegelschnittlinien nach beiden Seiten, so vergrößern sich auch die korrespondierenden bestrahlten Kurvenstücke auf P nach beiden Seiten längs den gestrichelten Kurven als geometrischen Orten. Sie greifen schließlich soweit übereinander, daß im mittleren Teil von P dasselbe Bild entsteht, wie auf B in dem in der Fig. 4 dargestellten Größenverhältnis. Dieser Fall ist in Fig. 5 unten noch einmal gezeichnet. Die drei strichpunktierten Geraden sind die Projektionen der in Fig. 4 von S, C und M nach den Scheiteln der Kurven auf P gezeichneten Linien (c der Hyperbeln) bzw. deren Verlängerungen. Auf ihnen liegen die Hauptachsen der Kegelschnitte. Ihre Schnittpunkte mit ihren zugehörigen Kurven sind also deren Scheitel. Man sieht, daß sämtliche Scheitelschnittpunkte der auf der Geraden SM (Fig. 4) reflektierten Kegel auf einer Geraden von der Länge $A_1 A_3 = SM$ liegen müssen, die eine gemeinsame Tangente sämtlicher Kegelschnitte darstellt. Die Spektrallinie, die dargestellt wird durch den Raum zwischen den beiden äußeren Kurven und dieser Tangente, ist also auf der Seite nach kürzeren Wellen zu auf ein Stück von der Länge der Schneide oder des Spaltes SM geradlinig begrenzt. Diese gerade Kante $A_1 A_3$ ist der wahre Ort der der Gleichung (1) entsprechenden Spektrallinie. Wären also bei punktförmigem

Spalt oder punktförmiger Strahlenquelle sehr scharfe Linien zu erhalten, etwa von 0,001 mm Breite, so wären genaue Messungen auch mit flächenförmigen Strahlern und langen Spalten oder Schneiden möglich. Nach den bisherigen Erfahrungen sind indessen Linien von solcher Schärfe nicht zu erhalten. Hierbei spielt die Dicke der reflektierenden Schicht des Kristalls eine Rolle, wie l. c.[1]) gezeigt wurde. Auch durch diesen Umstand wird ein Linienband mit einer scharfen Kante erzeugt, welch letztere den wahren Ort der Linien darstellt. Diese Kante liegt aber im Spektrum nach längeren Wellen zu. Eine mit leichtem Kristall, großer Strahlungsfläche und langem Spalt oder Schneide aufgenommene Linie hat demnach nach beiden Seiten Säume. Die durch die beschriebenen Erscheinungen erzeugten Linienbänder stoßen mit ihrer scharfen Kante im wahren Ort der Linie zusammen. Da diese Kanten in beiden Fällen das Helligkeitsmaximum darstellen, im hier behandelten Falle, weil dort die Kurven sich am besten aneinander anschmiegen, so ist der wahre Ort eines praktischen Spektralbandes sein Helligkeitsmaximum auch dann, wenn außerdem noch eine durch Inhomogenität der Wellenlänge und physikalische Erscheinungen im Kristall hervorgerufene allgemeine Unschärfe auftritt, denn sie überlagert sich den beiden ersteren Erscheinungen in gleichem Maße. Die von E. Wagner[2]) gemessenen fast symmetrischen Schwärzungskurven von Röntgenlinien können vielleicht im obigen Sinne gedeutet werden. Allerdings spielen bei ihnen noch andere, früher[3]) behandelte Fehlererscheinungen eine unkontrollierbare Rolle. Außerdem müßte angenommen werden, daß beide entgegengesetzt gerichteten Effekte zufällig gleich stark gewesen seien.

Das gesamte durch die Dimensionen von Strahlenquelle und Spaltlänge bedingte Spektralband in dem zuletzt behandelten Fall, daß die Strahlenquelle größer ist als der Spalt bzw. die Schneide, ist das Bild des Spektralbandes, die Figur EGA_2A_1PF (Fig. 4). Ihre Krümmung auf der konkaven Seite ist größer als die der Hyperbeln (die als Kreisbogen gezeichnet sind). Die Helligkeit nimmt entsprechend

1) Vgl. Anm. 1 und 2 p. 473.
2) E. Wagner, Ann. d. Phys. 49. p. 629. 1916.
3) H. Seemann, Ann. d. Phys. 51. p. 391. 1916.

der Dichte der sich kreuzenden Linien vom geradlinigen Rande A_1A_2 nach der konkaven Seite zu ab und außerdem nach den Enden des Bandes. Auf der photographischen Platte werden daher die Enden F und E und die ihm naheliegenden Gebiete weniger geschwärzt sein, bei schwacher Belichtung vielleicht nur als Saum erscheinen.

In der Tab. 2 auf p. 479 sind die geometrischen Formen von Linien für einige praktischen Fälle berechnet. Die in Fig. 5 unten gekennzeichnete Form entspricht den Verhältnissen unter 1—6 der Tabelle. Diese Fälle können bei der Sekundärstrahlenmethode vorkommen, bei der die sekundär erregten Strahler dicht vor dem Spalt aufgestellt werden, ferner auch bei dem von Moseley[1]) benutzten Vakuumspektrographen, bei dem die Antikathode sehr nah am Spalt sitzt und der kürzlich von Rausch v. Traubenberg[2]) beschriebenen Röntgenröhre. Aus den enormen Zahlen unserer Tabelle, die für die Breite der Linien in einigem Abstand von der Mitte und auch zum Teil in der Mitte selbst herauskommen, sieht man, daß es unbedingt vermieden werden muß, Strahler und Spalt so groß zu machen wie dort. 5 mm für beide dürfte für alle Zwecke ausreichen. Wichtig ist auch, wie man aus 5 und 6 sowie 7 und 8 der Tabelle ersieht, daß bei zunehmendem Abstand m der Platte vom Spalt infolge der dann abnehmenden Krümmung der Kegelschnitte die Linienbreite abnimmt. Unter 7 und 8 sind zwei Fälle durchgerechnet, die bei der normalen Anordnung mit einer gewöhnlichen Röntgenröhre, deren Brennfleck nicht sehr scharf ist (Therapieröhre) vorkommen. Man sieht, daß die Linienbreite d in der Mitte hier praktisch meist vernachlässigt werden kann, da man selbst bei den besten mittelschweren Kristallen, z. B. Glimmer, nicht unter 0,005 mm herunterkommen dürfte und auch die gewöhnliche hochempfindliche Bromsilberschicht keine wesentlich höhere Auflösung gestattet. Außerdem ist die Helligkeitsverteilung hier erheblich ungleichförmiger als in den obigen Fällen, wie aus Fig. 5 oben erhellt, die den Fall 7 und 8 darstellt. Die Kurvenbogen sind hier annähernd ebensolang wie die Spalt- bzw. Schneidenlänge. Es sind außer den zu den Scheiteln A_1, A_2, A_3 gehörigen Kegelschnittbogen noch zwei

1) H. Moseley, Phil. Mag. (6) 26. p. 1024. 1913. u 27. p. 703. 1914.
2) Rausch v. Traubenberg, Physik. Zeitschr. 18. p. 240. 1917.

Tabelle 2.

Alle Längen in mm		1	2	3	4	5	6	7	8
Glanzwinkel	α	28°	28°	28°	10°	10°	10°	10°	10°
Abstand: Spalt–Platte bzw. Schneide–Platte	m	200	200	100	200	200	100	200	100
Spaltlänge	s	20	10	10	20	10	10	10	10
Höhe des Strahlers parallel dem Spalt	μ	30	20	20	30	20	20	10	10
Abstand: Strahler-Spalt	ν	30	30	30	30	30	30	200	200
Linienbreite in der Mitte	d_m	0,133	0,033	0,067	0,044	0,01	0,022	0,003	0,0055
Linienbreite an den Enden, n mm von der Mitte	d_e	$n = 20$ 1,05	$n = 15$ 0,4	$n = 15$ 0,8	$n = 20$ 0,35	$n = 15$ 0,13	$n = 15$ 0,26	$n = 5$ 0,011	$n = 5$ 0,02
		$n = 10$ 0,53	$n = 5$ 0,13	$n = 5$ 0,26	$n = 10$ 0,17	$n = 5$ 0,04	$n = 5$ 0,09	$n = 10$ 0,014	$n = 10$ 0,03
Krümmungsradius, bezogen auf Mitte und Enden	r	190	225	113	571	686	343	2745	1323
Hyperbelkrümmungsradius im Scheitel	ϱ	378	378	188	1136	1136	1136	1136	1136

gezeichnet, deren Scheitel in den Mitten zwischen A_1 und A_2 bzw. A_2 und A_3 liegen. Die Dichte der Kurven nach der konkaven Seite und den Enden zu nimmt stark ab. Praktisch werden die Enden der Kurven sich als Halbschattensaum zu erkennen geben. Die konkave Krümmung der Linien wird nicht scharf meßbar sein und mit der Belichtung schwanken (vgl. auch die unbestimmten von E. Wagner (l. c.[1]) gemessenen Krümmungen, die er mit Kristallkrümmungen erklärt). Die geometrische Krümmung der Konkavseite, die durch die Enden der Kurve auf dieser Seite gegeben ist, ist hier schwächer als die Krümmung der einzelnen Hyperbeln. Sie liegt zwischen letzterer und derjenigen Hyperbel, die entsteht, wenn die Strahler punktförmig und der Spalt oder die Schneide beliebig lang geradlinig ist. Sie nähert sich also nicht der Geraden. Die Krümmungen r der Fälle 1—6 bei der Form der Fig. 4 unten sind durchweg erheblich größer als die Kegelschnittkrümmungen im Scheitel, die das Maximum der Krümmung darstellen, in den hier behandelten Fällen aber genügend genau für die ganzen Bogen gelten.

Die hieraus zu ziehenden praktischen Folgerungen sind die, daß für genaueste Messungen entweder der Spalt bzw. die wirksame Schneide sehr kurz im Verhältnis zum Abstand Strahler—Spalt sein oder, falls jene lang sind, die Strahlenquelle in Richtung des Spaltes eine (relativ) geringe Höhe haben muß. Ein Mittelweg ist der, beide mäßig lang bzw. hoch im Verhältnis zu ihrem Abstande — etwa nicht über 10 Proz. — zu wählen.

2. Zentrum außerhalb des Kristalls.

Die bisherigen Ableitungen gelten zunächst nur für die Anordnungen ohne Spalt, wie sie l. c. beschrieben worden sind. Der Strahlengang ist hierbei besonders einfach, da die Reflexionskegel mit ihren Spitzen direkt auf dem Kristall stehen. Man kann die Anordnungen mit Spalt oder Loch jedoch leicht auf sie zurückführen bzw. zeigen, daß die obige Anordnung des Projektionszentrums auf dem Kristall nur ein Spezialfall aller möglichen Anordnungen ist.

Fig. 6 stellt diesen allgemeinen Fall dar, vorerst wieder nur für einen punktförmigen Spalt. Der geometrische Ort

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 49. p. 629. 1916.

der Einfallsrichtungen zweier Wellenlängen, die vom Punkt S' ausgestrahlt und von der Oberfläche von K in je einer Ordnung unter den Winkeln α_1 und α_2 reflektiert werden, ist in Form von zwei koaxialen Kegeln mit der gemeinsamen Spitze S gezeichnet. Die Reflexionsrichtungen findet man in bekannter Weise durch Konstruktion des Spiegelbildes der beiden Kegel in der Kristallfläche und deren Verlängerung über ihre Grundkreise nach oben. Die von der strahlenden Fläche B'

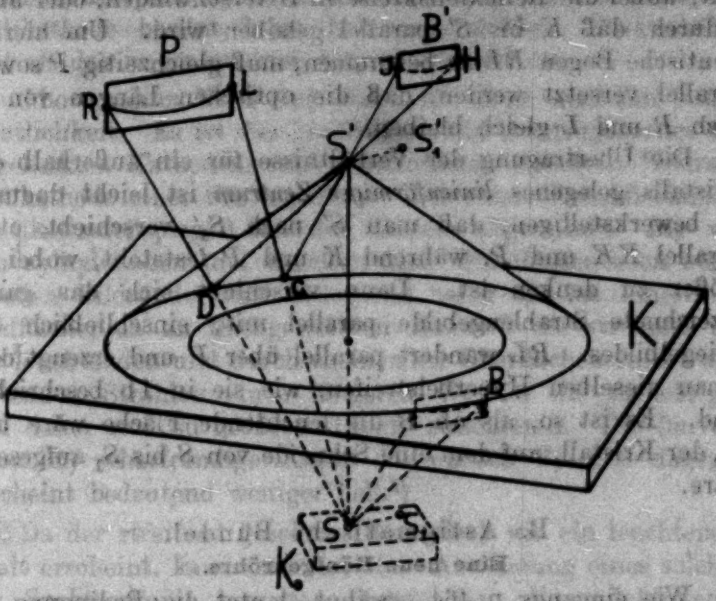


Fig. 6.

durch den als enges Loch in einer größeren horizontalen Blende zu denkenden Punkt S' auf K gelangenden Strahlen einer der beiden Wellenlängen werden demnach nur auf dem Kreisbogen DG reflektiert und bilden so den Doppelkegelmantelsektor $HJS'DG$. Nach der Reflexion den Sektor $DGRL$, der die Projektionsebene P in der Hyperbel RL schneidet und als spiegelbildliche Fortsetzung des gestrichelten Spiegelkegels aufzufassen ist. Die ganze Anordnung B'-S'-K ist daher in Fig. 6 ersetzbar durch die der Fig. 1 analoge B-S auf K_0, in der K_0 einen virtuellen Kristall mit dem Reflexionspunkt S, und B eine virtuelle Strahlenquelle darstellt. Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die oben behandelte.

Sämtliche Überlegungen für den obigen Fall gelten also auch für die alte Braggsche Methode und die Lochkameramethode. Die Ausschnürung des homozentrischen Strahlenbündels auf dem Kristall selbst ist nur ein Spezialfall des allgemeinen Falls in Fig. 6, den man sich außer durch die Spiegelkonstruktion von K_0 auch dadurch zustande gekommen denken kann, daß S' bis in die Kristalloberfläche hinein verschoben wird, so daß S' mit seinem Spiegelbild S zusammenfällt, wobei die Reflexionskreise in S verschwinden, oder auch dadurch, daß K bis S' parallel gehoben wird. Um hierbei identische Bogen RL zu bekommen, muß gleichzeitig P soweit parallel versetzt werden, daß die optischen Längen von S' nach R und L gleich bleiben.

Die Übertragung der Verhältnisse für ein außerhalb des Kristalls gelegenes *linienförmiges Zentrum* ist leicht dadurch zu bewerkstelligen, daß man S' nach S_1' verschiebt, etwa parallel KK und P, während K und P feststeht, wobei B' größer zu denken ist. Dann verschiebt sich das ganze gezeichnete Strahlengebilde parallel mit, einschließlich des Spiegelbildes. RL wandert parallel über P und erzeugt dort genau dieselben Hyperbelstreifen, wie sie in 1b beschrieben sind. Es ist so, als ob B die leuchtende Fläche wäre und K_0 der Kristall, auf dem eine Schneide von S bis S_1 aufgesetzt wäre.

B. Astigmatische Bündel.

Eine neue Röntgenröhre.

Wie eingangs p. 464 erwähnt, lautet die Bedingung für das Zustandekommen scharfer Spektrallinien und deren gesetzmäßiger Ordnung zu einem regulären Spektrum, daß in dem ausgeschnürten Bündel jede Strahlenrichtung innerhalb eines vorgegebenen Intervalls von Richtungen im Raume nur einmal vorkommen darf und daß der Übergang von einer Richtung zu der des im Querschnitt benachbarten Strahles stetig sein muß. Nicht nur ein homozentrisches, d. i. durch eine punktförmige Blende ausgeschnürtes Bündel erfüllt diese Bedingung, sondern auch ein durch zwei irgendwie gekreuzte gerade oder krumme Spalte ausgeblendetes, das in dem speziellen Fall der geradlinigen Spalte astigmatisch genannt wird.

Es lohnt, diesen Fall genauer zu erörtern, da er in der Praxis vorkommt und sogar gewisse Vorteile bietet. Man

erzielt nämlich eine besondere Helligkeit der Spektren, wenn man die von der ebenen Antikathode fast streifend ausfallende Strahlung am Kristall zur Reflexion gelangen läßt. In dieser Richtung strahlt der Brennfleck mit größter Intensität, da er, wie schon Röntgen in seiner zweiten Mitteilung angibt, seine Strahlung nicht nach dem Kosinusgesetz (wie ein glühender Körper) emittiert, sondern wie ein im auffallenden Lichte fluoreszierender, d. i. ein aus einer Oberflächenschicht emittierender Körper. Das Lochkamerabild der streifend gesehenen Antikathode besitzt daher bedeutend größere Flächenhelligkeit als das in senkrechter Aufsicht entworfene.

Photogramm Nr. 2 auf Tafel IV zeigt dies mit voller Deutlichkeit. Es ist das Lochkamerabild der ringsherum von abgelenkten Kathodenstrahlen getroffenen massiven Wolfram-Antikathode einer Coolidgeröhre. Die ebene Brennfleckfläche (Antikathodenspiegel) war der Kamera abgewandt. Die von den zylindrischen und kegelförmigen Oberflächenteilen stammenden Bildränder sind bedeutend heller als das Innere der Bildfläche, da an flachgewölbten Rändern die streifend aus der leuchtenden und durchscheinenden Oberflächenschicht austretenden Strahlen einen längeren Weg in ihr zurücklegen und daher sich zu größerer Dichte summieren. Die (unvollkommen) scharfrandige Kante des ebenen Spiegels dagegen erscheint bedeutend weniger hell.[1])

Da der streifend gesehene Brennfleck wie ein leuchtender Spalt erscheint, kann man ihn ohne Anwendung eines solchen zur Spektroskopie benutzen, indem man die reflektierende Kristallfläche so aufstellt, daß sie mit einer ihrer geraden Kanten soeben in die von Röntgenstrahlen erfüllte Hemisphäre hineinreicht, und den Kristall um diese Kante dreht. Dann wird in jeder Stellung des Kristalls nur je eine Wellenlänge des Spektrums entworfen, ein Fall, der für spezielle Zwecke, z. B. für einen Monochromator, oder wenn es sich darum

1) Die Zunahme der Helligkeit an den stärker gewölbten Rändern des Schaftes ist so sprunghaft, daß es fast aussieht, als sei der helle Rand wie mit der Reißfeder gezogen. Diese Erscheinung dürfte durch das verhältnismäßig grobe Loch der Lochkamera hervorgerufen worden sein. Der tatsächlich sehr viel hellere und sehr scharf erscheinende äußerste Rand projiziert sich durch das relativ grobe Loch als fast gleichmäßig heller Streifen.

handelt, eine lange geradlinige Spektrallinie zu bekommen, brauchbar ist.

Im allgemeinen wird aber wohl ein größerer Öffnungswinkel des in die Loch- oder Schneidenblende einfallenden Strahlenbündels erwünscht sein, damit die in dem Bündel enthaltene Lichtmenge sich über einen möglichst großen Spektralbereich erstreckt. Dies kann nur erreicht werden, wenn die Kristallfläche in jeder Drehlage senkrecht zur Antikathodenfläche steht und geschieht auf Kosten der Länge der Linien, die bei vollkommen streifend von der Antikathode in die Lochblende gelangenden Strahlen zu Punkten zusammenschrumpfen

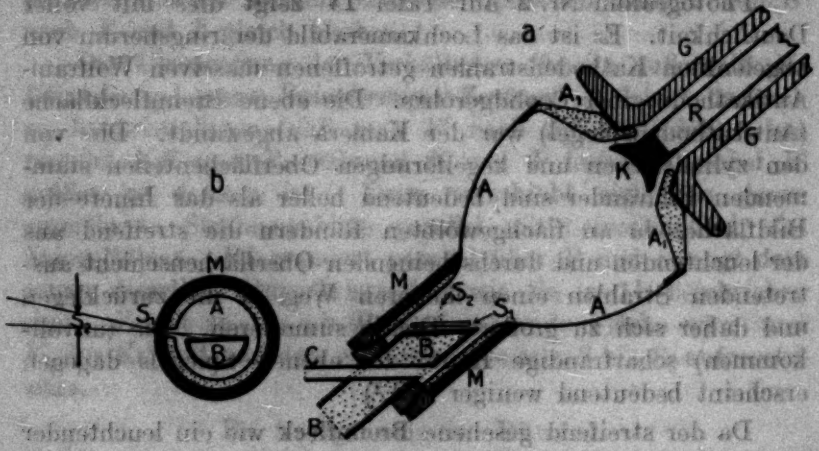


Fig. 7.

würden, da das so erzeugte homozentrische Bündel zu einem ebenen Fächer entartet. Das ist unerwünscht, da die sichere Erkennung schwacher Linien und Bandkanten nur möglich ist, wenn die Länge der Linien bzw. die Breite des gesamten Spektralbandes ein hohes Vielfaches der Linienbreite beträgt. Um dies zu erreichen, ohne auf die bedeutend stärkere streifende Emission zu verzichten, muß statt einer Lochblende eine Spaltblende senkrecht zur Antikathode und parallel zur Kristallfläche benutzt werden, die, wie in A 1 b gezeigt, bei Strahlern, deren Fläche vom Spalt aus groß erscheint, keine völlig scharfen Spektrallinien liefern kann. Diese Befürchtung liegt hier nicht vor, wenigstens nicht, wenn Spalt und Antikathode soweit voneinander entfernt sind, daß der Brennfleck auch

vom höchsten Punkt des Spaltes über der Brennfleckebene noch genügend schmal gesehen wird.

Es kann jedoch der Fall eintreten, daß letzteres nicht mehr zutrifft, wenn nämlich mit einer Röntgenröhre, wie sie schon Moseley benutzt hat, gearbeitet wird, bei der der Spalt in die nächste Nähe des Brennfleckes gerückt werden kann, so daß letzterer vom Spalt aus unter großem Winkel gesehen wird und somit ein großer Bereich des Spektrums von ihm gleichzeitig entworfen wird. Auch vom Verfasser wurde eine ähnliche Röhre (Fig. 7) mit ganz metallischem Entladungsraum benutzt, deren Strahlen durch ein Aluminiumfenster von 0,05 mm Dicke austraten. Letzteres kann bei so schwachem und schwächerem Blech nur sehr schmal sein, etwa 2 mm und darunter, wenn auch beliebig lang. Es ergibt sich also hier von selbst, es als Spalt auszubilden und parallel nahe an den Horizont des Antikathodenspiegels zu verlegen. Dieses Schlitzfenster wird von jedem Punkte des eigentlichen wenn auch noch so langen Spaltes als leuchtendes schmales Band gesehen. Die Länge und Lage beider am besten senkrecht gekreuzten Spalte muß nun so gewählt werden, daß der am Kristall gelegene „zweite" Spalt von dem aus dem Spaltfenster austretenden keilförmigen Bündel einerseits soeben voll getroffen wird, andererseits die Antikathodenfläche möglichst streifend durch das Fenster gesehen wird. Ob der Kristall hierbei dicht an die Röhre herangerückt ist oder *zwischen* beiden Spalten steht oder *im* zweiten Spalt, wobei er selbst dessen eine Schneide bildet (Schneidenmethode), oder zwischen zweitem Spalt und Platte, ist theoretisch gleichwertig, praktisch aber insofern nicht, als bei zu großer Nähe an der Antikathode und kräftiger Strahlung — es wurde mit der zu beschreibenden Röhre mit 15 Milliampère bei Härte 7—8 Wehnelt gearbeitet — die Kristalle von der Bestrahlung verändert werden. Steinsalz z. B. wird nach halbstündiger Bestrahlung in mehrere Millimeter Tiefe braunviolett, Zucker an der Oberfläche perlmutterartig trübe und bekommt schließlich sogar Sprünge.

Die nach obigen Prinzipien gebaute und bis in alle Einzelheiten durchgearbeitete Röhre ist in Fig. 7a und b dargestellt. 7b zeigt den Querschnitt des Anodenhalses in Richtung der in 7a gestrichelten Linie S_2, die die Lage des zweiten

Spaltes angibt. Er ist der Einfachheit halber kreisförmig statt elliptisch gezeichnet worden.

Die Kathode K wirft ihre Strahlen auf den horizontalen ebenen Spiegel der Antikathode B, die unter etwa 30—45° gegen die Röhrenachse geneigt ist, damit der an und für sich durch geeignet starke Krümmung des Kathodenhohlspiegels stark zerstreute Brennfleck möglichst in die Länge gezogen wird. Die Strahlung gelangt durch das Spaltfenster S_1, das wie ein Kamin in die doppelten Röhrenwände R eingesetzt ist, fast streifend über den Antikathodenspiegel ins Freie. Das Aluminiumblech ist außen aufgekittet.[1]) Aus dem flach keilförmig austretenden Bündel wird durch den zweiten Spalt S_2, der S_1 senkrecht kreuzt, nur je ein ebenes fächerförmiges Bündel von sämtlichen von jedem Punkte von S_1 ausgehenden räumlichen Bündel ausgeblendet für den theoretisch idealen Fall, daß beide Spalte unendlich schmal sind. Während in dem aus S_1 austretenden Bündel noch parallele Strahlen vorkommen, ist das hinter S_2 nicht mehr der Fall. Die Richtung der Verbindungslinie eines Punktes von S_1 mit einem Punkte von S_2 kommt nur einmal vor. Das aus S_2 austretende Bündel enthält also auch keine sich schneidenden Strahlen mehr. Die Neigungsänderung benachbarter Strahlen ist daher stetig.

Es handelt sich demnach bei einem solchen astigmatischen Bündel um ein Raumgebilde mit geradliniger Struktur, einen Regelkörper, der erzeugt gedacht werden kann durch Gleiten einer Geraden längs zweier sich kreuzender Leitlinien. Ein Kegelkörper kann gleichfalls durch eine Gerade erzeugt gedacht werden, die durch die Kegelspitze geht und sämtliche Richtungen innerhalb des Kegelmantels annimmt. Er ist demnach ein homozentrisches Bündel von Geraden, deren Neigung gegen

1) Die Anodenglocke A ist mit ihrer metallenen, für zirkulierende Wasserkühlung hohl ausgebildeten Fläche A_1 auf das Porzellanrohr G (sogen. Porzellangriff zur Wanddurchführung von blanken Hochspannungsleitungen) aufgekittet. Der gegenüberliegende Antikathodenhals ist gleichfalls als wassergekühlter Hohlzylinder mit dem starken Bleimantel M ausgebildet. Auch der Antikathoden- und Kathodenschaft haben Wasserkühlung. Die drei Wasserräume der Anode werden direkt von der Wasserleitung gespeist, der Kathodenschaft kommuniziert mit einem größeren isolierten Wasserreservoir oder einer luftgekühlten Kupferrohrschlange (Thermosyphon). Das Rohr C führt zur dauernd angeschlossenen Pumpe. Näheres demnächst an anderer Stelle.

eine feste Ebene eine vorgegebene Grenze nicht überschreitet. Der Kegelmantel wird erzeugt von denjenigen Geraden, die diese Grenzneigung besitzen.

Dieser letztere Fall ist optisch verwirklicht eben bei der selektiven Spiegelung von Röntgenstrahlen an einer Kristallspaltfläche. Letztere ist die Bezugsebene, das Blendenloch die Kegelspitze bzw. das Zentrum des Bündels. Die Kristallfläche reflektiert nur die vom Blendenloch unter gleichen Neigungen einfallenden Strahlen, die also auf einem Kegelmantel liegen, wie oben in IA 1a ausführlich erörtert wurde.

Auf was für einer Fläche liegen nun die Strahlen eines astigmatischen Bündels, die eine Ebene unter einem bestimmten Neigungswinkel treffen? Es ist zunächst klar, daß es gleichfalls eine Regelfläche (geradlinige Fläche) sein muß. Eine Ähnlichkeit mit einem Kegelmantel scheint sie indessen ihrer offenen Gestalt nach nicht zu besitzen. Gleichwohl schneidet sie eine Ebene, die ihren beiden Leitlinien parallel ist, in einer Hyperbel. Im vorliegenden optischen Falle bedeutet das: Die aus einem durch zwei gekreuzte Spalte ausgeblendeten homogenen Röntgenstrahlenbündel an einer ebenen Kristalloberfläche zur Reflexion gelangenden Strahlen liegen auf einer Regelfläche, die geometrisch dadurch erzeugt gedacht werden kann, daß eine Gerade als Erzeugende längs zweier gekreuzten Leitlinien — den beiden Spalten — geführt wird, während sie gleichzeitig gegen eine Ebene — die Kristalloberfläche — konstante Neigung behält. Die reflektierten Strahlen und ihre Verlängerungen bilden das Spiegelbild dieser Fläche. Beide Flächen schneiden eine zu den gekreuzten Leitlinien parallele Ebene — die Projektionsfläche (photographische Platte) — in einer vollständigen Hyperbel, andere Ebenen in Kurven höherer Ordnung.

Ein Röntgenspektrometer besteht demnach, rein geometrisch gesprochen, erstens aus einem Blendensystem, das aus der diffus einfallenden Strahlung ein homozentrisches oder astigmatisches Strahlenbündel ausblendet, und zweitens aus einem ebenen Spiegel, der die besondere Eigenschaft besitzt, aus diesen räumlichen Bündeln bei der Reflexion eine Schar obiger Regelflächen auszuwählen und ihre Fortsetzung in der Strahlenrichtung spiegelbildlich umzukehren. Die einzelnen Flächen der Schar unterscheiden sich geometrisch voneinander

nur durch die Neigung ihrer Erzeugenden gegen die Spiegelebene, optisch durch die Wellenlänge, die mit dieser Neigung durch Gleichung (1) verknüpft ist.

Die Figg. 8 und 9 geben ein Bild von den einfachsten Fällen der Reflexion astigmatischer Bündel, nämlich wenn die Leitlinien g_1 und g_2 — das sind die gekreuzten geradlinigen Spalte — sich senkrecht kreuzen und wenn die Spiegelebene E' parallel der einen und senkrecht zur anderen liegt, während

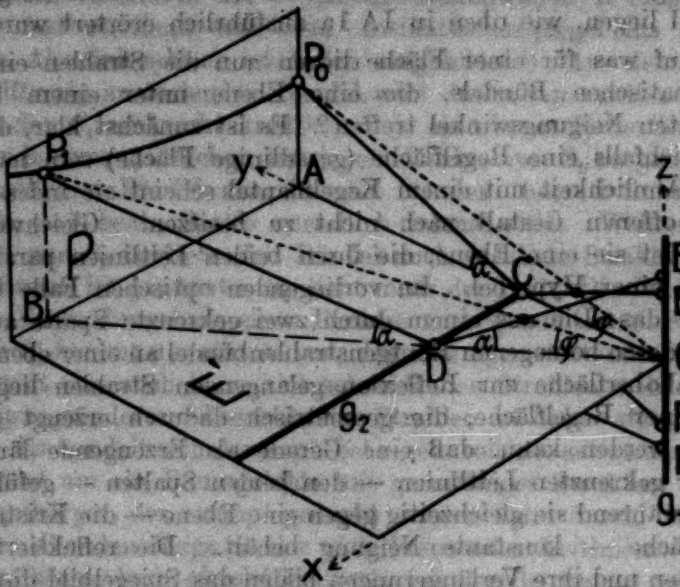


Fig. 8.

die Projektionsebene P parallel zu beiden verläuft. In Fig. 8 im besonderen liegt g_2 auf E'. Dieser Fall ist praktisch verwirklicht, wenn g_1 ein Spalt ist, der von rechts vorn diffus bestrahlt wird, und wenn g_2 eine auf den Kristall E von oben aufgesetzte Schneide ist. Die Erzeugende der Regelfläche, die an g_1 und g_2 gleitet, während sie gegen E' die Neigung α behält, ist in zwei Lagen EC und E_1D gezeichnet. In C bzw. D wird sie reflektiert und bildet dann die Erzeugenden FCP_0 bzw. F_1DP_1 der spiegelbildlichen Schale. F und F_1 sind also nur die Spiegelbilder von E bzw. E_1. Der Schnitt dieser widergleichen Schale der Fläche mit P ist die Kurve P_0P_1,

die ein Hyperbelast ist, dessen Achse AP_0 bildet, falls die Ecke A rechtwinklig ist.

Der Beweis hierfür ist in diesem speziellen Falle fast direkt aus der Figur ablesbar. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_0A}{OA} = \frac{P_1B}{DB},$$

also
$$P_0A : P_1B = CA : DB = OA : OB$$

und
$$\frac{P_0A}{OA} = \frac{P_1B}{OB} = \operatorname{tg}\varphi,$$

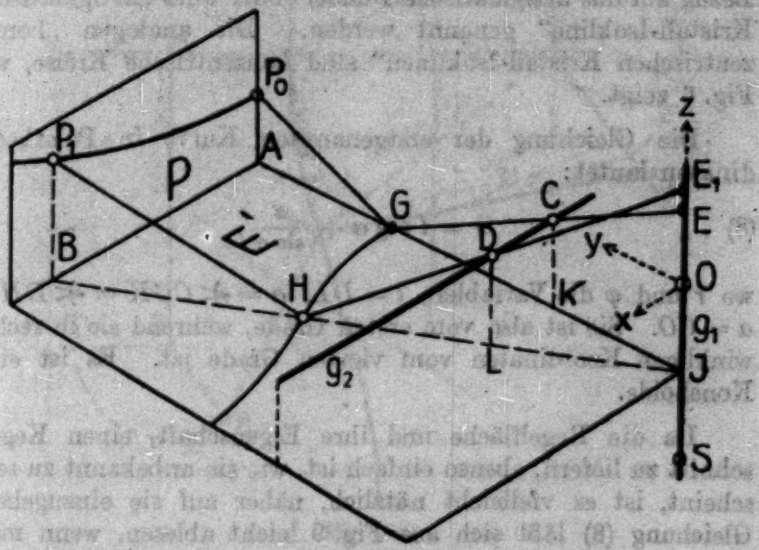


Fig. 9.

oder kurz gesagt, die Dreiecke OAP_0 und OBP_1 sind einander ähnlich. Die gestrichelten Linien OP_0 und OP_1 haben also gleiche Neigung φ gegen E', sind demnach die Erzeugenden des Kegelmantels mit dem halben Öffnungswinkel $\pi/2 - \varphi$. P_0P_1 ist daher gleichzeitig der Schnitt dieses Kegels und der Regelfläche mit P. Für die andere Schale gilt dasselbe spiegelbildlich, wenn man sie über g_2 hinaus verlängert. Sie schneidet dann P in dem anderen Hyperbelast, der zu E' spiegelbildlich nach unten liegt.

In Fig. 9 ist der Fall gezeichnet, daß die Spiegelebene der Fig. 8 parallel nach unten verschoben worden ist, um die

Schnittkurve GH der Regelfläche mit ihr zu gewinnen, die im Spezialfall der Fig. 8 eine Gerade ist. Sie ist eine Kurve mit zwei Wendepunkten und schmiegt sich auf beiden Seiten ihres Scheitels G der Projektion von g_2 auf E' asymptotisch an. Optisch stellt sie diejenige Linie der Kristalloberfläche dar, die die gleiche Wellenlänge des von den beiden Spalten g_1 und g_2 ausgeblendeten astigmatischen Bündels reflektiert. Man könnte sie mit größerem Recht „Interferenzkurve gleicher Neigung" nennen als die Kurve P_0P_1. Sie möge jedoch, um Verwechslungen zu vermeiden, „Isokline des Kristalls mit Bezug auf das astigmatische Bündel" oder kurz „astigmatische Kristall-Isokline" genannt werden. Die analogen „homozentrischen Kristall-Isoklinen" sind konzentrische Kreise, wie Fig. 6 zeigt.

Die Gleichung der erstgenannten Kurve in Polarkoordinaten lautet:

$$r = l \operatorname{ctg} \alpha + \frac{a}{\sin \varphi}, \tag{8}$$

wo r und φ die Variablen, $l = DL$, $\alpha = \sphericalangle CGK = \sphericalangle DHL$, $a = CO$. Sie ist also vom ersten Grade, während sie in rechtwinkligen Koordinaten vom vierten Grade ist. Es ist eine Konchoide.

Da die Regelfläche und ihre Eigenschaft, einen Kegelschnitt zu liefern, ebenso einfach ist, wie sie unbekannt zu sein scheint, ist es vielleicht nützlich, näher auf sie einzugehen. Gleichung (8) läßt sich aus Fig. 9 leicht ablesen, wenn man letztere nach Methoden der darstellenden Geometrie behandelt, wie in Fig. 10 unter Beibehaltung der Buchstaben und in größter (überflüssiger) Ausführlichkeit geschehen ist. P_0AGEJ der Fig. 9 ist in Fig. 10 um AJ nach hinten, P_1BHE_1J um BJ nach vorn, P um AB nach links auf E' umgelegt, g_2 auf E' projiziert. Man sieht, daß die Stücke LK' und HG' des Radiusvektor JB einander gleich sind. Es sind also zur Konstruktion der Kurve GH [Gleichung (8)] einfach die zwischen den Kreisbogen KK' und KL liegenden Radiusvektorabschnitte auf deren Verlängerungen vom Kreisbogen GG' aus nach links abzutragen. Die äußeren (linken) Endpunkte dieser Strecken bilden die Kurve (8). Die Konstruktion der Schnitthyperbel P_0P_1 der Fig. 9 zeigt Fig. 10 ohne weiteres. Die analytisch

gewonnene Gleichung der Regelfläche Fig. 8 (und 9) in rechtwinkligen Koordinaten lautet:

$$(9) \qquad \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha\,(y-a)^2} - \frac{x^2}{(b-y)^2} = 1\,.$$

Ihre Schnittkurve mit P (in Gleichung (9) $y = OA$ gesetzt) gibt direkt die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel.

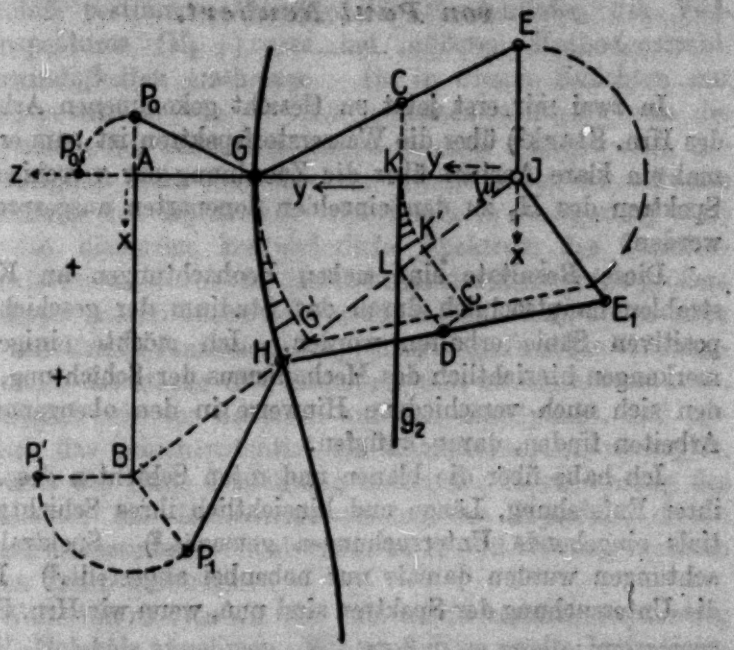


Fig. 10.

Es wurde noch die Gleichung für den Fall ausgerechnet in dem g_1 und g_2 windschief gegen die Reflexionsebene E und gegeneinander liegen, während P senkrecht zu ihr und zur kürzesten Verbindungslinie zwischen g_1 und g_2 liegt. Auch dann ist der Schnitt mit P eine Hyperbel. Es scheint, als ob letzteres auch gilt, wenn E beliebig gegen P, g_1 und g_2 liegt.

(Fortsetzung folgt.)

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 16. Juli 1917.)

8. *Bemerkung über die geschichtete positive Glimmentladung;* von *Paul Neubert.*

In zwei mir erst jetzt zu Gesicht gekommenen Arbeiten des Hrn. Stark[1]) über die Wasserstoffspektren ist zum erstenmal ein klare Ansicht über die Zuordnung der verschiedenen Spektren des H_2 zu den einzelnen Ionenarten ausgesprochen worden.

Diese Resultate sind neben Beobachtungen an Kanalstrahlen hauptsächlich durch das Studium der geschichteten positiven Säule erhalten worden. Ich möchte einige Bemerkungen hinsichtlich des Mechanismus der Schichtung, über den sich auch verschiedene Hinweise in den obengenannten Arbeiten finden, daran knüpfen.

Ich habe über die blauen und roten Schichten des H_2 in ihrer Entstehung, Länge und hinsichtlich ihres Schichtpotentials eingehende Untersuchungen gemacht.[2]) Spektralbeobachtungen wurden damals nur nebenbei angestellt.[3]) Durch die Untersuchung der Spektren sind nun, wenn wir Hrn. Stark

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 52. p. 221 u. 255. 1917.

2) P. Neubert, Ann. d. Phys. 42. p. 1454. 1913; Physik. Zeitschr. 15. p. 430. 1914.

3) Ich möchte hier auf die Bemerkung des Hrn. Stark über meine irrtümliche Auffassung von der geringeren Schwächung der blauen Bandenlinien gegenüber den roten in den blauen Schichten antworten. Ich habe nur gesagt (P. Neubert, vgl. o. p. 1491), daß, um das Überwiegen der blauen Farbe zu erklären, man ein Stärkerwerden der blauen Bandenlinien als möglich annehmen könnte, aber hinzugefügt, daß subjektiv nichts wahrgenommen wurde. Da von mir, wie auch ausdrücklich gesagt, das Spektrum nur bis H_β verfolgt wurde, auch der Spektrograph ziemlich lichtschwach war, habe ich allerdings das kontinuierliche Spektrum übersehen oder vielmehr dem ganz schwach erhellten Untergrund des Spektrums im Blaugrünen keine Bedeutung zugelegt. Die allgemeine Schwächung des Viellinienspektrums in den blauen Schichten, die auch Herr Stark angibt, deckt sich mit meinen Beobachtungen.

folgen, hinsichtlich der Zuordnung der einzelnen Spektren zu den verschiedenen Ionenarten folgende Punkte klargelegt: Der blaue Teil der Schichtung (blauer Rand bei roten Schichten und die blauen Schichten selbst) kommt dadurch zu Stande, daß das kontinuierliche Spektrum des Quantenpaares $H_2 +$ Elektron im Blaugrünen und Blauen bei Rückbildung zum Molekel oder nicht vollständiger Abtrennung eines Elektrons stark ist, und daß bestimmte Gruppen der Bandenlinien des Viellinienspektums ($H_2 +$) erst bei größeren Kathodenstrahlgeschwindigkeiten erscheinen. Da in diesen Schichten nur Schichtpotentiale von 12 Volt gemessen wurden, kann die Hauptmasse der Kathodenstrahlen in einer Schicht diese Geschwindigkeit nicht überschreiten. Daher findet nur teilweise Ionisierung des H_2-Moleküls und intensive Anlagerung statt und das blaugrüne kontinuierliche Spektrum des Quantenpaares ist stark. Je schneller die Kathodenstrahlen werden (größere Schichtpotentialdifferenz bei den roten Schichten), um so mehr wird vollständige Ionisation zu H_2+ überwiegen und das Viellinienspektrum, das starke rote Linien enthält, kräftig hervortreten.

Stellen wir uns demnach auf den Standpunkt, daß tatsächlich das Schichtpotential die Ionisationsspannung angibt, so würde die blaue Schichtung neben der Erschütterung des H_2-Moleküls die Ionisationsspannung des H-Atoms, dessen Ionisationsspannung wohl als sicher zu 11—12 Volt angenommen werden kann, darstellen.

Weiterhin müßten wir aber eine zweite Ionisationsspannung des H_2-Moleküls annehmen. Wie groß diese zweite Ionisationsspannung ist, kann zunächst nicht gesagt werden. Daß sie in den Arbeiten von Frank und Hertz nicht auftritt, ist klar, da zunächst nur die kleinste Ionisationsspannung sich bei ihrer Anordnung bemerkbar machen wird. Sie müßte aber größer sein als 31 Volt, da diese Größe als Schichtpotentialdifferenz in weiten roten Schichten von mir beobachtet worden ist.[1]) Der lineare Verlauf der Schichtpotentialdifferenz bei den weiten roten Schichten mit wachsendem Druck würde sich zwanglos als Überlagerung dieser beiden Vorgänge darstellen, so daß bei dem größten Schichtpotential die vollständige Ionisierung des H_2-Molekels eingetreten wäre. Wir hätten demnach in *reinem* H_2, wo nur die rote Schichtung

1) P. Neubert, vgl. o. p. 1483.

vorhanden ist, vornehmlich H_2+-Ionen im besonderen Maße bei hohem Druck und $H+$-Ionen bei tiefem Druck. Dies stimmt überein mit der Schwächung der Balmerserie bei hohem Druck gegenüber dem Viellinienspektrum; bei den blauen Schichten treten als Ionen hauptsächlich $H+$- und nebenbei als Lichterreger das Quantenpaar H_2+-Elektron auf, H_2+ aber hauptsächlich mit Anregung von nur bestimmten Gruppen (elektrisch empfindlich nach Stark).

Es fragt sich nun, wie der Vorgang der Trennung durch Zusatz elektronegativer Gase in diese beiden Ionenkonzentrationen oder Schichtsystemen zustande kommen kann.[1]) Wie ich schon früher ausgeführt habe, und auch durch Frank und Hertz gezeigt worden ist, lagern elektronegative Gase freie Elektronen an und verhindern damit ein Aufkommen größerer Kathodenstrahlgeschwindigkeiten in höherem Maße. Mithin tritt die Ionisierung des H_2-Moleküls im ganzen Druckbereich zurück, und die Schichtung bleibt blau mit 12 Volt (Atomionisationsspannung) als Schichtpotentialdifferenz. Ob diese Höchstgeschwindigkeit bei O_2 gerade 12 Volt beträgt, ließe sich erst durch Messung des Schichtpotentials bei Zusatz von Jod und Brom, die ja auch blaue Schichtung in H_2 hervorbringen, entscheiden; ebenso, ob tatsächlich nach dem obigen Standpunkt das Schichtpotential die Ionisationsspannung angibt.

Daß nur bis jetzt in H_2 diese verschiedenen Schichtsysteme gefunden worden sind, mag davon herrühren, daß bei H_2 die Ionisationsspannung von Atom und Molekül, wenn wir die obigen Ausführungen annehmen, so stark verschieden sind ($H_2 > 30$ Volt, $H = 11$—12 Volt). Bei der Stabilität, die das H_2-Molekül nach Anordnung seiner Atome und Elektronen vermuten läßt, scheint dies nicht unverständlich. Die Ionisierung des H-Atoms könnte allerdings bei der Ionisationsspannung von 12 Volt erst nach einer gesonderten Zertrümmerung des H_2-Moleküls in zwei neutrale Atome möglich erscheinen, da ja, um aus dem neutralen Molekel zwei $H+$ durch Stoß zu erzeugen, zweifellos größere Energie nötig ist, als zur Erzeugung von H_2+.

Als nächstes Element käme Helium in Frage, das aber als einatomiges Gas trotz seiner Zweiwertigkeit nicht sehr geeignet scheint. Die anderen Elemente hätten dann Ioni-

1) P. Neubert, vgl. o. p. 1487, 1501 u. 430.

sationsspannungen der Moleküle und Atome, die nicht in dem Maße wie bei H_2 verschieden wären. Darüber fehlen, soweit ich es von hier entscheiden kann, noch vollständig die Angaben. Die Schichtung ist z. B. bei O_2, N_2 oder Hg[1]) schlecht ausgebildet, zum Teil wie auch bei Helium, in reinem Zustand mit bestimmten Zusatzgas kaum genauer untersucht. Wenn so auch der Zerfall in zwei Schichtsysteme bei H_2 durch elektronegative Gase erklärbar erscheint, so bleibt noch die Frage übrig, wie überhaupt in reinem Wasserstoff die Schichtung, wie zweifellos feststeht[1]), zustande kommt.

Auch hier möchte ich diese Hypothese einführen, daß hauptsächlich die Verschiedenheit der Ionisationsspannungen (Molekül-Atom) zugleich mit der von Hrn. Stark angenommenen Verschiedenheit der Spektralbereiche des H_2+-Ions und neutralen H_2 und H, sowie des Quantenpaares die Ursache ist.

Es wäre nicht unwahrscheinlich, daß die dunkeln Räume zwischen den Schichten des nach Hrn. Stark ultravioletten Bandenspektrum des H-Atoms und Moleküls zeigen.

Ein Analogon bildete dann die dunkle Sauerstoffentladung, die von mir beschrieben, deren genauere, auch spektrale Untersuchung aber durch den Krieg verhindert worden ist.[2])

Hr. Stark bemerkt, daß Sauerstoff auch bei starker Konzentration, z. B. bei H_2O-Entladung, sich im sichtbaren Spektrum kaum bemerkbar macht, und führt dies darauf zurück, daß die Spektren des O_2 und seiner Ionen im Ultravioletten liegen. Nun zeigt Sauerstoff in der Glimmentladung bei hohem Druck (über 1,5 mm) auch bei größeren Stromdichten (0,01 Amp. cm $^{-2}$), sobald man ohne Induktor arbeitet, kein Licht. Die Stromleitung dürfte dabei hauptsächlich durch O_2+ von statten gehen. Erst bei tiefen Drucken oder hohen Stromdichten zeigen sich die Sauerstoffunkenlinien (O +). Ob noch andere Spektren auftraten, konnte damals wegen der geringen Helligkeit nicht festgestellt werden. Dieser Vorgang wäre eine Stütze für die obige Hypothese der roten Wasserstoffschichten. — Es fragt sich nun, ob nicht in jeder ungeschichteten Entladung spektroskopisch sich Schichten nachweisen lassen, in denen das Spektrum, wenn auch schwach, wechselt. — Meines Wissens sind darüber noch keine Versuche

1) P. Neubert, vgl. o. p. 431.
2) P. Neubert, vgl. o. p. 432.

veröffentlicht worden. Selbstverständlich ist Voraussetzung, daß tatsächlich die verschiedenen Ionenarten eines Elementes charakteristische Spektren und verschiedene Ionisationsspannungen haben. Der Anfang zu dieser Erkenntnis ist aber eben erst für H_2 durch die Arbeiten des Hrn. Stark gemacht worden.

Der Einfluß der elektronegativen Gase, die die Schichten auslösen, stellt sich dann so dar, daß die Ionisierung einer Ionenart stark zurückgedrängt wird, indem die ionisierenden Elektronen durch Anlagerung an die elektronegativen Moleküle nicht die großen Geschwindigkeiten erlangen können, um die Teilchen mit höherer Ionisationsspannung (jedenfalls meist Moleküle) in ausreichendem Maße zu ionisieren. Den Ausfall ihres Spektrum oder wenigstens seine starke Schwächung brächte dann die Dunkelräume und damit die sichtbaren Schichten zustande.

Eine geringe Änderung des Potentialverlaufs ist dann nichts Auffälliges. H_2 zeigt dann in reinem Zustand auch Schichtung, weil das Spektralgebiet des Ions zum Molekül und Atom derartig verschieden ist (vgl. o.) und bei dem großen Unterschied der Ionisationsspannungen werden eben hauptsächlich bei großen Moleküldichten, also hohem Druck und schnellen Kathodenstrahlen die Molekel ionisiert.

Eine Schwierigkeit bieten dann nur noch die einatomigen Gase wie Helium und Quecksilber, die bei Zusatz elektronegativer Gase schöne Schichtung zeigen. Doch liegt hier wieder der Fall vor, daß He zweiwertig ist und Hg sogar mehrwertig, so daß wir hier die verschiedenen Stufen der Ionisation als gleichwertig der der Atome und Moleküle ansehen können.

Eine Erklärung endlich der schönen Schichtung in organischen Verbindungen ließe sich wohl leicht bei weiterer Ausführung dieser Gedanken finden.

Jedenfalls dürften genaue Spektraluntersuchungen über den ganzen Spektralbereich unter gleichzeitiger Schichtpotentialmessung und Messung des allgemeinen Verlaufs des Potentials, sowie unter genauer Beachtung etwaiger Verunreinigung durch elektronegative Gase interessante Aufschlüsse und weitere Aufklärung des Schichtproblems bringen.

Im Felde, Mitte September 1917.

(Eingegangen 21. September 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 15.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Die Drudesche Dispersionstheorie vom Standpunkte des Bohrschen Modelles und die Konstitution von H_2, O_2 und N_2;*

von A. Sommerfeld.

Inhaltsübersicht:

Einleitung. Allgemeine Gesichtspunkte und Ergebnisse.

Kap. I. Die Dispersion in einem Gase Bohrscher Molekeln.

§ 1. Erinnerung an die Drudesche Dispersionstheorie. — § 2. Die Dispersionsformel für einen Elektronenring. — § 3. Annahme isotroper Bindungen. Vergleich mit Drude. — § 4. Näherungen bei anisotroper Bindung. — § 5. Auflösung des Widerspruches zwischen dem Dispersionswert und dem Kathodenstrahlwert von e/m.

Kap. II. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene durch Bohrsche Molekeln.

§ 6. Erinnerung an die Drudesche Theorie der Rotationsdispersion. — § 7. Die Formel der magnetischen Drehung für einen Elektronenring. — § 8. Anderer Quantenansatz für das magnetische Feld. Prinzipielles über Quantelung im Magnetfelde. — § 9. Annahme isotroper Bindungen. — § 10. Paramagnetische Einstellung im Magnetfelde.

Kap. III. Konstitution von H_2, O_2 und N_2.

§ 11. Allgemeines über die benutzten Molekelmodelle. — § 12. Dispersion und Refraktion von H_2, O_2 und N_2. Der empirische Wert von ω. — § 13. Magnetische Drehung in H_2, O_2 und N_2. Bestätigung des empirischen Wertes von ω. — § 14. Vermutung über das Verhältnis des empirischen und quantentheoretischen Wertes von ω. — § 15. Anhang über die mutmaßliche Konstitution von He.

Einleitung. Allgemeine Gesichtspunkte und Ergebnisse.

Die Drudesche Dispersionstheorie stellt bekanntlich das Brechungsvermögen (die „Refraktion") und seine Abhängigkeit von der Wellenlänge (die „Dispersion") der vollkommenen Gase gut dar durch eine Formel, welche nur eine Eigenfrequenz im Ultravioletten enthält. Von besonderem Interesse ist dabei die von Drude aufgestellte, von Natanson[1]) weiter

1) L. Natanson, Krakauer Akademie 1907. p. 316.

verfolgte Valenzregel: *Die Anzahl der schwingungsfähigen Elektronen (Dispersionselektronen) in der Molekel ist für eine Reihe vollkommner Gase der Valenz (Wasserstoffvalenz) proportional.* Indessen stimmt der Proportionalitätsfaktor, der von e/m abhängt, nicht gut mit dem Kathodenstrahlwerte oder dem aus dem Zeemaneffekt folgenden Werte von e/m. Berechnet man nämlich e/m umgekehrt aus dem erfahrungsmäßigen Werte jenes Dispersionsfaktors, so ergibt sich im Durchschnitt ein Wert von e/m, der um 25 Proz. kleiner ist als der Kathodenstrahlwert. (Näheres in § 1.)

Diesen scheinbaren Unterschied zwischen dem „*Dispersionswerte*" und dem „*Kathodenstrahlwerte*" von e/m aufzuklären, ist das eine Ziel von Kapitel I. Das andere besteht darin, aus der Valenzregel Schlüsse zu ziehen über den Aufbau der Molekeln aus Elektronen. Nachdem es nämlich Debye[1]) gelungen ist, die Dispersionsbeobachtungen am Wasserstoff aus dem Bohrschen Modell der Wasserstoffmolekel abzuleiten, habe ich in der Elster und Geitel-Festschrift die Dispersionsformel für eine allgemeinere Bohrsche Molekel berechnet, welche aus einem Ringe von beliebig vielen (μ) Elektronen besteht und aus postiven Kernen, die auf der Achse des Ringes angeordnet sind. Vergleicht man diese Dispersionsformel, in welche natürlich die Zahl μ eingeht, mit der erfahrungsmäßigen Dispersion, so erkennt man, daß die Zahl μ die Stelle der Valenz vertritt (§ 2). Man kommt also zu der (auch sonst vermuteten) elektronentheoretischen Bedeutung der Valenz: *Die Valenzsumme einer Molekel ist gleich der Anzahl ihrer äußeren, lose gebundenen Elektronen.* (Außer diesen äußeren haben wir bekanntlich noch innere, nahe an den Kernen gelegene und daher enge gebundene Elektronen anzunehmen, die aber zur Dispersion direkt nicht merklich beitragen.) Natürlich beschränkt sich unsere elektronentheoretische Deutung der Valenzsumme auf diejenigen Molekeln, auf welche die Drudesche Valenzregel Anwendung findet.

Von unserer allgemeinen Dispersionsformel kommen wir nun zur Drudeschen, wenn wir annehmen, daß die Elektronen unseres äußeren Ringes nach den verschiedenen Richtungen (senkrecht zur Ebene und in der Ebene des Ringes)

1) P. Debye, Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1914. p. 1.

gleich stark, also „*isotrop*" gebunden wären (§ 3), wie dies ja der von Lorentz und Drude zugrunde gelegten Vorstellung der quasielastischen Kraft entspricht. In Wirklichkeit sind in einem Bohrschen Modell die Bindungen durchaus verschieden, die Elektronen also „*anisotrop*" gelagert (§ 4). Dementsprechend zerlegt sich auch die von Drude vorausgesetzte einheitliche Eigenfrequenz in mehrere Frequenzen, je nach der Orientierung der verschiedenen möglichen Eigenschwingungen des Elektrons gegen die Ebene des Ringes. Mit Rücksicht auf diese Anisotropie der Bindungen tritt nun zu der Drudeschen Dispersionsformel ein Zahlenfaktor hinzu, welcher, im Durchschnitt für verschiedene μ genommen, gerade von solcher Größe ist, daß er die Dispersionsmessungen mit dem richtigen Werte von e/m, dem Kathodenstrahlwerte, verträglich macht (§ 5). *Es ist also nur nötig, die ersichtlich unzulängliche und provisorische Vorstellung der quasielastischen Kraft auf Grund des Bohrschen Modelles und der anisotropen Bindung seiner Elektronen zu vervollkommnen, um zugleich auch die Dispersionstheorie in der angegebenen Richtung zu korrigieren.*

Das Bohrsche Modell ist auf zwei Fundamenten aufgebaut, einem *quantentheoretischen* und einem *mechanisch-elektrischen*. In dem Ausdruck für die eigentliche Dispersion, d. h. die verhältnismäßige Abhängigkeit des Brechungsvermögens von der Wellenlänge, heben sich die quantentheoretischen Daten des Modelles in erster Näherung heraus; dementsprechend kommt das Resultat von Kapitel I auf eine *Bestätigung der gewöhnlichen Mechanik und Elektrodynamik für das Innere der Molekel heraus*. Dagegen hängt der Ausdruck für die Refraktion, d. h. für das Brechungsvermögen selbst, wesentlich von den quantentheoretischen Annahmen ab; die Refraktionsbeobachtungen geben also auch Aufschluß über die in den Molekeln herrschenden Quantenbeziehungen. In dieser Hinsicht liefert Kapitel III (§ 12) ein überraschendes Ergebnis. Während nämlich die Refraktion von Wasserstoff die einfache, von Bohr benutzte quantentheoretische Annahme bestätigt, müssen wir die Beobachtungen an Stickstoff und Sauerstoff so deuten, daß *diese Annahme nicht allgemein zu Recht besteht*.

Es gibt noch einen zweiten unabhängigen Weg (Kapitel II), der zur Konstitution der Molekeln führen kann und ebenfalls

schon von Drude beschritten ist: *die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge.* Ohne irgend eine neue Annahme einzuführen, läßt sich, wie bekannt, diese Erscheinung an die gewöhnliche Dispersionstheorie anschließen. Drude tut dies, indem er quasi-elastisch, also isotrop gebundene Elektronen voraussetzt (§ 6). Wir entwickeln die entsprechenden Formeln für einen Bohrschen, also anisotrop gebundenen Elektronenring (§§ 7 und 8). Dabei haben wir einen Vorgänger in Hrn. P. Scherrer[1]), in dessen Endformel aber wegen inkonsequenter Vernachlässigungen bei der Störungsrechnung ein Glied fehlt, wodurch die magnetische Drehung merklich zu klein ausfällt; der Gedankengang und die prinzipiellen Überlegungen sind jedoch in Ordnung. Im Grenzfalle gleicher, also isotroper Bindungen gehen unsere Formeln in die Drudeschen über (§ 9).

Vergleicht man die Drehung im Magnetfelde mit dem gewöhnlichen Brechungsvermögen desselben Gases, so kann man die Konstanten beider Erscheinungen so kombinieren, daß die Geschwindigkeit des Elektronenumlaufes herausfällt. Diese Kombination der Konstanten wird also von dem quantentheoretischen Einschlag des Modelles frei und hängt nur mehr von den mechanisch-elektrischen Grundlagen des Modelles ab. Indem man den theoretischen und empirischen Wert dieser Kombination in Übereinstimmung findet, *bestätigt man abermals die Gültigkeit der Mechanik und Elektrodynamik im Bohrmodelle* und überzeugt sich gleichzeitig, daß *dieselbe Umlaufgeschwindigkeit, die zur Darstellung des gewöhnlichen Brechungsvermögens erforderlich war, auch den Tatsachen der magnetischen Drehung entspricht.* Letzteres gilt nicht nur für Wasserstoff, sondern auch für Sauerstoff und Stickstoff; es war das eigentliche Ziel bei unserer Behandlung der magnetischen Drehung, die von der Bohrschen Annahme abweichenden Umlaufgeschwindigkeiten gerade bei den beiden letzteren Gasen auf einem neuen Wege zu prüfen, was zahlenmäßig in Kapitel III § 18 geschieht.

Die Behandlung der magnetischen Drehung führt zugleich zu einigen Schlüssen prinzipieller Art. Der eine betrifft die Einbeziehung des Magnetfeldes in den Quantenansatz.

---

1) P. Scherrer, Die Rotationsdispersion des Wasserstoffs. Diss. Göttingen 1916. Berichtigung hierzu: Gött. Nachr. 1917.

Es werden in dieser Hinsicht zwei verschiedene Möglichkeiten erörtert. Bei dem einen Verfahren (§ 7), das auch Hr. Scherrer anwendet, denkt man sich den ursprünglichen feldfreien Zustand der Molekel durch eine Quantenbedingung für das Impulsmoment bestimmt und läßt das Magnetfeld nach den gewöhnlichen Gesetzen der Mechanik und Elektrodynamik jenen Zustand allmählich abändern. Dadurch wird die Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen vergrößert, der Bahnradius bleibt erhalten. Der Endzustand der Molekel genügt dann (scheinbar) den Anforderungen der Quantentheorie nicht mehr; *jedenfalls erfüllt er nicht formal dieselbe Quantenbedingung wie der Anfangszustand.* Auf dem anderen Wege (§ 8) denken wir uns das Impulsmoment der feldfreien und der vom Felde veränderten Molekel durch denselben Quantenansatz festgelegt. In diesem Falle wird der Bahnradius durch das Magnetfeld verkleinert, die Umlaufgeschwindigkeit vergrößert. Während der Entstehung des Magnetfeldes, d. h. während des Überganges der Molekel aus ihrem Anfangszustande in ihren Endzustand, *ist dann die Gültigkeit der Mechanik und Elektrodynamik außer Kraft gesetzt.*

Die Erfahrung entscheidet eindeutig für den ersten Weg. Aber auch die genauere theoretische Betrachtung kann nur diesen ersten Weg gelten lassen. Wir weisen dies nach, indem wir uns teils auf die *Ehrenfestsche Adiabatenhypothese* berufen, die umgekehrt an unserem Beispiel eine schöne Bestätigung findet, teils indem wir uns auf den *Begriff der kanonischen Variabeln* stützen. Zu dem Umlaufwinkel $q = \varphi$ gehört nämlich als kanonisch zugeordnete Größe p im Magnetfelde nicht das Impulsmoment im elementaren Sinne, sondern ein durch das Magnetfeld abgeändertes Impulsmoment. Dieses letztere kanonische p, nicht das elementare Impulsmoment, ist durch die Quantenbedingung festgelegt oder, wie Ehrenfest sagt, adiabatisch-invariant. Auf diese Weise ergibt sich das Resultat unseres ersten Weges. Es wird also bei Befolgung dieses ersten Weges die Quantentheorie für den Endzustand der Molekel keineswegs aufgehoben. Nur die formale Quantenbedingung für das elementare Impulsmoment wird verletzt; *dagegen gilt auch im Endzustande der Molekel für die sinngemäße kanonische Verallgemeinerung des Impulsmomentes dieselbe Quantenbedingung wie für das Impulsmoment im feldfreien*

Zustande. Der Fehler unseres zweiten Weges besteht dementsprechend darin, daß das *elementare Impulsmoment* an Stelle *der kanonischen Größe p* dem Quantenansatz unterworfen wird.

Man gewinnt von hier aus den erfreulichen Ausblick, daß der Widerspruch zwischen Mechanik und Quantentheorie kein so schroffer ist, als es bisher den Anschein hatte: bei richtiger Anwendung der Quantentheorie (erster Weg) bleiben die mechanischen Grundsätze für den Übergang der Molekel aus dem Anfangs- in den Endzustand erhalten. Sie werden außer Kraft gesetzt (zweiter Weg) nur dann, wenn man die Quantentheorie falsch handhabt. Die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese zeigt die Linie an, auf der sich Mechanik und Quantentheorie zusammenfinden können.

Auf dieser Linie löst sich auch ein methodischer Widerspruch, der bisher die Quantentheorie der Atome einerseits, die der Molekeln andererseits zu entstellen schien. Bei den Elektronenbahnen im Atom (Spektraltheorie) sagt man: *die Bahnen sind quantenmäßig bestimmt und strahlen nicht.* Bei den Elektronenbewegungen in der Molekel (Dispersionstheorie) dagegen verlangt man: *Nur die natürlichen Bahnen der Elektronen sind quantenmäßig bestimmt und strahlen nicht; die durch die Lichtwelle abgeänderten Bahnen dagegen richten sich nach den Gesetzen der Mechanik und geben Ausstrahlung* (da sie anderenfalls auch keinen Brechungsindex geben würden). Liegt in dieser verschiedenartigen Behandlung von Atom und Molekel ein Widerspruch? Wir behaupten: Nein!

Zunächst ist zu betonen, daß die Lichtschwingung ein *unendlich langsamer Vorgang* ist, gemessen an der Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen. Die Veränderungen, die solche Vorgänge an den Bahnelementen der umlaufenden Elektronen bewirken, fallen unter den Begriff der adiabatisch reversiblen Zustandsänderungen. Die Adiabatenhypothese versichert uns, daß solche Zustandsänderungen, nach den Regeln der Mechanik berechnet, aus gequantelten Bahnen wieder richtig gequantelte Bahnen entstehen lassen. Wenn wir also in der Dispersionstheorie die Bahnänderungen durch die Lichtwelle mechanisch berechnen, setzen wir uns nicht in Widerspruch mit der Quantentheorie.

Die Sache liegt ganz ebenso wie im Falle des homogenen Magnetfeldes. Dort rechneten wir (auf dem ersten Wege)

die Einwirkung des Magnetfeldes nach den Gesetzen der Mechanik aus und überzeugten uns — im Vertrauen auf die Adiabatenhypothese oder nach den Regeln der kanonischen Zustandsvariabeln —, daß auf diese Weise ein Endzustand der Molekel entsteht, welcher derselben (sinngemäß abgeänderten) Quantenbedingung genügt wie der Anfangszustand. Wir können dasselbe auch bei der Einwirkung des elektrischen Feldes der Lichtwelle nachweisen.

Auch dieses ist für die Abmessungen der Molekel ein homogenes Feld; seine Intensität wird als kleine Größe erster Ordnung angesehen. Betrachten wir nun das Impulsmoment des Umlaufes an einem Elektronenring. Die Einzelkräfte, die das homogene elektrische Feld auf die einzelnen Ringelektronen ausübt, haben eine Resultierende durch den Schwerpunkt des deformierten Ringes. Dieser Schwerpunkt fällt mit dem Mittelpunkte des undeformierten Ringes bis auf Größen erster Ordnung zusammen. Das Moment der Resultierenden wird also eine Größe zweiter Ordnung. Daher bleibt das Impulsmoment des ganzen Elektronenringes unter dem Einfluß des elektrischen Feldes konstant, während natürlich dasjenige des einzelnen Elektrons je nach seiner Lage im Ringe abgeändert wird.

Wir brauchen für diese Betrachtung nicht einmal einen Ring von Elektronen vorauszusetzen. Sie gilt auch für das einzelne Elektron, im Zeitmittel, wegen der schnellen Umlaufgeschwindigkeit desselben. Auch die Wirkung des elektrischen Feldes auf das einzelne Elektron kann als Wirkung auf einen Ring kontinuierlich verteilter Ladung, den Bahnring des Elektrons, berechnet werden. Übrigens brauchen wir uns vom Standpunkt der Adiabaten-Hypothese um die richtige Quantenbedingung für das abgeänderte Impulsmoment nicht zu sorgen, sondern können sie der Mechanik überlassen.

Nun fällt aber auch die andere der oben vermerkten Schwierigkeiten wenigstens teilweise fort, diejenige betreffend die *Ausstrahlung von Atom und Molekel*. Wir müssen uns nur vor Augen halten, daß die erzwungenen Schwingungen der Elektronen beim Dispersionsvorgang aus aneinander gereihten statischen Bahnen mit wenig veränderten (um nicht zu sagen kontinuierlich veränderten) Parametern bestehen. Wie bei einer idealen Dampfmaschine jeder Hin- und Hergang des Kolbens als eine Folge von thermischen Gleichgewichten aufgefaßt

werden muß, so auch das Mitschwingen unserer Molekel im Lichte. Ein einmaliger Wechsel des elektrischen Feldes entspricht dem Hin- und Hergange des Kolbens, der jeweilige statische Bewegungszustand des Elektronenringes dem jeweiligen thermischen Zustande des Dampfes. Das Mitschwingen der Elektronen mit der äußeren Kraft ist aufzufassen als eine langsame Änderung der Bahnelemente des Elektronenumlaufes.

Was ergibt nun diese Auffassung für die Ausstrahlung? Die statische Bahn strahlt nicht, weder die feldfreie noch die durch das elektrische Feld der Lichtwelle abgeänderte. Aber der Übergang aus einer in eine andere statische Bahn strahlt. Es macht dabei nichts aus, ob dieser Übergang zwischen nahe benachbarten Bahnen stattfindet, wie in unserem Falle, oder zwischen diskontinuierlich verschiedenen, wie bei der Entstehung der Spektren. Man sieht: *die Gegensätzlichkeit in der Behandlung der Ausstrahlung bei Atom und Molekül löst sich auf.*

Ein Unterschied bleibt allerdings bestehen: beim Atom wird durch die verfügbare Energiedifferenz die Frequenz der Ausstrahlung bestimmt; bei der Molekel ist die Frequenz bereits durch die auffallende Lichtwelle gegeben. Ferner: beim Atom soll Ausstrahlung nur beim Übergange von höherer zu niederer Energie stattfinden, bei der Molekel soll jeder mit Beschleunigung verbundene Übergang (auch ein Übergang von zunehmender Energie) strahlen, damit im Sinne unserer Dispersionsrechnungen Ausstrahlung und Brechungsindex nach den klassischen Regeln durch das wechselnde elektrische Moment der Molekel berechnet werden können. Man wird, um die Bedürfnisse der Dispersion zu decken, am einfachsten die Adiabatenhypothese in dem folgenden erweiterten Sinne anwenden: bei den unendlich langsamen (reversiblen) Vorgängen hat man nicht nur die Bahn nach den Regeln der Mechanik zu rechnen, sondern auch die Ausstrahlung. Wie dieses erweiterte Postulat mit dem Bohrschen Energieansatz zu vereinbaren ist, müßte eine genauere Untersuchung im Sinne der Einsteinschen Nadelstrahlung[1]) zeigen.

Die letzte Betrachtung weist auf gewisse Grenzen hin, die unserer Dispersionsbehandlung gesteckt sind. Die Schwingungsdauer des Lichtes muß groß sein gegen die Umlaufzeit der Elektronen, damit die durch das Licht bewirkten Zustands-

1) A. Einstein, D. Physik. Ges. 18. p. 318. 1916.

änderungen als reversibel behandelt werden dürfen. Bei Resonanzfällen in der Nähe der ultravioletten Absorptionsstreifen ist das nicht mehr der Fall. Hier haben wir also kein Recht, das Mitschwingen mechanisch zu rechnen. Wir können nicht mehr unterscheiden zwischen dem quantentheoretisch zu bestimmenden Bewegungszustand und der sich überlagernden, mechanisch zu berechnenden Änderung desselben. Vielmehr werden alsdann Umlaufs- und Schwingungsbewegung zusammen durch die Quantentheorie irgendwie bestimmt sein müssen.

Auch zur Auffassung des *Paramagnetismus* liefert unsere Behandlung der magnetischen Drehung einen prinzipiellen Beitrag. Während nämlich bei den übrigen von uns betrachteten Gasen alle Orientierungen der Molekel im Raume als gleich wahrscheinlich gelten dürfen, können wir beim Sauerstoff eine Einstellung der Molekelachse im Magnetfelde vermuten, wodurch die Mittelbildung über das elektrische Moment der Molekel merklich beeinflußt wird.

Die betreffende Rechnung wird im letzten Paragraphen von Kapitel II durchgeführt, unter Zugrundelegung der von Curie gefundenen Suszeptibilität von O_2. Dabei ergibt sich eine völlig unzulässige Größe des Einstellungseffektes: die paramagnetische Korrektion der magnetischen Drehung würde den Betrag der ohne Einstellung berechneten Drehung um eine Zehnerpotenz übertreffen. Man muß daraus schließen, daß *die paramagnetische Einstellung nicht die Molekelachse, sondern die Achsen der Kerne* (die Normalen zur Bahn der Kernelektronen), *nicht die ganze Molekel, sondern nur die Atome in der Molekel betrifft.* Die tatsächliche Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität bleibt mit dieser Vorstellung vereinbar. Auch das Wiedemannsche Gesetz, nach dem der Paramagnetismus eine additive Atomeigenschaft ist, spricht für diese Vorstellung.

Im Eingange von Kapitel III zählen wir die Bedenken auf, die sich gegen das Modell der Wasserstoffmolekel und ebenso gegen das der Sauerstoff- und Stickstoffmolekel erheben (§ 11). Trotzdem sprechen die Übereinstimmungen im Gebiete der Dispersion (§ 12) und magnetischen Drehung (§ 13) eine beredte Sprache zugunsten dieser Modelle. Die genauere Betrachtung der tatsächlichen Umlaufgeschwindigkeiten bei Sauerstoff und Stickstoff, wie sie sich aus Brechung

und magnetischer Drehung ergeben, führt auf eine empirische Quantenregel, die auch den Fall der Wasserstoffmolekel mit umfaßt (§ 14). Anhangweise wird auf die mutmaßliche und ungefähre Konstitution von Helium aus seiner Dispersion geschlossen (§ 15).

Ich habe in dieser ganzen Abhandlung darauf verzichtet, die benutzten Formeln mathematisch abzuleiten. Es sei vielmehr, was die gewöhnliche Dispersion betrifft, auf meinen Beitrag zur Elster und Geitel-Festschrift, was die magnetische Drehung betrifft, auf eine demnächst erscheinende Dissertation von F. Pauer verwiesen. In einer späteren Annalenarbeit beabsichtige ich, meine Darstellung aus der Elster und Geitel-Festschrift zu vereinfachen und zugleich wesentlich zu erweitern.

Kap. I. Die Dispersion in einem Gase Bohrscher Molekeln.

§ 1. Erinnerung an die Drudesche Dispersionstheorie.

Bedeutet s die Frequenz des auffallenden Lichtes ($= 2\pi c/\lambda$), s_0 die ultraviolette Eigenfrequenz der Elektronen eines Gases, $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Dispersionselektronen pro Kubikzentimeter, so ergibt sich nach Drude[1]) für den Brechungsindex n bei Vorhandensein nur einer Eigenfrequenz und bei hinreichend starker Verdünnung (n wenig von 1 verschieden) unter Vernachlässigung der Dämpfung:

$$(1) \qquad n^2 - 1 = \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2/m}{s_0^2 - s^2} = \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m s_0^2}\left(1 + \frac{s^2}{s_0^2} + \ldots\right).$$

Vergleichen wir dies mit der empirischen Dispersionsformel von Cauchy

$$n - 1 = A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right),$$

für die wir auch schreiben können

$$(2) \qquad n^2 - 1 = 2A\left(1 + \frac{B s^2}{(2\pi c)^2}\right),$$

so ergibt sich

$$A = \frac{2\pi \mathfrak{N} e^2}{m s_0^2}, \quad B = \frac{(2\pi c)^2}{s_0^2},$$

also B/A von s_0 unabhängig:

$$(3) \qquad \frac{B}{A} = \frac{2\pi e^2 m}{\mathfrak{N} e^2}.$$

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl. p. 372, Gl. (19) [mit den vorangehenden Erklärungen in den Gl. (17), (15'), (12)].

Drude fand nun, daß B/A bei den einfacheren, ungefärbten, vollkommenen Gasen der Valenz v umgekehrt proportional, also vB/A eine universelle Größe ist, und deutete diesen Befund dahin, daß die Anzahl der Dispersionselektronen pro Molekel gleich der Valenz v sei; also $\mathfrak{N} = Nv$ und

$$(4) \qquad v\frac{B}{A} = \frac{2\pi c^2 m}{Ne^2},$$

wo N die Anzahl der Molekeln pro Kubikzentimeter (Loschmidtsche Zahl) ist.

Als *empirischer Durchschnittswert* dieser universellen Größe vB/A ergibt sich nach einer Zusammenstellung bei Loria[1])

$$(5) \qquad \left(v\frac{B}{A}\right)_{\text{emp.}} = 10{,}9 \cdot 10^{-7}.$$

Der Durchschnitt ist genommen über die Gase H_2, O_2, N_2, CO_2, SO_2, H_2S, CO, für welche v beziehungsweise gleich 2, 4, 6, 8, 8, 6, 4 gesetzt wird. Der Drudesche *theoretische Wert* (4) dagegen, mit dem elektrostatisch gemessenen Kathodenstrahlwerte $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7 \cdot c$ und dem aus dem elektrochemischen Äquivalent folgenden elektrostatischen Werte $Ne = 1{,}29 \cdot 10^{10}$ berechnet, ist

$$(6) \qquad \left(v\frac{B}{A}\right)_{\text{theor.}} = \frac{2\pi c}{1{,}29 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}77 \cdot 10^7} = 8{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

Während also die Größenordnung stimmt, weicht der Zahlenwert merklich von dem empirischen ab.

Drude hielt an der Richtigkeit der Gl. (4) fest und schob die Schuld für die Unstimmigkeit auf den Wert von e/m, der bei den Dispersionselektronen eventuell anders sein sollte wie bei den Kathodenstrahlelektronen. Als dispersionstheoretischer Durchschnittswert von e/m ergibt sich so durch Gleichsetzen von (4) und (5)

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi c^2}{1{,}29 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}9 \cdot 10^{-7}} = 1{,}34 \cdot 10^7 c.$$

Wir werden umgekehrt die Schuld auf die Formel (4) schieben und, indem wir diese verbessern, mit dem richtigen Kathodenstrahlwerte von $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7\, c$ zu dem empirischen Werte (5) gelangen.

1) St. Loria, Die Lichtbrechung in Gasen, p. 82, Sammlung Vieweg, Braunschweig 1914. Bei Loria ist angegeben $vA = 16{,}3 \cdot 10^{-7}$, wo A mit Rücksicht auf die Lorentz-Lorenzsche Formel eingeführt ist und die Bedeutung $\frac{1}{3} B/A$ hat.

§ 2. Die Dispersionsformel für einen Elektronenring.

Wir legen folgendes Modell zugrunde: μ Elektronen kreisen auf einem Ringe vom Radius a mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Den Zentrifugalkräften und den Coulombschen Abstoßungen im Ringe wird das Gleichgewicht gehalten durch zwei Kerne im Abstande $a/\sqrt{8}$ von der Ebene des Ringes, deren jeder die Ladung $+\mu e/2$ trägt und an denen die Coulombschen Anziehungen und Abstoßungen ebenfalls im Gleichgewicht stehen. Wir verteilen N solcher Modelle regellos in der Volumeinheit und lassen auf das so entstehende Gas eine Lichtwelle von der Frequenz s auffallen. Die durch letztere erzwungenen Elektronenschwingungen berechnen wir nach den Regeln der klassischen Mechanik und Elektrodynamik, bilden das periodisch wechselnde elektrische Moment der Volumeinheit und gehen von diesem zu dem Brechungsindex n über. Die Dispersionsformel lautet dann nach der Elster und Geitel-Festschrift [Gl. (50)]

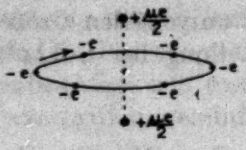


Fig. 1.

$$(7)\qquad n^2 - 1 = -\frac{4\pi}{3}\,\frac{N\mu e^2}{m\omega^2}\left\{f\left(\frac{s}{\omega}\right) + f\left(-\frac{s}{\omega}\right) + \varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right\}$$

mit den Abkürzungen [ebenda Gl. (51) und (49a)]

$$(8)\qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2 - \frac{\varrho}{2}(\sigma - \tau - \sigma')}{(x-1)^4 + c_1(x-1)^3 + c_2(x-1) + c_3}, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - \varrho\sigma'}\,, \\ c_1 = -2 - \dfrac{\varrho}{2}(\sigma - \tau - 2\sigma'), \quad c_2 = -\varrho(\sigma - \tau), \\ c_3 = -\dfrac{\varrho}{2}(2\sigma - \tau) - \left(\dfrac{\varrho}{4}\right)^2[\sigma^2 + 4\sigma'(2\sigma - \tau)]. \end{cases}$$

Die unbenannten Größen ϱ, σ, τ, σ', welche das Molekül in dispersionstheoretischer Hinsicht festlegen, haben folgende Bedeutung [Elster und Geitel-Festschrift Gl. (45), (43), (43a):

$$(9)\qquad \varrho = \frac{e^2}{m a^3 \omega^2}, \quad \sigma = \sum_1^{\mu-1}{}^{(\varkappa)} \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{\mu}}, \quad \tau = \sum_1^{\mu-1}{}^{(\varkappa)} \sin\frac{\pi k}{\mu} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\mu}\,.$$

In dem vorstehend abgebildeten Falle von zwei auf der Achse symmetrisch gelegenen Kernen ist ferner [Elster und Geitel-Festschrift Gl. (44a) und (56)]

$$(10)\qquad \sigma' = 3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{32}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{2} - \sigma\right).$$

Dieser Wert von ϱ folgt aus der Forderung, daß bei der stationären Bewegung die radialen Kräfte an den Elektronen im Gleichgewichte stehen müssen, ebenso wie der Wert $a/\sqrt{8}$ für den Abstand der Kerne von dem Ringe aus der Bedingung für das axiale Gleichgewicht der Kräfte an den Kernen folgt. Die Größen $1/\varrho$ und $\sigma/4$ kommen bereits in der Bohrschen Theorie unter der Bezeichnung F und s vor.

Da die Klammer in (7) rational von der Größe $\xi = (s/\omega)^2$ abhängt, die im ganzen sichtbaren Spektrum nur kleine Beträge erreicht, entwickeln wir nach ihr und schreiben

$$(11) \quad G(\xi) = f\left(\frac{s}{\omega}\right) + f\left(-\frac{s}{\omega}\right) + \varphi\left(\frac{s}{\omega}\right) = G_0 + \xi G_0' + \dots$$

Durch Vergleich von (7) und (2) ergeben sich die Konstanten der Cauchyschen Dispersionsformel für unsere Molekel

$$(12) \qquad A = -\frac{2\pi}{3}\frac{N\mu e^2}{m\omega^2} G_0, \quad B = \frac{(2\pi c)^2}{\omega^2}\frac{G_0'}{G_0},$$

also

$$\frac{B}{A} = -\frac{6\pi c^2 m}{N\mu e^2}\frac{G_0'}{G_0^2}$$

und

$$(12a) \qquad \mu\frac{B}{A} = \frac{2\pi c^2 m}{Ne^2}\Phi$$

mit der Abkürzung

$$(12b) \qquad \Phi = -\frac{3G_0'}{G_0^2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung (12a) unterscheidet sich von der rechten Seite von (4) nur durch den Faktor Φ, welcher also den Einfluß des genaueren Molekelaufbaues wiedergibt. Wenn wir zeigen können, daß dieser Faktor näherungsweise von μ unabhängig ist, so ist dadurch die Drudesche Valenzregel vom Standpunkte der Bohrschen Theorie erklärt; zugleich ist für den Elektronenaufbau der Molekeln der wichtige, wenn auch fraglos im einzelnen einzuschränkende Gesichtspunkt gewonnen: $\mu = v$. *Der äußere Ring einer Bohrschen Molekel besteht aus so vielen Elektronen, als die Valenzsumme v angibt.*

§ 8. Annahme isotroper Bindungen.

Indem wir die Nenner von f und φ gleich Null setzen, erhalten wir die Eigenfrequenzen unserer Molekel, sämtlich in Teilen der Winkelgeschwindigkeit ω ausgedrückt. Zwar sind wegen

der Zyklizität der Ringanordnung entsprechende Eigenschwingungen der verschiedenen Elektronen einander gleich; aber für das einzelne Elektron ist die axiale, die radiale und azimutale Eigenschwingung verschieden. Die axiale Eigenfrequenz wird durch den Nenner von φ gegeben; der zu ihr gehörige Wert von ξ werde mit ξ_0 bezeichnet, wobei also $\xi_0 = \varrho\sigma'$ ist. Entsprechend möge ξ_h für $h = 1, 2, 3, 4$ irgend eine radiale oder azimutale Eigenfrequenz bezeichnen. Indem wir uns G in Partialbrüche zerlegt denken, können wir schreiben

$$(13)\quad G = F + \varphi,\ F(\xi) = f(+x) + f(-x) = \sum \frac{A_h}{\xi - \xi_h},\ \varphi(\xi) = \frac{1}{\xi - \xi_0}.$$

Die genauere Ausrechnung der Konstanten A_h (Residuum des Poles $\xi = \xi_h$) verlangt näheres Eingehen auf die Bauart von F. Ohne weiteres läßt sich nur zeigen, daß

$$(14)\quad \sum A_h = 2$$

ist. Man erhält nämlich nach bekannten funktionentheoretischen Sätzen die Summe der Residuen einer rationalen, im Unendlichen verschwindenden Funktion dadurch, daß man sie über einen hinreichend großen Kreis oder, allgemeiner, über eine im Unendlichen gelegene geschlossene Kurve in der komplexen Ebene integriert, also

$$\sum A_h = \frac{1}{2\pi i} \oint F\, d\xi.$$

Hier wird F nur für sehr große Werte von ξ gebraucht. Für die entsprechend großen Werte von x ist nach (8)

$$f(x) = f(-x) = \frac{1}{x^2},\quad \text{also}\quad F = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\xi}$$

und

$$\oint F\, d\xi = 2 \oint \frac{d\xi}{\xi} = 4\pi i.$$

Unsere Behauptung (14) ist somit bewiesen.

Aus (13) berechnen wir noch die in (11) benutzten Koeffizienten

$$(15)\quad G_0 = -\sum \frac{A_h}{\xi_h} - \frac{1}{\xi_0},\quad G_0' = -\sum \frac{A_h}{\xi_h^2} - \frac{1}{\xi_0^2}.$$

Wir wollen nun die (durchaus unzutreffende) Annahme machen, als ob die ξ_h unter sich und mit ξ_0 gleich, die Bindungen des Elektrons also isotrop wären. Unter dieser Annahme würde sich aus (15) und (14) ergeben

$$G_0 = -\frac{\sum A_s + 1}{\xi_0} = -\frac{3}{\xi_0}, \quad G_0' = -\frac{\sum A_s + 1}{\xi_0^2} = -\frac{3}{\xi_0^2},$$

also würde nach (12b) sein

$$\Phi = -\frac{3\,G_0'}{G_0^2} = 1. \tag{16}$$

Damit würde unsere Gl. (12a) in die Drudesche Valenzregel (4) übergehen. Diese wäre in Strenge, und zwar mit dem Drudeschen Zahlenfaktor, richtig. *Die Drudesche Theorie charakterisiert sich hiernach von unserem Standpunkte aus als ein möglicher, aber unwirklicher Spezialfall, nämlich als der der Isotropie.*

§ 4. Näherungen bei anisotroper Bindung.

Wir ersetzen zunächst die in f und φ vorkommenden transzendenten Größen σ und τ durch ihre Näherungen für große Werte von μ. Aus (9) folgt direkt durch Potenzentwicklung

$$\tau = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\mu} = \frac{2\mu}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{12\mu^2} + \ldots\right) = \frac{2\mu}{\pi}, \tag{17}$$

da das Korrektionsglied schon für $\mu = 4$ nur 5 Proz. des ganzen Wertes beträgt. Sodann ersetzen wir in σ die Summe durch ein Integral:

$$\sigma = \frac{\mu}{\pi}\int_{\pi/\mu}^{\pi(1-1/\mu)} \frac{dx}{\sin x} = \frac{\mu}{\pi}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{\pi/\mu}^{\pi(1-1/\mu)} = \frac{2\mu}{\pi}\log\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\mu} = \frac{2\mu}{\pi}\log\frac{2\mu}{\pi}.$$

Um die Genauigkeit dieser Näherung auch für mäßige Werte von μ zu übersehen, schreiben wir etwas allgemeiner

$$\sigma = \frac{2\mu}{\pi}(\log\mu + \alpha)$$

und bestimmen α dadurch, daß wir aus den genauen Werten von σ, die bei Bohr tabelliert[1]) sind, die Differenz zwischen $\pi\sigma/2\mu$ und $\log\mu$ berechnen. Diese Differenz beträgt zwischen $\mu = 4$ und $\mu = 8$ durchschnittlich 0,12, mit einem Fehler, der kleiner als 3 Proz. ist. Wir würden daher am besten $\alpha = 0{,}12$ wählen. Für die weitere Rechnung ist es indessen etwas bequemer, $\alpha = 0{,}08$ zu nehmen, wobei der verhältnis-

1) M. Bohr, Phil. Mag. Sept. 1913. p. 482.

mäßige Fehler in σ von $\mu = 4$ ab ebenfalls noch unterhalb 5 Proz. bleibt. Wir setzen also

$$(18) \qquad \sigma = \frac{2\mu}{\pi}(L + 0{,}08), \quad L = \log \mu .$$

Aus (10) folgt dann

$$(19) \quad \sigma' = 0{,}1625\,\mu, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mu}{2\pi}(4{,}08 - L - 0{,}08) = \frac{\mu}{2\pi}(4 - L),$$

wobei sich die vorherige Wahl von a als bequem erweist.

Hiernach hebt sich in den Produkten $\varrho\,\sigma$, $\varrho\,\tau$, $\varrho\,\sigma'$ die Größe μ im wesentlichen heraus und kommt nur noch in L, also logarithmisch, vor. Z. B. wird nach (8), (17), 18) und (19)

$$\varphi(0) = -\frac{1}{\varrho\,\sigma'} = -\,0{,}98\,(4 - L),$$

$$\frac{\varrho}{2}(\sigma - \tau - \sigma') = \frac{2\,(L - 1{,}17)}{4 - L}, \quad c_1 = \frac{-\,5{,}14}{4 - L},$$

$$c_2 = -\,\frac{4\,L - 3{,}68}{4 - L}, \quad c_3 = -\,\frac{-\,3\,L^2 + 19{,}88\,L - 7{,}58}{(4 - L)^2},$$

$$f(0) = \frac{4\,(4 - L) - 2\,(L - 1{,}17)}{(4 - L)(1 + c_1 - c_2 + c_3)} = -\,\frac{(18{,}34 - 6\,L)(4 - L)}{3{,}06\,L + 11{,}7}.$$

Unser Ziel ist die Berechnung der beiden Koeffizienten G_0 und G_0', deren Verhältnis in (12) vorkommt. Von diesen ist G_0 bereits bekannt; es ist nämlich nach (11)

$$G_0 = 2\,f(0) + \varphi(0) = -\,(4 - L)\,\frac{48{,}13 - 9\,L}{3{,}06\,L + 11{,}7}.$$

Umständlicher ist die Berechnung von

$$G_0' = f''(0) + \tfrac{1}{2}\,\varphi''(0).$$

Zunächst ergibt sich nach (8) unmittelbar

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi''(0) = -\,\frac{1}{(\varrho\,\sigma')^2} = -\,0{,}96\,(4 - L)^2.$$

Die Berechnung von $f''(0)$ liefert auf Grund der vorstehenden Werte von c_1, c_2, c_3 usw. im Endresultat

$$f''(0) = -\,(4 - L)^2\,\frac{220\,L^3 - 506\,L^2 - 3332\,L + 9664}{(3{,}06\,L + 11{,}7)^3}.$$

Also wird

$$G_0' = -\,(4 - L)^2\,\frac{220\,L^3 - 506\,L^2 - 3332\,L + 9664 + 0{,}96\,(3{,}06\,L + 11{,}7)^3}{(3{,}06\,L + 11{,}7)^3}$$

und

$$\frac{G_0'}{G_0^3} = -\frac{247\,L^3 - 192\,L^2 - 2117\,L + 11201}{(3{,}06\,L + 11{,}7)(48{,}13 - 9\,L)^2},$$

oder hinreichend genau

$$\Phi = -3\frac{G_0'}{G_0^3} = 3\frac{L^3 - 0{,}776\,L^2 - 8{,}56\,L + 45{,}5}{L^3 - 6{,}829\,L^2 - 12{,}19\,L + 109{,}3}. \tag{20}$$

Der Verlauf von Φ ist in Fig. 2 dargestellt, und zwar sowohl in der Skala der $L = \log \mu$ wie in der der μ selbst. Die Figur bestätigt, daß Φ in dem uns interessierenden Gebiete $\mu < 8$ nur langsam veränderlich ist; besonders für die kleinen Werte von L ist der Verlauf von Φ sehr flach. Als Mittelwert von Φ wählen wir (nicht ohne einige Willkür) den Anfangswert, der sich für $L = 1$, also $\mu = 2{,}78$ wiederfindet. Er ist durch die strichpunktierte Gerade in der Figur hervorgehoben und beträgt

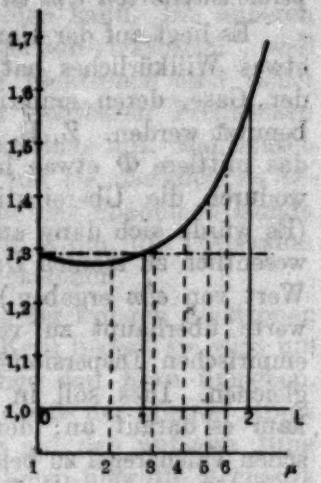


Fig. 2.

$$\Phi = 1{,}29. \tag{21}$$

§ 5. Auflösung des Widerspruches zwischen dem Dispersionswert und dem Kathodenstrahlwert von e/m.

Die ungefähre Konstanz von Φ besagt nach Gl. (12), daß auch die Größe $\mu B/A$ von μ annähernd unabhängig ist. *Sie erklärt daher die Drudesche Valenzregel vom Standpunkte Bohrscher Elektronenringe.*

Zugleich liefert uns der Mittelwert von Φ nach Gl. (12) denjenigen Faktor, mit dem wir den theoretischen Wert von $\mu B/A$ in der Drudeschen Theorie [Gl. (4)] zu multiplizieren haben, um einen Mittelwert für den wirklichen Wert von $\mu B/A$ zu erhalten. Es ergibt sich auf diese Weise nach (21) und (6)

$$1{,}29 \,.\, 8{,}3 \,.\, 10^{-7} = 10{,}7 \,.\, 10^{-7},$$

also fast genau der empirische Wert von $\mu B/A$ aus Gl. (5). Umgekehrt würde sich natürlich aus diesem empirischen

Mittelwert von $\mu B/A$ durch Division mit dem Werte $\Phi = 1{,}29$ der richtige theoretische Wert von

$$\frac{2\pi c^2 m}{N e^2}$$

und damit zugleich der richtige Wert von e/m ergeben. *Die Diskrepanz zwischen dem Kathodenstrahlwerte und dem Dispersionswerte von e/m ist damit beseitigt.*

Es liegt auf der Hand, daß die Bildung von Mittelwerten etwas Willkürliches hat, sowohl bei Φ als bei der Auswahl der Gase, deren empirische Dispersionen bei der Mittelung benutzt werden. Z. B. könnten wir in Fig. 2 die Gerade für das mittlere Φ etwas höher legen, als in Fig. 2 geschehen, wodurch die Übereinstimmung etwas verschlechtert würde. (Es würde sich dann aus den Dispersionsmessungen statt des wesentlich zu kleinen Drudeschen Wertes ein etwas zu hoher Wert von e/m ergeben.) Richtiger wird es sein, auf Mittelwerte überhaupt zu verzichten und die theoretischen und empirischen Dispersionen der einzelnen Gase direkt zu vergleichen. Dies soll in Kapitel III geschehen. Gegenwärtig kam es darauf an, den allgemeinen Ursprung der Drudeschen Valenzregel zu beleuchten und den Sinn der Abweichung zu erklären, den die Drudesche Theorie vermöge ihrer Isotropieannahme von der feineren Theorie und von der Erfahrung zeigen muß; dies ließ sich am besten durch Betrachtung des allgemeinen Elektronenringes erreichen.

Natürlich ist die Zahl μ der äußeren Elektronen (außer bei H_2) nicht identisch mit der Gesamtzahl der Elektronen, welche ja für das einzelne Atom gleich seiner Ordnungszahl im natürlichen System der Elemente ist. Z. B. müssen bei O_2 bzw. N_2 außer den 4 bzw. 6 äußeren Elektronen noch je 6 bzw. 4 innere Elektronen in unmittelbarer Nähe der beiden Atomkerne vorhanden sein. Wir fragen nach dem Einfluß dieser inneren Elektronen auf die Dispersion und werden dabei einen direkten und indirekten Einfluß zu unterscheiden haben. In direkter Weise könnten die inneren Elektronen die Dispersionsformel dadurch beeinflussen, daß sie, durch die auffallende Lichtwelle selbst in Schwingungen versetzt, zum elektrischen Moment der Molekel beitragen. In indirekter Weise würden sich die inneren Elektronen in der Bewegung der äußeren Ringelektronen dadurch geltend machen, daß

diese nicht mehr in einem reinen Coulombschen Felde schwingen. Während wir nämlich bisher z. B. bei Sauerstoff mit „Ersatzkernen" von je zwei positiven Ladungen rechneten, sollten wir diese genauer als Systeme von 8—6 Ladungseinheiten behandeln, welche nicht mehr genau nach dem Coulombschen Gesetze wirken würden.

Es ist leicht zu sehen, daß die direkte Wirkung der inneren Elektronen vernachlässigt werden kann. Die äußeren Elektronen wirken deshalb als „Dispersionselektronen", weil sie lose gebunden sind. Die inneren Elektronen sind sicher sehr viel fester gebunden. Bei den sichtbaren Frequenzen schwingen sie nur mit ganz kleiner Amplitude mit. Man müßte schon Röntgenfrequenzen anwenden, um sie merklich zu erregen. Dementsprechend gibt das Lauesche Phänomen Kunde von der Gesamtzahl der Elektronen im Atom, die Dispersion nur von der Zahl μ der Dispersionselektronen.

Die Größe der indirekten Wirkung der inneren Elektronen hängt davon ab, wie nahe diese dem Kern liegen; sie wird um so kleiner, je enger die inneren Ringe den Kern umgeben. Ich habe an Beispielen versucht, die Größe der inneren Ringe und die daraus folgende Einwirkung auf den äußeren Ring zu berechnen, unter einfachsten Annahmen über die Mechanik und Quantelung der inneren Ringe; die so erhaltenen Korrektionen haben die Übereinstimmung der Dispersionsformel mit der Erfahrung merklich verschlechtert. Ich muß daraus schließen, daß die inneren Ringe viel enger um den Kern gezogen sind, als mechanisch zu erwarten, und daß die Vorstellung von reinen Ersatzkernen den Zwecken der Dispersionstheorie zurzeit am besten entspricht.

Wir haben in diesem ersten Kapitel nur von dem Verhältnis B/A der Koeffizienten der Dispersionsformel gesprochen. Dieses ist nach den Gl. (12) und (12a) von der Umlaufgeschwindigkeit ω unabhängig. ω wird zugleich mit der Größe der Molekel (dem Radius a des Elektronenringes) durch eine Quantenbedingung bestimmt. Wie in der Einleitung betont, sind daher die Betrachtungen dieses ersten Kapitels von dem quantentheoretischen Einschlag des Bohrmodelles unabhängig. Die gefundenen Übereinstimmungen bestätigen lediglich *die Gültigkeit der Mechanik und Elektrodynamik im Inneren der Molekel.*

Darüber hinaus geben die Dispersionsbeobachtungen Aufschluß über die *in der Molekel herrschenden Quantenbeziehungen*, wenn man den Koeffizienten A der Dispersionsformel für sich in Betracht zieht. Man entnimmt nämlich aus Gl. (12) den Wert von ω, ausgedrückt durch A:

$$\omega^2 = \frac{2\pi\mu}{3} N e \frac{e}{m} \frac{(-2f_0 - \varphi_0)}{A} \tag{22}$$

und zugleich durch Vermittlung der mechanisch bekannten Größe ϱ [Gl. (9) und (10)] die Größe a des Elektronenringes

$$a^3 = \frac{e^2}{m\varrho\omega^2}. \tag{23}$$

Setzen wir hier den empirischen Wert von A ein, so erhalten wir die „empirischen" oder „Dispersionswerte" für ω und a und können aus ihnen den Dispersionswert

$$p_{\text{Disp.}} = (m a^2 \omega)_{\text{Disp.}}$$

des Impulsmomentes eines umlaufenden Elektrons berechnen, den wir später mit der quantentheoretischen Vermutung

$$p_{\text{quant.}} = \frac{h}{2\pi}$$

vergleichen werden.

Daß man auf dispersionstheoretischem Wege auf die Größe der Molekel schließen kann, ist lange bekannt und im Anschluß an die Lorenz-Lorentzsche Formel oft ausgeführt, am eingehendsten von Hrn. Heydweiller in seiner „Sterentheorie". Unsere die besonderen Modellverhältnisse berücksichtigende Berechnung von $a_{\text{Disp.}}$ weicht natürlich im Detail von jener mehr schematischen Rechnung ab, stimmt aber in der Größenordnung mit ihr überein.

Die merkwürdig ganzzahligen Gesetze und Beziehungen zum natürlichen System der Elemente, welche das Brechungsvermögen beherrschen[1]), lassen von dem Dispersionskoeffizienten A sogar besonders prägnante Aufschlüsse über den Bau der Molekel erwarten. Leider steht die quantenmäßige Deutung dieser Gesetze noch aus. Wir bringen zahlenmäßige Beiträge hierzu in Kapitel III.

1) St. Loria, l. c. (Gesetze von C. und M. Cuthbertson über die Edelgase, die Reihe O, S, P usw.); W. Kossel, Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1917 (Lineare Abhängigkeit des Brechungsvermögens der Wasserstoffverbindungen von der Stellung im periodischen System). Vgl. auch R. Lang, Wied. Ann. 56. p. 534. 1895.

Kap. II. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene durch Bohrsche Molekeln.

§ 6. Erinnerung an die Drudesche Theorie der Rotationsdispersion.

Ein Gas enthalte $\mathfrak{N}$ Dispersionselektronen in der Volumeinheit, welche mit der Eigenfrequenz s_0 quasielastisch an ihre Ruhelage gebunden sind. Es befinde sich in einem Magnetfelde von der Stärke H. Eine linear polarisierte Lichtwelle von der Frequenz s falle parallel H ein; sie wird in eine $+$ zirkularpolarisierte und eine $-$ zirkularpolarisierte Welle zerlegt. Bei der Berechnung des Brechungsindex hat Drude nur nötig, den elektrischen Kräften $\mathfrak{E}$ der Lichtwelle die magnetischen Kräfte

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

hinzuzufügen. Er findet verschiedene Brechungsindizes n_+ und n_- für die beiden $\pm$ zirkularen Schwingungen, nämlich [1])

$$n_+^2 - n_-^2 = \frac{8\pi\mathfrak{N}e^3/m}{(s_0^2 - s^2)^2}\,\frac{e\,s\,H}{m\,c}. \tag{24}$$

Der Verschiedenheit von $n_\pm$ entspricht bekanntlich eine Drehung der Polarisationsebene des aus dem Gas austretenden linear polarisierten Lichtes. Die Drehung für die Einheit des Lichtweges werde mit VH bezeichnet (V = Verdetsche Konstante) und ergibt sich geometrisch zu

$$VH = \frac{s}{2c}(n_+ - n_-) = \frac{s}{4c}(n_+^2 - n_-^2). \tag{25}$$

Nach (24) ist also

$$V = \frac{2\pi}{c^2}\mathfrak{N}e\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{s^2}{(s_0^2 - s^2)^2} = \frac{2\pi}{c^2}\mathfrak{N}e\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{s^2}{s_0^4}\left(1 + \frac{2s^2}{s_0^2} + \ldots\right). \tag{26}$$

Die Entwicklung nach reziproken Potenzen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/s$ möge lauten

$$V = \frac{V_1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{V_2}{\lambda^2}\right) = \frac{V_1 s^2}{4\pi^2 c^2}\left(1 + \frac{V_2 s^2}{4\pi^2 c^2}\right). \tag{27}$$

Aus dem Vergleich von (26) und (27) folgt

$$V_1 = 8\pi^2\mathfrak{N}e\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{1}{s_0^4}, \quad V_2 = 8\pi^2 c^2\frac{1}{s_0^2}.$$

---

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik. 2. Aufl. p. 424, Gl. (57), (59). Wegen der Zeichenerklärung vgl. auch Gl. (47). Die Theorie ist in vorelektronentheoretischer Form schon kurz vor Drude von W. Voigt entwickelt, vgl. Wied. Ann. 67. p. 345. 1899.

Wollen wir auch hier, ähnlich wie früher in Gl. (3), die Eigenfrequenz s_0 eliminieren, so haben wir zu bilden

$$v\frac{V_2^2}{V_1} = \frac{8\pi e^4}{N e\left(\frac{e}{m}\right)^2}. \tag{28}$$

Hierbei ist noch $\mathfrak{N} = Nv$ gesetzt worden, wobei wie früher v die Anzahl der Dispersionselektronen in der Molekel oder die „Valenz", N die Anzahl der Molekeln in der Volumeinheit (Loschmidtsche Zahl) bedeutet. Die rechte Seite von (28) ist völlig universell und von bekanntem Zahlenwerte; sie gestattet also eine neue, von der früheren unabhängige Prüfung der Drudeschen Valenzregel und des Genauigkeitsgrades der quasielastischen Grundlage seiner Theorie.

Indessen ist die Konstante V_2 experimentell nur recht ungenau bekannt, jedenfalls viel ungenauer als V_1, wie ja auch in der Cauchyschen Formel B schlechter bekannt ist als A. Wir sehen uns daher nach einer anderen Elimination der Eigenfrequenz s_0 um, bei der V_2 nicht benutzt wird. Eine solche ergibt sich aus dem Vergleich der gewöhnlichen Brechung (Cauchyscher Koeffizient A) und der magnetischen Drehung (Verdetscher Koeffizient V_1). Statt (28) ergibt sich dabei als neue Kombination von universeller Bedeutung

$$v\frac{V_1}{A^2} = \frac{2\pi}{Ne}. \tag{29}$$

In der Tat: Bilden wir den Quotienten von Gl. (26) durch das Quadrat von Gl. (1), so hebt sich nicht nur s_0, sondern der ganze Nenner $s_0^2 - s^2$ fort

$$\frac{V}{(n^2-1)^2} = \frac{s^2}{8\pi e^2 \mathfrak{N} e} = \frac{\pi}{2\lambda^2 \mathfrak{N} e}. \tag{30}$$

Hier drücke man noch V und $n^2 - 1$ nach (27) und (2) durch λ aus

$$\frac{V}{(n^2-1)^2} = \frac{V_1}{\lambda^2}\,\frac{(1 + V_2/\lambda^2)}{4A^2(1 + 2B/\lambda^2)}. \tag{31}$$

Aus dem Vergleich von (30) und (31) ergibt sich dann zweierlei: einmal sollte $V_2 = 2B$ sein, sodann soll gelten:

$$\frac{V_1}{4A^2} = \frac{\pi}{2\mathfrak{N} e}.$$

Letztere Beziehung ist mit unserer Behauptung (29) identisch; erstere ist wegen der experimentellen Unsicherheiten noch weniger gut zu verwerten wie Gl. (28).

Die Beziehung (29), die Drude nicht bemerkt zu haben scheint, findet an den Beobachtungen von Siertsema eine interessante Bestätigung. Wir kommen auf diese Beobachtungen in Kapitel III zurück und benutzen sie hier nur so weit, als sie zur Prüfung der Formel (29) dienen. Die Tabelle gibt für H_2, O_2, N_2 die mit $v = 2, 4, 6$ multiplizierten Beobachtungswerte von V_1/A^2 und in der letzten Stelle zum Vergleich den theoretischen Wert $2\pi/Ne$ nach (29). Also stimmt nicht nur die Größen-

H_2	O_2	N_2	Gl. (29)
10^{-19} (6,25	5,20	4,02	4,88)

ordnung, sondern auch der Mittelwert (5,16) der Beobachtungen sehr gut mit der Theorie überein, wesentlich besser wie bei der entsprechenden Gl. (4) der gewöhnlichen Dispersion. Zur Erzielung dieser mittleren Übereinstimmung ist die Multiplikation mit v natürlich durchaus erforderlich, was abermals die Valenzregel bestätigt.

Schließlich möge noch auf einen anderen Zusammenhang zwischen Brechung und Drehung hingewiesen werden, den die Drudesche Theorie für den hier allein betrachteten Fall nur einer Eigenfrequenz s_0 fordert und der bereits früher von H. Becquerel empirisch aufgestellt war. Sie lautet

$$V = \varkappa s \frac{dn}{ds} \tag{32}$$

und wird unmittelbar abgeleitet durch Vergleich von (26) und (1). Als Wert der universellen Konstanten $\varkappa$ würde sich dabei ergeben

$$\varkappa = \frac{1}{2c^2} \frac{e}{m}.$$

§ 7. Die Formel der magnetischen Drehung für einen Elektronenring.

Wir betrachten wie in Kapitel II einen Ring von μ Elektronen, die im Kreise vom Radius a um die auf der Achse des Ringes im Abstande $a/\sqrt{3}$ von der Ringebene beiderseits symmetrisch gelegenen Kerne mit der Winkelgeschwindig-

keit ω umlaufen. Die Achse des Ringes (z-Achse) ist unter einem beliebigen Winkel ϑ gegen die Richtung des Feldes H geneigt. $H_z = H\cos\vartheta$ ist die Feldkomponente nach der Ringachse. Es entsteht zunächst die Frage, wie die Größen a und ω durch das Feld H beeinflußt werden.

Wir wollen uns zunächst dem Ansatze von Hrn. Scherrer (vgl. die Einleitung) anschließen, welcher besagt: Die Quantenbedingung bestimmt die ursprüngliche feldfreie Bahn; für diese sei $a = a_0$, $\omega = \omega_0$. Während der Entstehung des Feldes, die unendlich langsam zu denken ist, ändert sich die Bahn nach den Gesetzen der Mechanik und Elektromagnetik; die abgeänderte Bahn ist hierdurch bestimmt ohne einen abermaligen Eingriff der Quantentheorie. Es ergibt sich auf diese Weise

$$(33)\qquad a = a_0,\ \omega = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e}{mc}\frac{H_z}{\omega_0}\right) = \omega_0(1 + r\cos\vartheta).$$

Hier bedeutet

$$(34)\qquad r = \frac{1}{2}\frac{e}{mc}\frac{H}{\omega_0},$$

ein geeignetes dimensionsloses Maß für die Stärke des Magnetfeldes. r ist unter allen Umständen eine kleine Zahl, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen.

Wir werden diesen Ansatz im nächsten Paragraphen mit einem anderen Ansatz vergleichen, bei dem die abgeänderte Bahn formal derselben Quantenbedingung unterworfen wird wie die ursprüngliche Bahn, dafür aber die Gesetze der Elektrodynamik für die Periode der Entstehung des Feldes aufgehoben werden. Bei dieser Gelegenheit werden wir auch auf die Ableitung der Gl. (33) zurückkommen und begründen, warum allein der Quantenansatz (33) zulässig, der abgeänderte Ansatz des nächsten Paragraphen zu verwerfen ist.

Man bilde nun, unter konsequenter Beibehaltung von r, aber Vernachlässigung von r^2, die Schwingungsgleichungen der Elektronen bei gleichzeitiger Wirkung einer Lichtwelle und des Magnetfeldes. Sie lassen sich schrittweise integrieren und liefern ein elektrisches Moment der Molekel, welches im Zeitmaß s der auffallenden Welle wechselt. Das Moment wird zunächst auf Achsen $x\,y\,z$ bezogen, die nach dem Elektronenringe orientiert sind, sodann aber auf Achsen $x'\,y'\,z'$, die nach dem Magnetfelde orientiert sind. Von dem Momente

der einzelnen Molekel geht man durch Mittelung über zu dem Momente der Volumeinheit und von diesem zu dem Brechungsindex. Bei der Mittelung werden alle Lagen des Elektronenringes als gleichwahrscheinlich angesehen; von einer paramagnetischen Einstellung des Ringes wird also vorerst abgesehen. Insbesondere wird eine $+$- und $-$ zirkular polarisierte Welle von der Fortpflanzungsrichtung der magnetischen Kraftlinien betrachtet und die zugehörigen Brechungsindizes n_+ und n_- berechnet. Für diese ergibt sich schließlich

$$(35)\quad \begin{cases} n_+^2 - n_-^2 = \dfrac{16\pi}{3}\,\dfrac{N\mu e^2 r}{m\omega_0^2}\left\{\dfrac{s}{\omega_0}\varphi\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)\left[f\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)+f\left(\dfrac{-s}{\omega_0}\right)\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{1}{4}\left[f'\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)-f'\left(-\dfrac{s}{\omega_0}\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

f und φ sind dieselben Funktionen wie die in Kapitel I, Gl. (8), erklärten; $f'(x)$ bedeutet den Differentialquotienten nach dem Argument x, welches jetzt $\pm s/\omega_0$ heißt (früher $\pm s/\omega$). Es ist bemerkenswert und erfreulich, daß dieselben Größen zur Berechnung der magnetischen Drehung wie zu der der gewöhnlichen Dispersion dienen. Durch Vermittlung von Gl. (25) geht man zur Verdetschen Konstanten über und erhält mit Rücksicht auf (34)

$$(36)\quad \begin{cases} V = \dfrac{2\pi}{3}\,\dfrac{N\mu e^2}{m}\,\dfrac{e}{mc^2}\,\dfrac{s}{\omega_0^2}\left\{\dfrac{s}{\omega_0}\varphi\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)\left[f\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)+f\left(-\dfrac{s}{\omega_0}\right)\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{1}{4}\left[f'\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)-f'\left(-\dfrac{s}{\omega_0}\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

Ersichtlich ist V eine gerade Funktion von s/ω_0 ebenso wie das Drudesche V aus Gl. (26). Bei der Potenzentwicklung von V wird man daher am besten die Variable $\xi = (s/\omega_0)^2$ benutzen und, ähnlich wie in Gl. (11), schreiben:

$$(37a)\quad \begin{cases} F(\xi) = f\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right) + f\left(-\dfrac{s}{\omega_0}\right) = F_0 + \xi F_0' + \tfrac{1}{2}\xi^2 F_0'' + \cdots \\ \varphi(\xi) = \varphi_0\,(1 - \varphi_0\,\xi + \ldots). \end{cases}$$

Durch Differentiation der ersten dieser Zeilen nach s/ω_0 folgt weiter

$$(37b)\quad f'\left(\frac{s}{\omega_0}\right) - f'\left(-\frac{s}{\omega_0}\right) = 2\,\frac{s}{\omega_0}\,(F_0' + \xi F_0'' + \ldots).$$

Übrigens ist

$$(37c)\quad F_0 = 2f_0, \quad F_0' = f_0'', \quad F_0'' = \tfrac{1}{6} f_0^{IV}.$$

Setzt man alles in (36) ein und bricht mit ξ^2 ab, so findet man

$$(38)\quad \begin{cases} V = \dfrac{2\pi}{3}\dfrac{N\mu e^2}{m}\dfrac{e}{mc^2\omega_0^2}\,\xi\{(\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0') \\ \qquad + \xi(\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0'')\}. \end{cases}$$

Der Vergleich mit (27) führt zur Definition der die Wellenlängenabhängigkeit kennzeichnenden Koeffizienten V_1, V_2:

$$(39)\quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{8\pi^3}{3\omega_0^4}\dfrac{N\mu e^2}{m^2}(\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0'), \\ V_2 = \dfrac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}\dfrac{\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0''}{\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0'}. \end{cases}$$

Man kann aus ihnen ω_0 und dadurch zugleich die quantentheoretischen Fragen eliminieren, indem man bildet:

$$(40)\quad \mu\frac{V_2^2}{V_1} = \frac{8\pi c^4}{Ne\left(\frac{e}{m}\right)^2}\Phi, \quad \Phi = \frac{3}{4}\frac{(\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0'')^2}{(\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0')^3}.$$

Die hier gewählte Schreibweise läßt die Analogie mit Gl. (28) hervortreten. μ ist nach links hinübergenommen; der Faktor Φ rechts ist mit μ nur wenig (logarithmisch) veränderlich, wie aus den Näherungen von § 4 hervorgeht; er mißt die Abweichung unserer Bohrschen anisotropen Molekel von der Drudeschen isotropen in Gl. (28).

Da aber V_2 nicht gut bekannt ist, ziehen wir eine andere Elimination von ω_0 vor, nämlich diejenige zwischen V_1 und A, Gl. (39) und (12), wo wir, um die Schreibweise mit der zuletzt benutzten in Einklang zu bringen, schreiben müssen ω_0 statt ω, $F_0 + \varphi_0$ statt G_0. Es ergibt sich in Analogie mit Gl. (29)

$$(41)\quad \mu\frac{V_1}{A^2} = \frac{2\pi}{Ne}\Phi, \quad \Phi = 3\frac{\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0'}{(F_0 + \varphi_0)^2}.$$

Wiederum ist Φ eine langsam veränderliche Funktion von μ. Die Näherungen aus § 4 ergeben mit $L = \log\mu$ folgende allgemeine Darstellung

$$(42)\quad \Phi = 3\frac{-7{,}6\,L^3 - 71\,L + 97{,}6}{2{,}5\,L^3 - 17{,}1\,L^2 - 31{,}1\,L + 271{,}4}.$$

Berechnet man daraus Φ für $L = 0;\ 1;\ 2$, so findet man $\Phi = 1{,}08;\ 1{,}10;\ 0{,}99$. Φ ist also für alle in Betracht kommenden Werte μ von $\mu = 0$ bis $\mu = 8$ nur sehr wenig von Eins verschieden. Infolgedessen weicht unsere Formel (41) nur sehr wenig von der im Sinne der Drudeschen Theorie ab-

geleiteten Formel (29) ab. Hierin haben wir den Grund zu sehen, weshalb die Drudesche Theorie in diesem Falle eine so weitgehende Übereinstimmung mit der Erfahrung lieferte, vgl. die Tabelle am Schlusse des vorigen Paragraphen. Die Übereinstimmung wird aber noch verbessert, wenn wir statt mit Drude mit unserer Formel (41) rechnen und wenn wir dieselbe nicht näherungsweise und allgemein wie in Gl. (42), sondern genau für die einzelnen Gase auswerten, was im folgenden Kapitel geschehen wird. Hier genügen die tabellarisch zusammengestellten Resultate:

	H_2	O_2	N_2
Beob.	10^{-19} (6,25	5,20	4,02)
Ber.	10^{-19} (5,41	5,84	5,00)

Durch Hinzutreten unseres Faktors Φ ist die Übereinstimmung noch etwas verbessert. Wir können auch diese Übereinstimmung als eine neue und sehr scharfe Bestätigung der Valenzregel ($\mu = 2, 4, 6$ für H_2, O_2, N_2) ansprechen. In der Tat wird die Übereinstimmung bei sehr verschiedenen Einzelwerten von V_1 und A nur erzielt durch Hinzufügung des Faktors μ.

Die Becquerelsche Regel (32) ist jetzt nicht mehr erfüllt. Durch Differentiation von Gl. (7) ergibt sich nämlich der Ausdruck

$$s\frac{dn}{ds} = -\frac{2\pi}{3}\frac{N\mu e^2}{m}\frac{s}{\omega^3}\left\{f'\left(\frac{s}{\omega}\right) - f'\left(-\frac{s}{\omega}\right) + \varphi'\left(\frac{s}{\omega}\right)\right\},$$

der sich von (36) nicht mehr allein durch einen konstanten und universellen Faktor unterscheidet.

§ 8. Anderer Quantenansatz für das magnetische Feld. Prinzipielles über Quantelung im Magnetfelde.

Es bezeichne a und ω Ringradius und Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen im magnetischen Felde, a_0 und ω_0 ihre Werte in der feldfreien Molekel. Wir setzen

$$a = a_0 + \delta a\,, \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega$$

und nehmen an, daß formal dieselbe Quantenbedingung, die a_0 und ω_0 bestimmt, auch für a und ω gelte. Also:

(43) $$p = m a^2 \omega = m a_0^2 \omega_0\,.$$

Hieraus folgt

$$2\frac{\delta a}{a_0} + \frac{\delta \omega}{\omega_0} = 0. \tag{44}$$

Zu der Gl. (43) haben wir die mechanische Bedingung hinzuzufügen, daß am einzelnen Elektron Zentrifugalkraft + Abstoßung durch die übrigen Elektronen + Anziehung durch die Kerne + magnetischer Kraft in radialer Richtung sich das Gleichgewicht halten. Dies ergibt im Magnetfelde mit der Komponente H_z nach der Achse des Elektronenringes:

$$m a \omega^2 + \frac{e^2}{a^2}\frac{\sigma}{4} - \frac{e^2}{a^2}\tau' = \frac{e a \omega}{c} H_z \tag{45}$$

und für die feldfreie Molekel

$$m a_0 \omega_0^2 + \frac{e^2}{a_0^2}\frac{\sigma}{4} - \frac{e^2}{a_0^2}\tau' = 0. \tag{46}$$

τ' mißt die Anziehung durch die Kerne und ist in der Elster und Geitel-Festschrift Gl. (44a) erklärt. Führt man die Abkürzungen ein

$$\varrho_0 = \frac{e^2}{m a_0^3 \omega_0^2}, \quad \varrho = \frac{e^2}{m a^3 \omega^2} = \varrho_0 + \delta\varrho, \tag{47}$$

so kann man statt (45) einfacher schreiben (Division mit $m a \omega^2$)

$$1 + \varrho\left(\frac{\sigma}{4} - \tau'\right) = \frac{e}{mc}\frac{H_z}{\omega} = \frac{e}{mc}\frac{H_z}{\omega_0},$$

indem die rechte Seite wegen des Faktors H_z als kleine Größe zu behandeln ist, und entsprechend statt (46) (Division mit $m a_0 \omega_0^2$)

$$1 + \varrho_0\left(\frac{\sigma}{4} - \tau'\right) = 0.$$

Durch Elimination von

$$\frac{\sigma}{4} - \tau'$$

folgt

$$1 - \frac{\varrho}{\varrho_0} = -\frac{\delta\varrho}{\varrho_0} = \frac{e}{mc}\frac{H_z}{\omega_0} = 2r\cos\vartheta, \tag{48}$$

unter Einführung der Abkürzung (34) und der früheren Bezeichnung $H_z = H\cos\vartheta$. Nun ist nach (47)

$$-\frac{\delta\varrho}{\varrho_0} = \frac{3\delta a}{a_0} + \frac{2\delta\omega}{\omega_0}.$$

Gl. (48) geht also über in

$$3\frac{\delta a}{a_0} + 2\frac{\delta \omega}{\omega_0} = 2r\cos\vartheta. \tag{49}$$

Zusammen mit Gl. (44) liefert sie

$$\frac{\delta a}{a_0} = -2r\cos\vartheta, \quad \frac{\delta \omega}{\omega_0} = 4r\cos\vartheta. \tag{50}$$

Dieses Ergebnis ist ganz verschieden von dem Ansatz (38) im vorigen Paragraphen, den wir auch schreiben können

$$\delta a = 0, \quad \frac{\delta \omega}{\omega_0} = r\cos\vartheta. \tag{50a}$$

Wir wollen zeigen, daß die vorstehende Ableitung von (50) nicht stichhaltig ist und daß (50a) den richtigen Quantenansatz darstellt. Wir tun dies auf zwei Arten: I. auf einem elementaren Wege in Verbindung mit einer axiomatischen Forderung; II. durch eine Überlegung, die an die Grundlagen unserer heutigen Quantenauffassung anknüpft.

I. Wir fragen mit P. Scherrer (l. c.) zunächst nach der Arbeit, die das unendlich langsam entstehende Magnetfeld an einem der umlaufenden Elektronen erzeugt. Diese Arbeit δA ist MH_z, wenn

$$M = \frac{1}{2}\frac{e}{c}a_0^2\omega_0$$

das magnetische Moment des dem Elektron entsprechenden Kreisstromes ist. Man kann hiernach mit den Abkürzungen p und r aus (48) und (34) schreiben

$$\delta A = MH_z = pr\omega_0\cos\vartheta.$$

Diese Arbeit soll sich wiederfinden in der Änderung der Energie $T + V$ des Elektrons, wo

$$T = \frac{m}{2}a^2\omega^2 \quad \text{und} \quad V = \frac{C}{a}$$

ist (C bestimmt sich aus der Abstoßungsenergie der übrigen Elektronen des Ringes und der Anziehungsenergie der Kerne). Also

$$\delta T + \delta V = \left(ma_0\omega_0^2 - \frac{C}{a_0^2}\right)\delta a + p\,\delta\omega = \delta A = pr\omega_0\cos\vartheta. \tag{51}$$

Verbindet man aber diese Gleichung mit der Bestimmung des mechanischen Gleichgewichtes in der endgültigen Bahn, an welcher natürlich stets festzuhalten ist, am einfachsten

in der Form von Gl. (49), so folgen daraus in der Tat die Werte (50a) für δa und $\delta \omega$.

Nun hat Ehrenfest[1]) in seiner „Adiabatenhypothese" eine interessante Regel aufgestellt, welche bei richtig gequantelten Bewegungen erfüllt sein soll, und Burgers[2]) hat bewiesen, daß sie sich bei den bisher allein zugänglichen bedingtperiodischen Bewegungen bewährt. Die Regel besagt: Ändert man in einem quantenmäßig erlaubten Bewegungszustande durch äußere Umstände (Anlegung von Feldern usw.) die Parameter der Bewegung unendlich langsam ab, so entsteht nach den Gesetzen der Mechanik eine Bahn, die wieder quantenmäßig erlaubt ist. Der quantenmäßig erlaubte Anfangszustand sei die feldfreie Bewegung a_0, ω_0 unserer Molekel. Das Magnetfeld ändert bei seinem allmählichen Entstehen die Parameter $a\,\omega$ ab. Die Abänderung geschieht nach den Gesetzen der Mechanik für reversible (unendlich langsame) Vorgänge. Die so entstehende Bahn $a = a_0$, $\omega = \omega_0 + r\cos\vartheta$ ist nach dem Ehrenfestschen Axiom die quantenmäßig ausgezeichnete Bahn im Magnetfelde.

II. Bei der Bewegung im Magnetfelde tritt für die Anwendung der Quantentheorie die Schwierigkeit auf, daß die vom Magnetfelde ausgehenden Kräfte kein Potential haben. Die Lagrangesche Funktion ist daher nicht mehr $L = T - V$ und die zu der Lagenkoordinate q kanonisch zugeordnete Impulskoordinate nicht mehr $p = \partial T/\partial \dot{q}$. Wie man in diesem Falle das Bewegungsproblem im Sinne von Schwarzschild und Epstein kanonisieren kann, wurde bei homogenem[3]) und auch bei inhomogenem[4]) Magnetfelde durch spezielle Rechnung gefunden. Ein allgemeines Verfahren ist in einer früheren Arbeit von Schwarzschild[5]) enthalten und lautet so: Liegt ein beliebiges elektromagnetisches Feld vor, gegeben durch das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, so übernimmt für die Bewegung einer Ladung e

1) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51. p. 327. 1916.

2) J. M. Burgers, Ann. d. Phys. 52. p. 195. 1917.

3) P. Debye, Gött. Nachr. Jahrg. 1916 und Physik. Zeitschr. 17. p. 508. 1916; P. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 168. 1916; A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 17. p. 491. 1916.

4) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. Münch. Akad. § 4. p. 131. 1916.

5) K. Schwarzschild, Gött. Nachr. Jahrg. 1903. Zwei Formen des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Elektronentheorie.

$$L = T - e\left(\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})\right) = T - V + \frac{e}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})$$

die Rolle der Lagrangeschen Funktion, und $\int L\,dt$ die Rolle der Wirkungsfunktion. Bemerkenswert ist dabei, wie ich in meinem Nachruf[1]) auf Schwarzschild hervorhob, die relativistisch invariante Form dieser Funktion L. Es stellt nämlich $(\mathfrak{A}, i\varphi)$ das Viererpotential Φ und

$$\left(\frac{e}{c}\mathfrak{v},\ ie\right)$$

die über die Ladung e integrierte Vierердichte P dar; L hat also die Form $L = T + (P\Phi)$.

Für ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H} = H_z$ kann man setzen

$$\mathfrak{A}_x = -\tfrac{1}{2} y H_z,\quad \mathfrak{A}_y = +\tfrac{1}{2} x H_z,\quad \mathfrak{A}_z = 0,$$

wobei in der Tat $\mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A} = H_z$ wird. Infolgedessen ergibt sich

$$(52)\qquad L = T - V + \frac{e}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})H_z = T - V + \frac{e}{2c}a^2\dot{\varphi}H_z.$$

a und φ sind die Polarkoordinaten für die Bahn der Ladung e. Der zur φ-Koordinate kanonisch zugeordnete Impuls lautet also

$$(53)\qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi + \frac{e}{2c}a^2 H_z.$$

p_φ ist diejenige Größe, die man ohne Rücksicht auf das Magnetfeld bei der betreffenden Bewegung als Impuls für die φ-Koordinate ansprechen würde

$$p_\varphi = \frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{\varphi}} = m a^2 \omega;$$

sie ist durch dieselbe Formel gegeben und hat dieselbe geometrische Bedeutung (Moment der Bewegungsgröße) wie im feldfreien Falle

$$p_0 = m a_0^2 \omega_0.$$

Trotzdem ist nicht p_φ, sondern der kanonische Impuls p die wahre Verallgemeinerung von p_0 im Sinne der höheren Mechanik und Quantentheorie. In der Terminologie von Ehrenfest ist p „adiabatische Invariante". Unterliegt sie im feldfreien Falle einer Quantenbedingung (man denke an $p_0 = h/2\pi$; indessen kommt es hier nicht auf die Form der Bedingung

1) A. Sommerfeld, Die Naturwissenschaften 1916. Heft 31.

an, sondern nur auf ihr Vorhandensein), so ist auch im Magnetfelde p an dieselbe Bedingung gebunden, also

$$p = p_0, \quad p_\varphi \neq p_0, \tag{54}$$

vielmehr nach (53)

$$p_\varphi - p_0 = -\frac{e}{2c} a^2 H_z. \tag{55}$$

Nehmen wir noch die Annahme kleiner Feldstärke hinzu, so können wir schreiben

$$\delta p = p_\varphi - p_0 = \delta(m a^2 \omega),$$
$$\frac{\delta p}{p} = 2\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta \omega}{\omega} \ldots$$

Aus (55) folgt dann durch Division mit p

$$\frac{\delta p}{p} = 2\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta \omega}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{|e|}{mc}\frac{H_z}{\omega}. \tag{56}$$

Dabei haben wir auf der rechten Seite von (55) $-e$ ersetzt durch $|e|$ (negativ geladenes Elektron); zugleich können wir rechts und links in (56) a und ω ersetzen durch a_0 und ω_0 und die Abkürzung r aus Gl. (84) benutzen. Es entsteht dann

$$2\frac{\delta a}{a_0} + \frac{\delta \omega}{\omega_0} = r\cos\vartheta. \tag{56a}$$

Diese Gleichung zusammen mit (49) gibt unmittelbar wie in (50a):

$$\delta a = 0, \quad \frac{\delta \omega}{\omega_0} = r\cos\vartheta.$$

Somit ist der Quantenansatz des vorigen Paragraphen endgültig begründet. Zugleich erkennt man den Fehler in der Ableitung am Anfange dieses Paragraphen, Gl. (48). Die dort mit p bezeichnete Größe ist nicht unser jetziges p, sondern unser jetziges p_φ. Gl. (48) wäre also jetzt so zu schreiben: $p = p_0$, wodurch der Widerspruch mit Gl. (54) hervortritt. Der Fehler bestand also darin, daß die formale Verallgemeinerung p_φ, nicht die sinngemäße und kanonische Verallgemeinerung p des feldfreien Impulses p_0 der Quantenbedingung unterzogen wurde.

Wenn hiernach auch kein Zweifel sein kann, daß der Quantenansatz (50) unberechtigt ist, so wird es doch lehrreich sein, ihn weiter zu verfolgen und an der Erfahrung zu prüfen. Wir lassen also auf die im Sinne der Gl. (50) durch das Magnet-

feld veränderte Molekel eine Lichtwelle von der Frequenz s auffallen und bilden ihr elektrisches Moment. Die Lichtwelle sei $\pm$ zirkularpolarisiert um die Richtung des Magnetfeldes. Durch Mittelung über alle Lagen der Molekel bildet man das Moment der Volumeinheit des Gases nach Achsen, die fest im Magnetfelde orientiert sind, und geht zum Brechungsindex $n_\pm$ über. Es ergibt sich

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} n_+^2 - n_-^2 = \frac{16\pi}{3}\frac{N\mu e^2 r}{m\omega_0^2}\Big\{ &\frac{s}{\omega_0}\varphi\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big[f\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)+f\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big] \\ &-\frac{1}{4}\Big[f'\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)-f'\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big]-\frac{3}{2}\Big[f\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)-f\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big] \\ &-\frac{3}{4}\frac{s}{\omega_0}\Big[f'\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)+f'\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Auch hier kommen wir mit denselben Funktionen f und φ aus, wie bei der gewöhnlichen Dispersion. Von Gl. (35) unterscheidet sich der neue Ausdruck (57) durch das Hinzutreten von zwei weiteren Gliedern in der $\{\}$. Diese Glieder haben ebenso wie die früheren Glieder ungeraden Charakter in der Variabeln s/ω_0. Gehen wir zu der Verdetschen Konstanten V mittels der Gl. (25) über, so erhalten dementsprechend alle ihre Bestandteile geraden Charakter in s/ω_0, wie bei Drude.

Von der Formel für die Verdetsche Konstante schreiben wir nur ihren ersten Koeffizienten V_1 hin. Er lautet

$$(58)\qquad V_1 = \frac{8\pi^3}{3\omega_0^4}\frac{N\mu e^2}{m^2}\left(\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2}F_0' - \tfrac{3}{2}f_0'\right).$$

Als eigentliche Probe auf den neuen Quantenansatz gilt uns wieder der Vergleich zwischen magnetischer Drehung und gewöhnlicher Dispersion. In dieser Hinsicht erhalten wir jetzt statt (41)

$$(59)\qquad \mu\frac{V_1}{A^2} = \frac{2\pi}{Ne}\Phi, \quad \Phi = 3\,\frac{\varphi_0 F_0 - \frac{1}{2}F_0' - \frac{3}{2}f_0'}{(F_0+\varphi_0)^2}.$$

Auch hier hängt Φ nicht von μ selbst, sondern nur von $L = \log\mu$ ab. Die Veränderlichkeit von Φ ist jetzt aber stärker wie im vorhergehenden Falle. Eine allgemeine Näherung im Sinne des § 4 ergibt

$$(59a)\qquad \Phi = 3\,\frac{-7{,}6\,L^2 - 18{,}6\,L + 53{,}3}{2{,}5\,L^3 - 17{,}1\,L^2 - 31{,}1\,L + 271{,}4}.$$

Dieselbe liefert für $L = 0;\ 1;\ 2$ die Werte $\Phi = 0{,}59;\ 0{,}36;\ -0{,}085$. Während also bei Drude $\Phi = 1$ war und bei den

früheren (richtigen) Quantenansatz nur ganz wenig größer als 1 wurde, weicht Φ jetzt stark von 1 ab und wird sogar negativ für $L = 2$ ($\mu = 7{,}4$). Die Übereinstimmung mit der Erfahrung wird dadurch aufgehoben. Wir ersehen dies am deutlichsten aus der folgenden Tabelle, in der nochmals die Erfahrungswerte für $\mu V_1/A^2$ eingetragen und verglichen sind mit den Werten, die sich aus (59) für $\mu = 2, 4, 6$ berechnen, wobei also der strenge Wert von Φ in (59), nicht der Näherungswert (59a) benutzt ist.

	H_2	O_2	N_2
Beob.	10^{-10} (6,25	5,20	4,02)
Ber.	10^{-10} (2,10	0,83	−0,64)

Es ist somit der schon theoretisch zurückgewiesene Quantenansatz auch empirisch widerlegt. Umgekehrt kann man das negative Ergebnis dieses Paragraphen auch ansprechen als eine positive Bestätigung der Ehrenfestschen Adiabatenhypothese in unserem besonderen Fall oder als eine Probeauf die allgemeine Regel der Quantelung kanonischer Variabeln. In diesem prinzipiellen Sinne ist die Nichtübereinstimmung mit der Erfahrung in diesem Paragraphen nicht weniger lehrreich wie die Übereinstimmung im vorigen.

§ 9. Annahme isotroper Bindungen.

Auch im Gebiete der magnetischen Drehung ist hervorzuheben, daß die eigentliche Überlegenheit Bohrscher Modelle über quasi-elastisch funktionierende Drudesche Molekeln darin besteht, daß die Anisotropie der Bindungen berücksichtigt und die quasi-elastische Kraft auf elektrischem und dynamischem Wege genau konstruiert wird, und zwar in axialer Richtung anders wie in radialer und azimutaler. Es ist daher die Drudesche Theorie als (unwirklicher, isotroper) Spezialfall in der unseren enthalten. Wir überzeugen uns davon im Sinne des § 8.

Es werde also gesetzt, wie dort in Gl. (13),

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi\left(\frac{s}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\xi - \xi_0}, \quad \xi = \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2, \quad \xi_0 = \varrho\,\sigma', \\ &f\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + f\left(-\frac{s}{\omega_0}\right) = F(\xi) = \sum_1^4 \frac{A_h}{\xi - \xi_h}. \end{aligned}\right.$$

ξ_0 ist die axiale Eigenschwingung. $\xi_h = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sind radiale und azimutale Eigenschwingungen. Durch Differentiation der letzten Gleichung nach $x = s/\omega_0$ folgt wegen $d\xi/dx = 2s/\omega_0$

$$(61) \qquad f'\left(\frac{s}{\omega_0}\right) - f'\left(-\frac{s}{\omega_0}\right) = -2\frac{s}{\omega_0}\sum_1^4 \frac{A_h}{(\xi - \xi_h)^2}.$$

Setzen wir (60) und (61) in (35) ein, so folgt, ohne daß zunächst irgend etwas Neues hinzugetan wäre,

$$(62) \quad n_+^2 - n_-^2 = \frac{16\pi}{3}\frac{N\mu e^2 r s}{m\omega_0^3}\left\{\frac{1}{\xi - \xi_0}\sum_1^4 \frac{A_h}{\xi - \xi_h} + \frac{1}{2}\sum_1^4 \frac{A_h}{(\xi - \xi_h)^2}\right\}.$$

Nunmehr machen wir die Annahme der Isotropie

$$\xi_h = \xi_0, \qquad h = 1, \ldots 4$$

und berücksichtigen Gl. (14) $\Sigma A_h = 2$. Dann wird in der letzten Gleichung

$$\} = \frac{3}{(\xi - \xi_0)^2} = \frac{3\omega_0^4}{(s^2 - s_0^2)^2},$$

wenn wir noch in naheliegender Bezeichnungsweise setzen $\xi_0 = s_0/\omega_0$. Es hebt sich nun aber $3\omega_0^4$ gegen Faktoren vor der $\{\}$, falls man für r seinen Wert (34) einträgt. Dadurch entsteht aus (62)

$$n_+^2 - n_-^2 = 8\pi\frac{N\mu e^2}{m}\frac{eH}{mc}\frac{s}{(s^2 - s_0^2)^2},$$

also genau die Drudesche Gl. (24).

In der Gültigkeit unserer allgemeinen Formel für den einfachsten Spezialfall können wir eine erwünschte Probe auf die Folgerichtigkeit des (immerhin ziemlich verwickelten) Näherungsverfahrens sehen, welches bei der Ableitung der Gl. (35) eingeschlagen war. Die Scherrersche Formel, bei welcher in der $\{\}$ von Gl. (35) der erste Term fehlt, besteht diese Probe dagegen nicht. Sie ergibt im Grenzfall der Isotropie nur den dritten Teil

$$\left(\text{statt } \frac{2+1}{3} \text{ nur } \frac{1}{3}\right)$$

des Drudeschen Wertes von $n_+^2 - n_-^2$.

Andererseits besteht die Endformel (57) des vorigen Paragraphen ihrerseits ebenfalls die Probe der Isotropie. Dieselbe unterscheidet sich von (35) nur um die zusätzlichen Terme

(63) $$-\frac{3}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)-\frac{3}{4}x\left(f'(x)+f'(-x)\right)\ldots\; x=\frac{s}{\omega_0}.$$

Wir machen

(64) $$f(x)-f(-x)=x\,E(\xi)\ldots\quad \xi=x^2.$$

Bei der Partialbruchzerlegung von $E(\xi)$ treten dieselben Eigenschwingungen $\xi=\xi_h$ im Nenner auf wie bei der Funktion $F(\xi)=f(x)+f(-x)$. Wir setzen

(65) $$E(\xi)=\sum\frac{B_h}{\xi-\xi_h}$$

und behaupten

(66) $$\Sigma B_h=0\,.$$

Es ist nämlich nach (8)

$$f(x)=\frac{x^2-4x+\ldots}{x^4+(c_1-4)x^2+\ldots}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{c_1}{x}+\ldots\right),$$

$$f(x)-f(-x)=-\frac{2c_1}{x^3}\left(1+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^4}+\ldots\right),$$

wo $C, D\ldots$ Koeffizienten sind, auf deren Wert es nicht ankommt. Aus (64) folgt dann

$$E(\xi)=-\frac{2c_1}{\xi^2}\left(1+\frac{C}{\xi}+\frac{D}{\xi^2}+\ldots\right).$$

Nach § 3 berechnet man aber die Summe der Residuen B_h durch komplexe Integration über einen unendlich fernen Kreis und findet

$$\Sigma B_h=\frac{1}{2\pi i}\oint E(\xi)\,d\xi=0\,,$$

da in $E(\xi)$ das Glied mit ξ^{-1} fehlt. Somit ist Gl. (66) bewiesen.

Geht man zum Falle der Isotropie über, durch die Annahme $\xi_h=\xi_0$, so wird nach (64)

(66a) $$\begin{cases} f(x)-f(-x)=x\,E(\xi)=x\dfrac{\Sigma B_h}{\xi-\xi_0}=0\,,\\ f'(x)+f'(-x)=E(\xi)+2\xi E'(\xi)=\dfrac{\Sigma B_h}{\xi-\xi_0}-2\xi\dfrac{\Sigma B_h}{(\xi-\xi_0)^2}=0. \end{cases}$$

Somit verschwindet auch der Ausdruck (63) und unsere Formel (57) des § 8 geht ebenso wie die Formel (35) des § 7 in die Drudesche über. Weshalb trotzdem die Methode des vorigen Paragraphen zu verwerfen ist, wurde daselbst ausführlich erörtert.

§ 10. Paramagnetische Einstellung im Magnetfelde.

Das Beispiel des Sauerstoffs macht es erforderlich, den Einfluß einer paramagnetischen Einstellung der Molekel im Magnetfelde in unsere Rechnungen einzubeziehen. Während beim Fehlen von Paramagnetismus alle Orientierungen der Molekel im Magnetfelde gleich wahrscheinlich sind, tritt nach der Langevinschen Theorie bei paramagnetischen Molekeln eine mit abnehmender Temperatur zunehmende Bevorzugung der Feldrichtung ein. Die Verteilungsfunktion lautet nach Langevin-Boltzmann

$$e^{\frac{MH}{kT}\cos\vartheta},$$

wo M das magnetische Moment der Molekel bedeutet. Wir nehmen zunächst an, daß die Achse dieses Momentes mit der Achse unserer Sauerstoffmolekel (Verbindungslinie der Kerne) zusammenfällt und schreiben

$$\cos\vartheta = \gamma, \quad \frac{MH}{kTr} = p. \tag{67}$$

p ist ein dimensionsloses Maß für den Paramagnetismus unserer Molekel; die Feldstärke H hebt sich wegen der Bedeutung von r [Gl. (34)] aus p heraus. Die Verteilungsfunktion lautet in diesen Abkürzungen

$$e^{pr\gamma}.$$

Die verhältnismäßige Anzahl der Molekeln von der Lage γ mit Spielraum $d\gamma$ wird

$$\frac{dN}{N} = \frac{e^{pr\gamma}\,d\gamma}{\int_{-1}^{+1} e^{pr\gamma}\,d\gamma} = pr\,\frac{e^{pr\gamma}}{e^{pr}-e^{-pr}}\,d\gamma. \tag{68}$$

r ist, wie wir wissen, eine kleine Größe; wir überzeugen uns, daß auch pr eine kleine Größe ist. Aus Messungen von Curie[1]) folgt für O_2 bei Zimmertemperatur

$$p = 2{,}52 \cdot 10^3. \tag{69}$$

---

1) Nach Curie ist die Suszeptibilität von O_2

$$\varkappa = \frac{3{,}37}{T} \cdot 10^{-6},$$

nach Langevin gilt $\varkappa = NM^2/3kT$. Daraus folgt $M = 2{,}6 \cdot 10^{-20}$ und für $T = 300$ der Wert (69) von p.

Da aber r für $H = 10000$ Gauss bei dem Wert $\omega = 4{,}5 \cdot 10^{16}$ von H_2 nur $2 \cdot 10^{-6}$ beträgt, so wird $pr = 5 \cdot 10^{-3}$. Wir werden daher das Quadrat von pr vernachlässigen.

Dann ergibt sich aus (68)

$$\frac{dN}{N} = \tfrac{1}{2}(1 + pr\gamma)\, d\gamma. \tag{70}$$

Wir berechnen die Mittelwerte von γ, γ^2, γ^3, ... Während bei Gleichwahrscheinlichkeit aller Lagen gilt

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma^3} = \overline{\gamma^5} \ldots = 0, \quad \overline{\gamma^2} = \tfrac{1}{3}, \quad \overline{\gamma^4} = \tfrac{1}{5}, \ldots$$

berechnet man jetzt aus (70), die Integrale von $\gamma = -1$ bis $\gamma = +1$ genommen

$$\overline{\gamma} = \int \gamma \frac{dN}{N} = \frac{pr}{3},$$

$$\overline{\gamma^3} = \int \gamma^3 \frac{dN}{N} = \frac{pr}{5},$$

$$\overline{\gamma^2} = \tfrac{1}{3}, \quad \overline{\gamma^4} = \tfrac{1}{5}.$$

Man sieht, daß die geraden Potenzen von γ, die im unmagnetischen Falle nach der Mittelung allein übrig bleiben, durch den Paramagnetismus nicht geändert werden (abgesehen natürlich von höheren Potenzen von pr), daß aber jetzt die ungeraden Potenzen von γ einen Beitrag zur Mittelung liefern.

Hiernach versteht man, daß in dem Ausdruck für das mittlere elektrische Moment, also auch in dem Ausdruck für $n_+^2 - n_-^2$ dieselben Glieder, wie früher, auftreten werden, herrührend von den geraden Potenzen von γ, daß aber neue Glieder mit dem Faktor pr hinzutreten, die von den ungeraden Potenzen von γ herrühren. Natürlich ist bei der Berechnung die richtige Quantenbedingung (§ 7) zugrunde gelegt. Das Ergebnis lautet

$$\left\{\begin{aligned} n_+^2 - n_-^2 = \frac{16\pi}{3} \frac{N\mu e^3 r}{m\omega_0^3} \Big\{ & \frac{s}{\omega_0} \varphi\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big[f\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big) + f\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big] \\ & - \frac{1}{4}\Big[f'\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big) - f'\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big] + \frac{p}{4}\Big[f\Big(\frac{s}{\omega_0}\Big) - f\Big(-\frac{s}{\omega_0}\Big)\Big]\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Hier fällt sofort in die Augen: Der große Wert von p, Gl. (69), bewirkt, daß unser paramagnetisches Korrektionsglied die übrigen Glieder um eine Zehnerpotenz an Größe übertrifft. *Da die frühere Formel den Beobachtungen entsprach, wird die paramagnetisch korrigierte Formel mit den Tatsachen unvereinbar.*

Übrigens kann man der Vollständigkeit wegen bemerken, daß die Vernachlässigung von $(p\,r)^2$ eben wegen der Größe von p eigentlich nicht strenge war. Unter Beibehaltung dieses Gliedes würde in der $\{\}$ neben dem Korrektionsgliede mit p ein solches mit $p^2 r$ auftreten, wo $p^2 r$ von der Größenordnung 1 und neben den sonst beibehaltenen Gliedern nicht völlig zu streichen wäre. Diese Bemerkung hat aber ersichtlich keinen Einfluß auf den soeben gezogenen Schluß.

Im Grenzfalle der Isotropie geht nach Gl. (66a) unsere jetzige Formel wieder, wie es sein muß, in die Drudesche über.

Zunächst aber wollen wir noch, bei unbestimmtem p, die Formeln für die Verdetsche Konstante V und ihre Koeffizienten V_1, V_2 hersetzen. Nach (25) folgt aus (71), wenn wir sogleich nach Potenzen von $\xi = (s/\omega_0)^2$ entwickeln,

$$V = \frac{2\pi}{3}\,\frac{N\mu e^3}{m}\,\frac{e}{m c^2 \omega_0^2}\,\xi\left\{\left(\varphi_0 F_0 - \frac{1}{2}F_0' + \frac{p}{2}f_0'\right) + \xi\left(\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \frac{1}{2}F_0'' + \frac{p}{12}f_0'''\right)\right\}.$$

Hier sind f_0', f_0''' Differentialquotienten von $f(x)$, Gl. (8), nach x für $x = 0$, F_0', F_0'' dagegen wie früher Differentialquotienten von $F(\xi) = f(x) + f(-x)$ nach ξ für $\xi = 0$. Durch Vergleich dieser Formel für V mit (27) folgt

$$(72)\qquad \begin{cases} V_1 = \dfrac{8\pi^3}{3\omega_0^4}\,\dfrac{N\mu e^3}{m^2}\left(\varphi_0 F_0 - \dfrac{1}{2}F_0' + \dfrac{p}{2}f_0'\right), \\ V_2 = \dfrac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}\,\dfrac{\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \dfrac{1}{2}F_0'' + \dfrac{p}{12}f_0'''}{\varphi_0 F_0 - \dfrac{1}{2}F_0' + \dfrac{p}{2}f_0'}. \end{cases}$$

Der allgemeine Schluß, der sich aus der übertriebenen Größe des paramagnetischen Korrektionsgliedes ergibt, wurde schon in der Einleitung gezogen. Er besagt: Die paramagnetische Einstellung, welche die Langevinsche Theorie fordert und durch die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität beweist, kann nicht die Lage der Molekel meinen, sondern die Lage der Kernachsen. Da die Kerne für die Dispersion im Sichtbaren unwirksam sind, ist gegen ihre magnetische Einstellung vom optischen Standpunkte aus nichts einzuwenden. Andererseits genügt die Einstellungstendenz der Kernachsen und ihre Störung durch Zusammenstöße, um die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität zu erklären. Man stelle sich

also die Molekelachsen gleichmäßig im Raume verteilt vor und an deren Enden die Kernachsen beiderseits, je nach der Stärke des Magnetfeldes, etwas dagegen abgeknickt. Unter der Richtung der Kernachsen verstehen wir dabei die Senkrechte zur Bahn der den Kernen benachbarten Elektronen.

Dies führt zu der auch sonst bewährten Anschauung: *Der Paramagnetismus ist eine Eigenschaft des Atoms, nicht der Molekel.* Das G. Wiedemannsche Gesetz von der Additivität des Paramagnetismus in Salzen und Lösungen ist eine starke Stütze dieser Anschauung.[1])

Kap. III. Die Konstitution von H_2, O_2 und N_2.

§ 11. Allgemeines über die benutzten Molekelmodelle.

Die Drudesche Valenzregel und die Unterscheidung zwischen losen (Dispersions-, Valenz-) Elektronen und festen (Röntgen- oder strukturellen) Elektronen führt zu folgendem Aufbau von H_2, O_2, N_2 (vgl. hierzu Fig. 1 von p. 508). Bei H_2 sind beide Elektronen lose gebunden, bei O_2 sind von den $8+8$ Elektronen vier lose, je sechs fest an die beiden Kerne gebunden; bei N_2 ($7+7$ Elektronen) bilden sechs lose Elektronen den äußeren Elektronenring; je vier feste befinden sich an den Kernen. Bei H_2 haben wir also zwei einfach geladene Kerne, bei O_2 und N_2 zwei zweifach bzw. dreifach geladene Ersatzkerne (Ladung $8-6=2$ bzw. $7-4=3$). Genau so, wie Bohr für die H_2-Molekel zeigt, folgt aus dem axialen Gleichgewicht der elektrischen Kräfte an den Kernen für die O_2- und N_2-Molekel, daß die Kerne von der Ringebene den Abstand $a/\sqrt{3}$ haben, wenn a den Ringradius bedeutet. Bei Bohr ist das O_2- und N_2-Modell nicht angegeben; es findet sich zuerst in meinem Aufsatze in der Elster und Geitel-Festschrift. Doch kann man bemerken, daß die Modelle in Einklang sind mit der Bohrschen Anschauung[2]) über das O- und N-Atom: beim O-Atom zwei, beim N-Atom drei äußere, lose gebundene Elektronen.

Wie schon in § 5 begründet wurde, werden wir von den

1) Vgl. indessen die interessanten Feststellungen W. Kossels (Ann. d. Phys. 49. p. 261. 1916) über paramagnetische Kationen, nach denen das magnetische Moment durch die Anzahl der Valenzelektronen bestimmt wird.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 497. 1913. Sein Schema der aufeinander folgenden Elektronenringe lautet, von innen nach außen gezählt, O (4, 2, 2), N (4, 3).

den Kernen benachbarten Elektronen bei der Dispersion von O_2 und N_2 ganz absehen. Wir nehmen sie als so fest gebunden an, daß sie die Dispersion des Lichtes nicht beeinflussen. Während die Kernladung durch die äußerst steifen α-Strahlen und die innersten Elektronen der Atome durch die harten Röntgenstrahlen nachgewiesen werden und während J. Königsberger kürzlich den interessanten Versuch gemacht hat, den nächsten Elektronenring durch die weniger steifen Kanalstrahlen zu untersuchen, kann die Wirkung der weichen Lichtstrahlen nur über den äußeren Elektronenring Aufschluß geben. Unsere Modelle von O_2 und N_2 bleiben daher bezüglich der fest gebundenen Elektronen notwendig unvollständig — im Gegensatze zu dem Modell von H_2, welches fertig vor uns steht.

Trotzdem erheben sich auch gegen dieses Modell Einwände, die zurzeit nicht geklärt werden können; sie mögen zusammen mit den Einwänden gegen unsere anderen Modelle hier zusammengestellt werden.

1. Auf die Schwierigkeit, die im magnetischen Verhalten von H_2 liegt, hat schon Debye hingewiesen. Wasserstoff ist diamagnetisch, sollte aber nach unserem Modelle paramagnetisch sein, da die umlaufenden Ringelektronen ein magnetisches Moment geben. Dasselbe gilt vom Stickstoff. Sauerstoff ist zwar paramagnetisch, doch liefert unser Modell keinen Anhalt dafür, weshalb es sich magnetisch anders verhalten sollte wie die Modelle von Wasserstoff oder Stickstoff.

2. Die Abnahme der spezifischen Wärme von H_2 bei tiefen Temperaturen befolgt in quantitativer Hinsicht nicht dasjenige Gesetz, das man aus dem Modell berechnet, wenn man mit F. Krüger[1]) die Präzessionsbewegungen der (starr gedachten) Molekel betrachtet und dieselben nach den bei den Spektrallinien bewährten Regeln quantelt.[2])

3. Die Modelle sind im Sinne der gewöhnlichen Mechanik merkwürdiger Weise instabil. Dies kann man bereits aus den Dispersionsrechnungen von Debye und mir herauslesen; ausdrücklich bemerkt wurde es für das H_2-Modell von Frl. Leeuwen[3]) und Hrn. Rubinowicz[4]) (von ersterer für den Fall

1) F. Krüger, Ann. d. Phys. 50. p. 346. 1916; 51. p. 450. 1916.
2) P. Epstein, D. Physik. Ges. 18. p. 398. 1916.
3) H. J. v. Leeuwen, Physik. Zeitschr. 17. p. 196. 1916.
4) A. Rubinowicz, Physik. Zeitschr. 18. p. 187. 1917.

unendlicher Kernmasse, von letzterem mit Rücksicht auf das Mitschwingen der Kerne). Man muß also schon eine besondere quantenmäßige Bindung der Bewegungen vorsehen, um dem instabilen Zerfall des Modelles zu entgehen.

4. Die Übertragung der Bohr-Nicholsonschen Regel $2\pi p = h$ ($p = m a^2 \omega$ = Impulsmoment für das *einzelne* Elektron) von dem Elektron des Wasserstoffatoms auf das einzelne Elektron des Molekelringes ist keineswegs selbstverständlich, auch nicht für H_2 (vgl. indessen den Nachtrag am Schlusse der Arbeit). Bei O_2 und N_2 werden wir sie nicht bestätigt finden. Vielmehr ergibt sicht hier (§ 14) eine allgemeinere empirische Regel, die auch den besonderen Fall des Wasserstoffs in sich aufnimmt.

5. Das Näherungsmodell für He, das wir in § 15 vorschlagen, zeigt nichts von der chemischen Trägheit der Edelgase; vielmehr sollte es ebenso stark elektropositiv wirken wie das H-Atom.

§ 12. Dispersion und Refraktion von H_2, O_2 und N_2. Der empirische Wert von ω.

Wir stellen zunächst die Daten tabellarisch zusammen, die zur Berechnung der Brechungsverhältnisse erforderlich sind, beginnend mit den Konstanten aus den Gl. (9) und (10).

	μ	σ	τ	σ'	$1/\varrho$
H_2	2	1	1	0,310	1,05
O_2	4	3,82	2,41	0,65	1,64
N_2	6	7,32	3,73	0,98	2,07

Aus ihnen berechnen sich nach (8) die Koeffizienten in den für alle Dispersionsrechnungen maßgebenden Funktionen f und φ.

H_2:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4{,}155}{x^4 - 4x^3 + 4{,}310\,x^2 - 0{,}620\,x - 1{,}298},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 0{,}310}.$$

O_2:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3{,}77}{x^4 - 4x^3 + 3{,}967\,x^2 - 0{,}794\,x - 2{,}424},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 0{,}397}.$$

N_2:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3{,}87}{x^4 - 4x^3 + 3{,}606x^2 - 0{,}947x - 3{,}699},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 0{,}471}.$$

Für die Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von x kommt es auf die Werte dieser Funktionen und ihrer Ableitungen für $x = 0$ an. Sie werden

	f_0	f_0'	f_0''	f_0'''	f_0^{IV}	φ_0
H_2	− 3,202	+ 4,61	− 27,21		− 1795	− 3,23
O_2	− 1,555	+ 2,16	− 7,34	+ 140	− 291,4	− 2,52
N_2	− 0,911	+ 1,32	− 2,99		− 88,9	− 2,13

Hiermit hängen enge zusammen die in (13) und (11) definierten Funktionswerte von F und G:

	F_0	F_0'	F_0''	G_0	G_0'
H_2	− 6,404	− 27,21	−299,2	− 9,63	− 37,63
O_2	− 3,110	− 7,34	− 48,6	− 5,63	− 13,69
N_2	− 1,822	− 2,99	− 14,81	− 3,95	− 7,53

Mit ihrer Hilfe sind nach (12) und (12a) die Koeffizienten A und B in der Cauchyschen Dispersionsformel

$$n - 1 = A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

gegeben. Für den universellen Faktor unserer Formel wurde benutzt

$$\frac{Ne^2}{m} = 6{,}85 \cdot 10^{27}.$$

Diese Formel lautet nach Rechnung und Beobachtung[1])

H_2:

$$\text{ber.} \quad n - 1 = \frac{2{,}76 \cdot 10^{29}}{\omega^2}\left(1 + \frac{13{,}9 \cdot 10^{26}}{\omega^2 \lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.} \quad = 1{,}361 \cdot 10^{-4}(1 + 7{,}60 \cdot 10^{-11}).$$

O_2:

$$\text{ber.} \quad n - 1 = \frac{3{,}22 \cdot 10^{29}}{\omega^2}\left(1 + \frac{8{,}63 \cdot 10^{22}}{\omega^2 \lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.} \quad = 2{,}66 \cdot 10^{-4}(1 + 7{,}02 \cdot 10^{-11}).$$

1) Es sind benutzt: Für H_2, J. Koch, Arkiv för Matem. usw. 8. Nr. 20. 1912; für O_2 und N_2, C. und M. Cuthbertson, Proc. R. Society 83. p. 164. 1909.

N_2:

$$\text{ber.}\quad n-1=\frac{3{,}40\cdot 10^{20}}{\omega^2}\left(1+\frac{6{,}75\cdot 10^{22}}{\omega^2\lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.}\quad =2{,}94\cdot 10^{-4}(1+5{,}26\cdot 10^{-11}).$$

Die Gültigkeit der Mechanik und Elektrodynamik wird durch das von der Umlaufgeschwindigkeit ω und daher von der Quantentheorie unabhängige Verhältnis B/A beleuchtet.

	B/A ber.	B/A beob. Cuthbertson[1])	B/A beob. J. Koch[2])
H_2	$5{,}03\cdot 10^{-7}$	$5{,}32\cdot 10^{-7}$	$5{,}58\cdot 10^{-7}$
O_2	$2{,}68\cdot 10^{-7}$	$2{,}64\cdot 10^{-7}$	$2{,}58\cdot 10^{-7}$
N_2	$1{,}99\cdot 10^{-7}$	$1{,}79\cdot 10^{-7}$	$1{,}76\cdot 10^{-7}$

Beim Vergleich mit der Drudeschen isotropen Theorie betrachteten wir das Produkt dieses Verhältnisses in die Valenzzahl μ. Dieses hat rechnungsgemäß nach Drude den universellen Wert (6). Wir mußten nach Gl. (12a), wenn wir überhaupt mit einem Mittelwert rechnen wollen, den Faktor $\Phi=1{,}29$ aus Gl. (21) hinzufügen. Die Abweichung dieser Werte von den individuellen Werten von $\mu B/A$ (aus der ersten Spalte der vorigen Tabelle übernommen, nach Multiplikation mit 2, 4, 6) zeigt die nächste Zeile:

	Drude	nach (12a)	H_2	O_2	N_2
$\frac{\mu B}{A}$	$8{,}3\cdot 10^{-7}$	$10{,}7\cdot 10^{-7}$	$10{,}1\cdot 10^{-7}$	$10{,}7\cdot 10^{-7}$	$11{,}9\cdot 10^{-7}$

Die Ausdrücke unserer Theorie für A und B, einzeln genommen, hängen von ω ab und geben damit Aufschluß über die in unseren Modellen wirksamen Quantenbeziehungen. Wir beschränken uns aus Gründen der Meßgenauigkeit auf A und vergleichen unseren theoretischen Wert von A mit dem empirischen. Dadurch ergibt sich der „empirische" oder „dispersionstheoretische" Wert von ω:

	H_2	O_2	N_2
$\omega_{\text{disp.}}$	$4{,}51\cdot 10^{16}$	$3{,}48\cdot 10^{16}$	$3{,}40\cdot 10^{16}$
$\omega_{\text{quant.}}$	$4{,}55\cdot 10^{16}$	$1{,}11\cdot 10^{17}$	$1{,}77\cdot 10^{17}$

1) Wegen H_2 vgl. Proc. R. Soc. 83. p. 151. 1910.
2) Wegen O_2 und N_2 vgl. Arkiv för Matem. usw. 9. Nr. 6. 1913.

In der unteren Zeile ist zum Vergleich der „quantentheoretische Wert" von ω angegeben. Er stimmt nur bei Wasserstoff mit dem dispersionstheoretischen überein. Der von Debye[1]) angegebene dispersionstheoretische Wert $\omega = 4{,}214 \cdot 10^{16}$ ist nicht aus dem Koeffizienten A der Dispersionsformel, sondern aus B entnommen, wodurch sich die etwas weniger gute Übereinstimmung mit dem quantentheoretischen Werte erklärt.

Der quantentheoretische Wert von ω ist aus der Forderung für das Impulsmoment p

$$2\pi p = 2\pi m a^2 \omega = h \tag{73}$$

berechnet. Indem man diese Gleichung kombiniert mit den Gl. (9) und (10) für ϱ

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{m a^3 \omega^2}{e^2} = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{2} - \sigma\right) \tag{73a}$$

kann man a eliminieren und ω berechnen. Es ergibt sich

$$\omega_{\text{quant.}} = \frac{(2\pi)^3 m e^4}{\varrho^3 h^3} = \frac{4\pi N e}{\varrho^2}, \tag{74}$$

wo

$$N = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} = 1{,}097 \cdot 10^5 \tag{74a}$$

die (im cm^{-1} gemessene) Rydbergsche Zahl bedeutet. Die Verschiedenheit der Werte von $\omega_{\text{quant.}}$ für H_2, O_2 und N_2 spiegelt also die verschiedene Größe von ϱ für diese Modelle wider. Unserer quantentheoretischen Berechnung von ω liegt die Annahme zugrunde, daß die Quantenbedingung für jedes einzelne Elektron des Ringes genau so wie für das Elektron im Wasserstoffatom gelte, eine Annahme, welche nach 4. am Schlusse des vorigen Paragraphen bedenklich ist. Wir sehen also in der Unstimmigkeit von $\omega_{\text{disp.}}$ und $\omega_{\text{quant.}}$ bei O_2 und N_2 keinen Einwand gegen diese Modelle, um so weniger, als wir in § 14 diese Unstimmigkeit in eine (empirische) Gesetzmäßigkeit auflösen werden.

§ 13. Magnetische Drehung in H_2, O_2 und N_2. Bestätigung des empirischen Wertes von ω.

Die Berechnung der magnetischen Drehung nach Gl. (88) (richtiger Quantenansatz des § 7) erfordert die Kenntnis der

1) P. Debye, l. c. Sitzungsber. d. Münch. Akad. p. 21.

in der folgenden Tabelle zusammengestellten Größen, die unmittelbar aus den Angaben des vorigen Paragraphen hervorgehen.

	H_2	O_2	N_2
$\varphi_0 F_0 - \frac{1}{2} F_0'$	34,3	11,51	5,36
$\varphi_0 F_0' - \varphi_0^2 F_0 - \frac{1}{2} F_0''$	304,3	62,5	21,9

Hiernach läßt sich die Formel (38) für die Verdetsche Konstante V leicht auswerten. Als Wert von e/mc wurde benutzt $1{,}77 \cdot 10^7$. Wir schreiben wie früher in Gl. (27)

$$V = \frac{V_1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{V_2}{\lambda^2}\right)$$

und stellen unsere theoretische Darstellung mit den empirischen Formeln von Siertsema[1]) zusammen

H_2:

$$\text{ber.}\quad V = \frac{206 \cdot 10^{47}}{\omega^4 \lambda^2}\left(1 + \frac{31{,}0 \cdot 10^{23}}{\omega^2 \lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.}\quad = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 60} \cdot \frac{1{,}033}{85} \cdot \frac{282{,}5}{273}\left(\frac{151}{\lambda^2} \cdot 10^{-8} + \frac{2{,}38}{\lambda^4} \cdot 10^{-16}\right).$$

O_2:

$$\text{ber.}\quad V = \frac{138 \cdot 10^{47}}{\omega^4 \lambda^2}\left(1 + \frac{19{,}5 \cdot 10^{23}}{\omega^2 \lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.}\quad = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 60} \cdot \frac{1{,}033}{100} \cdot \frac{280}{273}\left(\frac{296{,}7}{\lambda^2} \cdot 10^{-8} - \frac{48{,}03}{\lambda^4} \cdot 10^{-16}\right).$$

N_2:

$$\text{ber.}\quad V = \frac{96{,}6 \cdot 10^{47}}{\omega^4 \lambda^2}\left(1 + \frac{1{,}4 \cdot 10^{23}}{\omega^2 \lambda^2}\right),$$

$$\text{beob.}\quad = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 60} \cdot \frac{1{,}033}{100} \cdot \frac{287}{273}\left(\frac{183{,}6}{\lambda^2} \cdot 10^{-8} + \frac{2{,}27}{\lambda^4} \cdot 10^{-16}\right).$$

Zu den Beobachtungswerten ist zu bemerken: Der Faktor $\pi/180 \cdot 60$ rührt von der Umrechnung der Minuten auf Bogenmaß her; der Faktor 1,033/85 bzw. 1,033/100 entspricht der Reduktion des Beobachtungsdruckes (85 bzw. 100 kg) auf den Druck einer Atmosphäre nach dem Mariotteschen Gesetze, ebenso der nächste Faktor der Reduktion der Beobachtungstemperatur auf 0° C nach dem Gay-Lussacschen Gesetze.

1) L. H. Siertsema, Mesures de la polarisation rotatoire de l'oxygène et d'autres gaz. Archives Néerlandaises 2. p. 291. 1899.

Die Faktoren 10^{-8}, 10^{-16} usw. waren hinzuzufügen, weil Siertsema λ in μ gemessen voraussetzt. Die nach ungeraden Potenzen von λ fortschreitenden Formeln Siertsemas waren hier nicht zu berücksichtigen; die Formeln für O_2, die bei Siertsema dreigliedrig ist und bis λ^{-6} geht, wurde in der obigen Zusammenstellung auf zwei Glieder gekürzt, da auch unsere theoretische Formel nur auf zwei Glieder berechnet ist.

Man kann nun entweder ω aus den beiden Gliedern von V eliminieren (ω bedeutet hier offenbar dasselbe wie ω_0 in § 6, nämlich die Umlaufgeschwindigkeit in der feldfreien Molekel). Dies ist früher in Gl. (40) geschehen, soll aber wegen der geringen Meßgenauigkeit des zweiten Gliedes hier im einzelnen nicht wiederholt werden. Der Vergleich mit der Erfahrung würde wenig befriedigend ausfallen, besonders bei O_2, wie sich aus den sogleich anzugebenden Werten von $V_1 V_2$ ergibt. Oder aber: Man setzt ω aus den Beobachtungen des Brechungsvermögens in V ein, entnimmt also $\omega = \omega_{disp.}$ dem vorigen Paragraphen und vergleicht die so entstehenden theoretischen Werte von V_1 und V_2 mit den empirischen.

	H_2	O_2	N_2
ber. V_1 =	$482 \cdot 10^{-30}$	$940 \cdot 10^{-30}$	$722 \cdot 10^{-30}$
beob. =	$578 \cdot 10^{-30}$	$918 \cdot 10^{-30}$	$580 \cdot 10^{-30}$
ber. $V_1 V_2$ =	$7{,}35 \cdot 10^{-23}$	$+1{,}51 \cdot 10^{-27}$	$9{,}05 \cdot 10^{-27}$
beob. =	$8{,}96 \cdot 10^{-23}$	$-1{,}48 \cdot 10^{-26}$	$7{,}17 \cdot 10^{-23}$

Die Übereinstimmung von V_1 kann, angesichts der Schwierigkeit der Messungen, als gut bezeichnet werden, besonders bei O_2. $V_1 V_2$ stimmt nur für H_2 überein; bei N_2 weicht die Zehnerpotenz ab, bei O_2 außerdem das Vorzeichen. Die Abweichungen können zum Teil jedenfalls auf die Willkür beim Abbrechen der Interpolationsformel geschoben werden: wenn Siertsema bei O_2 statt der dreigliedrigen die entsprechende zweigliedrige Formel wählt, findet er Werte von V_1 und $V_1 V_2$, die um 25 Proz. bzw. 52 Proz. niedriger liegen wie die hier benutzten. Es ist klar, daß dem Vergleich mit der Theorie eigentlich eine Formel mit unendlich vielen Gliedern zugrunde zu legen wäre, da ja auch unsere theoretische Formel eigentlich eine unendliche Potenzreihe bedeutet.

Immerhin muß betont werden, daß unsere Modelle für O_2 und N_2 in Hinsicht auf den Koeffizienten V_2 die Prüfung an der Erfahrung schlechter bestehen wie das Modell von H_2.

Die gute Übereinstimmung im Werte von V_1 ist deshalb bedeutsam, weil sie zeigt: *der für das Brechungsvermögen erforderliche Wert von ω, unser $\omega_{disp.}$, ist auch geeignet, die magnetische Drehung darzustellen.* Hätten wir V_1 statt mit $\omega_{disp.}$ mit $\omega_{quant.}$ berechnet, so hätten wir, außer bei H_2, wo beide Werte zusammenfallen, eine sehr starke Abweichung gefunden — man beachte, daß in V_1 die vierte Potenz von ω eingeht.

Wir können direkt so verfahren, daß wir durch Vergleich des beobachteten Wertes von V_1 (vgl. die letzte Tabelle) mit dem theoretischen, den Nenner ω^4 enthaltenden Werte von V_1 (vgl. die vorletzte Tabelle) einen Wert $\omega_{magn.}$ berechnen, der also die aus der magnetischen Drehung bestimmte Umlaufgeschwindigkeit bedeutet. *Dieses $\omega_{magn.}$ stimmt sehr genau mit unserem $\omega_{disp.}$ überein*; dies zeigt die folgende Zeile im Vergleich zu der letzten Tabelle des vorigen Paragraphen:

	H_2	O_2	N_2
$\omega_{magn.}$	$4{,}34 \cdot 10^{16}$	$3{,}50 \cdot 10^{16}$	$8{,}59 \cdot 10^{16}$

Bei O_2 ist die Übereinstimmung am besten; aber auch bei H_2 und N_2 ist sie völlig befriedigend.

Wir haben uns, wenn auch in anderer Einkleidung, schon in § 7 von dieser Übereinstimmung überzeugt, als wir das Verhältnis $\mu V_1/A^2$ bildeten [Gl. (41) und die anschließende Tabelle], um auf diese Weise den Faktor ω^4 zu eliminieren. In der Tat bedeutet die gute Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und berechneten Werte von $\mu V_1/A^2$ in unserer jetzigen Ausdrucksweise nichts anderes als die annähernde Gleichheit zwischen $\omega_{disp.}$ und $\omega_{magn.}$

Sodann haben wir die numerischen Unterlagen zu geben zur Abweisung des abgeänderten und theoretisch unhaltbaren Quantenansatzes aus § 8. Nach Gl. (58) hat er zur Folge, daß zu dem früheren Ausdruck in der Darstellung von V_1

$$\varphi_0 F_0 - \tfrac{1}{2} F_0' \quad \text{hinzutritt} \quad -\tfrac{3}{2} f_0'.$$

Wir tabellieren daher

	H_2	O_2	N_2
f_0'	4,61	2,16	1,32
$\varphi_0 F_0 - \frac{1}{2} F_0'$	34,3	11,51	5,36
$\varphi_0 F_0 - \frac{1}{2} F_0' - \frac{1}{2} f_0'$	13,5	1,76	− 0,59
V_1'	$190 \cdot 10^{-30}$	$143 \cdot 10^{-30}$	$-75 \cdot 10^{-30}$

Das neue V_1' ergibt sich, wenn wir das Verhältnis der beiden darüber stehenden Zahlen

$$\left(\text{z. B. bei } H_2 \ \frac{13{,}5}{34{,}5}\right)$$

multiplizieren mit dem früheren V_1 ($482 \cdot 10^{-30}$ bei H_2). Offenbar sind die neuen Werte V_1, verglichen mit den Beobachtungswerten der vorigen Tabelle, völlig unzulässig; sie fallen viel zu klein aus, und zwar mit zunehmendem μ in zunehmendem Maße. Denselben Gang, bis zu negativen Werten von V_1 bei N_2, bemerkten wir auch in der Tabelle am Ende des § 8 für $\mu V_1/A^2$ bei dem gleichen Quantenansatz. *Dieser Quantenansatz ist somit auch empirisch abgetan.*

Auffallend ist der negative Beobachtungswert von V_2 bei Sauerstoff. Wenn wir auch nach Obigem die Sicherheit von V_2 nicht hoch einschätzen dürfen, so haben wir uns doch gefragt, ob vielleicht das besondere Verhalten von O_2 mit der paramagnetischen Ausnahmestellung von O_2 zusammenhängen könne. Zwar dürfen wir nach Kapitel II § 10 nicht annehmen, daß sich die Molekelachsen mit dem vollen, aus der Suszeptibilität gerechneten Werte der paramagnetischen Konstanten p [Gl. (67) und (69)] einstellen. Aber es wäre doch möglich, daß von der magnetischen Einstellung der Kerne her eine gewisse sekundäre Einstellung auf die Molekelachse induziert würde. Wir können dann so vorgehen, daß wir aus dem empirischen Werte von V_2 ein p nach Gl. (72) berechnen und zusehen, ob dieses p mit dem empirischen Werte von V_1 verträglich ist. Das Ergebnis ist in unserem Falle verneinend: Wir berechnen bei O_2 aus dem negativen V_2 ein (negatives) p, welches, in den Ausdruck für V_1 eingesetzt, diesen ebenfalls negativ machen würde — im vollen Gegensatze zu der Erfahrung. Die Besonderheit von O_2 bezüglich der Konstanten V_2 bleibt also hier ungeklärt.

§ 14. Vermutung über das Verhältnis des empirischen und quantentheoretischen Wertes von ω.

Welche Schlüsse können wir aus den gewonnenen Erfahrungen ziehen auf die in der Molekel herrschenden Quantenbeziehungen? Durch welches Gesetz bestimmt sich unser Wert $\omega_{disp.}$ bei O_2 und N_2? Bei H_2 ist dieses Gesetz bekannt. Es lautet

$$2\pi p = h\,, \qquad p = m a^2 \omega\,. \tag{75}$$

Bei O_2 und N_2 jedoch weicht das nach diesem Gesetze berechnete $\omega_{quant.}$ stark von dem wirklichen $\omega_{disp.} = \omega_{magn.}$ ab. Wir wollen nun zu dem in (75) definierten $p = p_{quant.}$ einen „dispersionstheoretischen" Wert von p hinzudefinieren, dadurch gegeben, daß wir in $p = m a^2 \omega$ nehmen $\omega = \omega_{disp.}$ und a durch Gl. (73a) (mechanisches Gleichgewicht beim Umlauf im Kreise a) mittels $\omega_{disp.}$ ausdrücken. Aus (73a) ergibt sich so:

$$a^3 = \left(\frac{e^4}{m^3 \varrho^2 \omega^4}\right)^{1/3}, \quad p_{disp.} = m (a^2 \omega)_{disp.} = \left(\frac{m e^4}{\varrho^2 \omega_{disp.}}\right)^{2/3}. \tag{76}$$

Der Zusammenhang zwischen $p_{disp.}$ und $p_{quant.}$ wird am deutlichsten, wenn wir das Verhältnis bilden:

$$\frac{p_{disp.}}{p_{quant.}} = \left(\frac{8\pi^3 m e^4}{\varrho^2 h^3 \omega_{disp.}}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi N c}{\varrho^2 \omega_{disp.}}\right)^{1/3}. \tag{77}$$

Hier bedeutet N, wie in (74a), die Rydbergsche Zahl (cm^{-1}), also $N c/\omega$ das Verhältnis zweier Frequenzen, der universellen Rydbergfrequenz zu unserer speziellen Umlauffrequenz. Die Zahlenwerte, die sich für (77) mittels der ersten und letzten Tabelle von § 12 ergeben, sind äußerst bemerkenswert:

	H_2	O_2	N_2
$\frac{p_{disp.}}{p_{quant.}} =$	1,10 $= \sqrt{1}$	1,47 $= \sqrt{2}$	1,74 $= \sqrt{3}$

Man kann nicht umhin, zu vermuten, daß hiernach für einen Ring von μ Elektronen allgemein gelte

$$p = p_{disp.} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, p_{quant.} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, \frac{h}{2\pi}\,,$$

also an Stelle von (75)

$$2\pi p = h\sqrt{\frac{\mu}{2}}. \tag{78}$$

$\mu/2$ bedeutet hier die Anzahl der Elektronen im äußeren Ringe der beiden gleichen Atome, die zu unserer Molekel zusammengetreten sind. Man müßte also annehmen, daß die wahre Quantenbedingung für das Impulsmoment durch die Konstitution des einzelnen Atoms vorgezeichnet ist und bei der Bildung der Molekel erhalten bleibt. Die Vorstellung ist sonderbar, läßt sich aber durch die Adiabaten-Hypothese stützen (vgl. Nachtrag). Wir sprechen daher die folgende Regel mit allem Vorbehalt und nur als empirische Vermutung aus:

Die Bohr-Nicholsonsche Regel

$$2\pi p = h$$

gilt nur bei der Wasserstoffmolekel ($\mu = 2$) *und ist für einen allgemeinen Ring von* $\mu = 2n$ *Elektronen, der durch zwei gleiche Atomringe der Elektronenzahl* n *entstanden ist, zu ersetzen durch die Forderung*

$$2\pi p = h\sqrt{n}. \tag{79}$$

Eine theoretische Begründung dieses allgemeinen Quantenansatzes wurde nicht versucht.

§ 15. Anhang über die mutmaßliche Konstitution von He.

Debye hat bereits in seiner Arbeit über die Dispersion von H_2 hervorgehoben, daß das Bohrsche Modell von He (zwei in gleichem Abstande um den Kern diametral umlaufende Elektronen) unmöglich richtig sein kann. Einer brieflichen Mitteilung von P. Epstein (Frühjahr 1916) verdanke ich den Hinweis, daß man zu einer besseren Darstellung der Dispersion von He durch folgendes Modell gelangt, das übrigens auch meiner Ableitung[1]) der Ritzschen Spektralformel und ihrer Anwendung auf das He-Spektrum zugrunde liegt: von den beiden Elektronen ist eines fest gebunden, in der Nähe des Kernes, das andere lose gebundene läuft auf einem Kreise in verhältnismäßig großem Abstande um den Kern herum.

1) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. Münch. Akad. 1916. p. 153.

Das Modell ist dann für optische Zwecke wesentlich identisch mit dem Wasserstoffatom, für welches ich die Dispersionsformel entwickelt habe (Elster und Geitel-Festschrift p. 578). Die beiden für die Dispersion maßgebenden Funktionen f und φ lauten hier einfach

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + 1/2}{(x-1)^2\, x(x+2)}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Gl. (7) gibt daraufhin bei der Entwicklung nach Potenzen von

$$x = \frac{s}{\omega}$$

$$n^2 - 1 = \frac{11\pi N e^2}{m\omega^2}\left(1 + \frac{75}{44}x^2\right) = \frac{11\pi N e^2}{m\omega^2}\left(1 + \frac{75}{44}\frac{4\pi^2 c^2}{\omega^2 \lambda^2}\right).$$

Man entnimmt daraus für die Koeffizienten A und B der Cauchyschen Dispersionsformel die folgenden Werte:

$$A = \frac{118{,}8}{\omega^2} \cdot 10^{27}, \quad B = \frac{612}{\omega^2} \cdot 10^{30},$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{ber.}} = 5{,}2 \cdot 10^{-7}.$$

Andererseits geben Cuthbertson und Metcalfe[1]) für He die folgende empirische Dispersionsformel an:

$$n - 1 = 3{,}47 \cdot 10^{-5}\left(1 + \frac{2{,}4 \cdot 10^{-11}}{\lambda^2}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{beob.}} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}.$$

Die Übereinstimmung mit dem berechneten Werte ist nicht sehr gut, aber viel besser als bei dem Bohrschen Heliummodell. Durch Vergleich des berechneten und beobachteten Wertes von A ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{118{,}8}{3{,}47}} \cdot 10^{16} = 5{,}84 \cdot 10^{16}.$$

Der quantentheoretische Wert von ω für das Wasserstoffatom würde sein

$$\omega = 4{,}14 \,.\, 10^{16}.$$

---

1) C. Cuthbertson u. E. Metcalfe, R. Soc. Proc. 80. p. 411. 1908.

Auch hier zeigt sich eine ungefähre Übereinstimmung. Wir können also sagen: Das Heliumatom ist in optischer Hinsicht entsprechend der Epsteinschen Bemerkung dem Wasserstoffatom vergleichbar. Die nicht unbeträchtlichen Abweichungen müßte man dabei auf Störungen des äußeren Elektrons durch das fest gebundene innere schieben. Die chemisch-träge Natur des He-Atoms wird aber durch unser Modell offenbar in keiner Weise wiedergegeben.

Nachtrag bei der Korrektur.

Man koppele zwei gleiche parallel gestellte Ringe (Atome) von je n Elektronen durch einen unendlich langsamen Prozeß zu einem Ringe (einer Molekel) von $2n$ Elektronen. Nach der Adiabaten-Hypothese gelten für einen solchen Prozeß die Gesetze der Mechanik, insbesondere der Flächensatz. Ist p_n das Impulsmoment im Atom, p_{2n} dasjenige in der Molekel, beide berechnet für das einzelne Elektron, so gilt also

$$2n\,p_{2n} = n\,p_n + n\,p_n \quad \text{oder} \quad p_{2n} = p_n .$$

Hierdurch wird die in § 14 als sonderbar bezeichnete Vorstellung von der Persistenz des atomaren Impulsmomentes in dem Molekularverbande gerechtfertigt. Insbesondere ist also der Ansatz $2\pi p = h$ für die H_2-Molekel dadurch bestätigt und der Einwand 4 von p. 538 für dieses Modell behoben. Dagegen wird das Auftreten von $\sqrt{n}$ in unserer Gl. (79) nur in so weit geklärt, daß die Rolle der atomaren Elektronenzahl n in der molekularen Quantenbedingung verständlich wird, nicht aber diese Quantenbedingung selbst.

Wendet man dieselbe Überlegung auf den Zusammentritt zweier ungleicher Atome (Elektronenzahl n und m der äußeren Ringe) an, so ergiebt sich unter Benutzung von (79):

$$(80)\quad (n+m)p_{n+m} = n\,p_n + m\,p_m, \quad p_{n+m} = \frac{n\sqrt{n} + m\sqrt{m}}{n+m}\,\frac{h}{2\pi}.$$

Für NO ($n=3$, $m=2$) würde auf diese Weise folgen:

$$p_5 = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{h}{2\pi} = 1{,}61 \cdot p_{\text{quant.}}.$$

Tatsächlich ergiebt sich aus Messungen von Cuthbertson für NO:

$$\omega_{\text{disp.}} = 3{,}09 \cdot 10^{16}, \quad p_{\text{disp.}} = 1{,}74 \cdot p_{\text{quant.}}.$$

Die Abweichung dieser Zahl von der soeben berechneten (1,74 gegen 1,61) ist nicht größer als die entsprechende Abweichung bei H_2, vgl. die Tabelle in § 14 (hier 8%, dort 10%).

Somit scheint sich unsere empirische Regel (79) bzw. ihre sinngemäße Verallgemeinerung (80) noch in einem weiteren Falle zu bewähren. Dagegen läßt sie sich. soviel ich sehe, mit den Tatsachen der Röntgenspektren durchaus nicht in Einklang bringen.

Geometrisch bedeutet unsere Regel nach einer freundlichen Mitteilung von Hrn. F. Pauer, daß der Radius a eines Atoms mit n äußeren Elektronen von n unabhängig, also gleich dem Radius des Wasserssoffatoms wäre, in derjenigen Näherung, mit der man die Abschirmung der effektiven Kernladung durch die äußeren Elektronen gegen diese Ladung selbst vernachlässigen darf.

(Eingegangen 2. August 1917.)

2. *Der kritische Weg zur Feststellung der Existenz einer Atomistik der Elektrizität.*[1]) *(Erörtert an Ölkügelchen);*

von Irene Pankiewicz.

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Das Gesetz der ganzzahligen Vielfachen. — § 3. Die Einengungsmethode im Gebiete der Elektrizität. — § 4. Untersuchungen am Öl. a) Versuche. b) Die Ladungen. c) Ergebnisse der Einengungsmethode. — § 5. Zusammenfassung.

---

§ 1. Einleitung.

Einer der charakteristischen Züge der modernen Physik ist das Streben, die atomistische Vorstellung in möglichst viele Gebiete zu übertragen. Materie, strahlende Energie, Magnetismus und Elektrizität sollen nach den heute vielfach geltenden Anschauungen aus einzelnen, diskreten, abzählbaren Individuen, unteilbaren, gleichen Bausteinen oder Atomen bestehen.

Die Materie, der magnetische Zustand und die strahlende Energie sind einem direkten Experimente, durch welches ein einziges ihrer Atome isoliert und messend verfolgt werden könnte, unzugänglich, im Gebiete der Untersuchungen des elektrischen Zustandes haben sich dagegen solche Methoden entwickelt.

Ehrenhaft stellte zu diesem Zwecke sehr kleine geladene materielle Träger her, bestimmte die Größe (Kapazität) der Träger und gleichzeitig die Größe ihrer Ladungen. Er[2]) erhielt an den kleinen Metallkügelchen alle Ladungszustände bis in die Größenordnung 10^{-11} elektrost. Einh. und darunter.

---

1) Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften auszugsweise mitgeteilt.

2) F. Ehrenhaft, Anzeiger VII d. Wien. Ak. d. Wiss. vom 4. März 1909; Wiener Berichte. 119. IIa Mai 1910; Physik. Zeitschr. 11. p. 619. 1910; Verhandl. d. Deutschen physik. Gesellschaft. 15. p. 1187—1202. 1913; Wiener Ber. 123. p. 55. 1914.

Aus den Messungen Millikans[1]) an großen Flüssigkeitsteilchen ergaben sich sodann relativ höhere Ladungen, die dieser Autor als Multipla des von der Theorie statuierten elementaren Quantums $\varepsilon = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. deutete.[2])

Daher scheint zur Lösung dieses Widerstreites die Beantwortung einer Frage hervorragend geeignet, welche an den relativ großen Öltröpfchen, wie sie Millikan beobachtet, bisher noch nicht mit wünschenswerter Exaktheit erwogen wurde, der Frage, ob man überhaupt berechtigt ist, die höheren Ladungen als Vielfache eines theoretisch erwarteten Ladungsquantums bei $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. anzusehen und dementsprechend die Teilung der höheren Ladungen nach diesem Quantum vorzunehmen.

Nun haben Ehrenhaft[3]) und Konstantinowsky[4]) an den Ladungen, deren viele schon an sich kleiner sind als das von der Theorie statuierte Quant $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. ein mathematisch vollkommen abgeschlossenes und in seinen physikalischen Grundlagen einfaches Verfahren erörtert, das über die Berechtigung Aufklärung gibt, jeder der verschiedenen Ladungen, welche dasselbe Partikel beim Umladen hintereinander annimmt, eine bestimmte Vielfachheit ihrer eventuellen Zusammensetzung aus elementaren Quanten zuzuschreiben, d. h. das größte gemeinschaftliche Maß dieser Ladungen aufzusuchen.

Es muß demnach auf diesem, ganz objektiven Wege nicht nur bei kleinen, sondern auch bei großen Elektrizitätsladungen möglich sein, ein solches gemeinschaftliches Maß zu

1) R. A. Millikan, Physik. Zeitschr. **11.** p. 1097. Dez. 1910; Phys. Rev. **32.** Nr. 4. April 1911; Physik. Zeitschr. **14.** p. 796—812. 1913; Phys. Rev. **2.** Nr. 2. August 1913; Ann. d. Phys. **50.** p. 729—768. 1916; Phys. Rev. **8.** Nr. 6. p. 595. 1916.

2) Unter den von Millikan publizierten Ölpartikeln befindet sich nur ein einziges (R. A. Millikan, Ann. d. Phys. **50.** p. 760. 1916. Tab. II), das unmittelbar nach seiner Erzeugung eine Ladung von der Größenordnung $4{,}75 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. trug; auch sehr selten (4—5mal) kommen bei Millikan Ladungen vor, die dem doppelten oder dem dreifachen Elementarquantum gleich sein sollten. Sonst beruhen die Schlüsse dieses Autors auf Messungen von Ladungen, die bis 130mal größer sind, als das vermutete elementare Quant der Elektrizität.

3) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. **123.** (IIa) p. 75—82. 1914; Physik. Zeitschr. **16.** p. 227. 1915.

4) D. Konstantinowsky, Wiener Ber. **123.** (IIa) p. 1708. 1914; Ann. d. Phys. **48.** p. 57. 1915.

bestimmen und auf diesem Wege Schlüsse über die Konstitution der Elektrizität zu machen.

In vorliegender Arbeit soll nun versucht werden:

1. Das *allgemeine* kritische Verfahren zu erörtern, welches auf jedes Gebiet, wo Atomistik konstatiert werden soll, anwendbar ist und welches jeder Größe des betreffenden Gebietes eine Zahl zuordnet, die im Falle der Atomistik — worüber die Methode in gewissem Grade auch entscheiden müßte — als Vielfachheit der Zusammensetzung dieser Größe aus den elementaren Quanten aufgefaßt werden kann.

2. Die Methode im Speziellen auf das Gebiet der Elektrizität anzuwenden.

Die erste Frage, die Bestimmung der Vielfachheit der Zusammensetzung, fällt mit der strengen Formulierung des Gesetzes der ganzzahligen Vielfachen (relative Atomistik) zusammen.

Die Versuche auf dem Gebiete der Elektrizität werden so zu führen sein, daß ein Mangel an Kritizismus bei der Feststellung der Atomistik der Elektrizität — falls ein solcher den bisherigen Untersuchungen an großen Materieteilchen anhaften sollte — zum Vorschein kommen müßte. Als zu untersuchende Materie wurde aus diesem Grunde Öl, das von Millikan als für Bestimmungen des Elementarquantums besonders geeignet bezeichnet wurde, gewählt. Die Versuche werden vielleicht um so mehr Interesse in Anspruch nehmen dürfen, als es sich beim Öl[1]) um jene einzige Substanz handelt, an welcher das Elementarquantum mit erreichbarster Präzision bestimmt worden sein soll — an anderen Materialien gelang dies nicht —, obwohl die genauere Diskussion auch hier gezeigt hat, daß diese Versuche an Öltröpfchen keineswegs untereinander übereinstimmende Resultate geliefert haben.[2])

1) E. Regener, Physik. Zeitschr. 12. p. 135. 1911; H. Fletcher, Physik. Zeitschr. 12. p. 202. 1911; Phys. Rev. 33. August 1911; Phys. Rev. N. S. 4. Nr. 5. Nov. 1914; Physik. Zeitschr. 16. p. 316. 1915; F. C. Eyring, Phys. Rev. p. 412. 1915; A. Schidlof u. Mlle. Murzynowska, Arch. Sc. phys. nat. 15. Nov.-Dez. 1915; A. Schidlof u. A. Targonski, Physik. Zeitschr. 17. p. 376. 1916.

2) In allen diesen Arbeiten wurden größere Ladungen durch willkürliche Repartitionszahlen als Multipla des vorausgesetzten Elektrons dargestellt. Schon I. Roux (Ann. chim. phys. 8. p. 69—123. 1913) hat aber hervorgehoben, daß dieser Weg keine präzise Methode zur Bestimmung

§ 2. Das Gesetz der ganzzahligen Vielfachen.

Ist ein Gebiet atomistisch aufgebaut, so sind alle seine Größen Multipla desselben Atoms, d. h. jeder Größe ordnet sich eine ganze Zahl als ihre Vielfachheit zu, und mehrere Größen müssen sich wie diese ganzen Zahlen verhalten; und umgekehrt: soll in irgendwelchem Gebiete die Atomistik konstatiert werden, so muß man zunächst untersuchen, ob sich jede in der Nähe des vermuteten Quantes gemessene Größe desselben als Multiplum einer kleineren nach der Beziehung:

$$a = n\,a$$

darstellen läßt. Offenbar werden die Schlüsse um so weniger verläßlich, je größer die Zahlen n sind. Die Existenz einer solchen ganzen Zahl n, der Vielfachheit, ist eine notwendige,

---

von e bildet. So hat z. B. Regener, dessen Versuchsanordnung am meisten an die von Ehrenhaft benützte erinnert, Werte der Ladungen gefunden, die er „zwanglos" zu repartieren versuchte. Daß dies aber nicht gelungen ist, zeigt z. B. die Tatsache, daß er in $5{,}72 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. ein Elektron, in $9{,}54 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. zwei Elektronen erblicken mußte; die Differenz dieser beiden Zahlen beträgt aber 3,82. Schidlof und Murzynowska *eliminieren einfach* jene Messungen, die keine Übereinstimmung mit dem erwarteten Quante zeigen (L. c. Extrait p. 24 .... nous avons écarté celles .... qui montraient des anomalies trop manifestés), indem sie alle Partikel, deren Ladungen Abweichungen von dem theoretischen $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. aufweisen, als Staub ansprechen oder die Abweichungen eventuellen, unbestimmten Veränderungen der Gestalt bzw. der Dichte der Partikel zuschreiben (l. c. Extrait p. 20 .... peut être due à des poussières ou à toute autre cause qui .... a pu modifier la masse ou la forme de la goutte). Millikan (Physik. Zeitschr. 1910. p. 1105 u. 1107), Fletcher (Phys. Rev. **33.** p. 93. 1911) und Eyring (Phys. Rev. 1915. p. 413) geben zwar in ihren Publikationen ausdrücklich an, durch die Art ihrer Reinigungsanordnung Staub von den zur Messung gelangenden Partikelchen auszuschließen; F. Ehrenhaft (l. c. 1914) und F. Zerner (Physik. Zeitschr. **16.** p. 10. 1915 und **17.** p. 165. 1916) wiesen nach, daß auch unter den von Millikan, Fletcher, Eyring gemessenen Ladungen sich solche vorfinden, welche mit dem von diesen Autoren angegebenen Elementarquantum im Widerspruche sind, wenn man die von ihnen nach den Widerstandsgesetzen errechneten Ladungen nach der Theorie der Brownschen Bewegung rechnet und umgekehrt. Nunmehr (l. c. p. 751. 1916) sucht Millikan nach 2 Jahren die Partikel, deren Ladungen zwar vorher zur Ermittlung des von ihnen angegebenen Quantes mitverwendet worden waren, an welchen jedoch Ehrenhaft-Zerner die erwähnten Unterschreitungen und Abweichungen feststellen konnten, als Staub hinzustellen und diese so nachträglich aus den Messungen zu eliminieren.

wenn auch nicht hinreichende Bedingung für die Existenz einer Atomistik des Gebietes; denn die Tatsache allein, daß eine Größe a als Multiplum einer kleineren α darstellbar ist, hat noch nichts an sich, was zur Annahme zwingen würde, daß dieses α ein unteilbares Atom ist. Bestimmt man aber für eine ganze Reihe von Größen a_i desselben Gebietes die Zahlen n_i, und führen die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_1 &= n_1 \alpha \\ a_2 &= n_2 \alpha \\ &\dots\dots \\ a_p &= n_p \alpha \end{aligned}$$

immer zu dem *gleichen* α, so ist es, da alle a aus demselben kleinsten α aufgebaut zu sein scheinen, wahrscheinlich, daß sie atomistisch aufgebaut sind. Soll α die Eigenschaft eines Atomes zugeschrieben werden, so darf es nie vorkommen, daß irgendwelche Größe des Gebietes sich nicht als ein Multiplum von α darstellen läßt. Erst die Erfüllung dieser Bedingung durch eine reiche empirische Erfahrung ist zur Annahme einer atomistischen Struktur des Gebietes hinreichend.

Aus der Beziehung

$$n_i = \frac{a_i}{\alpha} \qquad i = 1, 2, \dots p$$

geht hervor, daß sich die Zahlen n_i um so genauer ergeben werden, je genauer die Größen a_i bestimmt sind.

Man wird sich mit Vorteil einer Methode bedienen, welche die eventuellen Vielfachheiten kritisch zu bestimmen gestattet, und wird jede zu untersuchende Größe zwischen zwei möglichst enge und von Beobachtungsfehlern freie Grenzen einschließen.

Auf diesem Wege erhält man Ungleichungen von der Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} g_1 < a_1 < g_2 \\ h_1 < a_2 < h_2 \\ \dots\dots\dots \\ k_1 < a_p < k_2 \end{cases}$$

Läßt sich auf Grund der im Ungleichungssystem (1) experimentell gegebenen Bedingungen eine fortlaufende Proportion ganzer Zahlen;

$$a_1 : a_2 : \dots : a_p = n_1 : n_2 : \dots : n_p$$

bestimmen, so können dieselben als mögliche Vielfachheiten der Größen a_i gedeutet werden.

Es fällt also die Feststellung der Existenz der notwendigen Bedingung für die atomistische Struktur der Größen a_i, d. h. die Bestimmung der ganzen Zahlen, die im Falle einer Atomistik den betreffenden Größen als ihre Vielfachheiten zugehören müßten, mit nachfolgender Aufgabe zusammen: Es ist für eine Reihe von unbekannten Größen, von denen jede zwischen zwei experimentell gegebenen Grenzen liegt, eine fortlaufende Proportion ganzer Zahlen zu bestimmen.

Dieses Problem läßt sich zahlentheoretisch mit Hilfe der Fareyschen Reihen und im Falle $n = 3$ mit Hilfe der räumlichen Gitterpunkte[1]) — worüber in der Wiener Akademie ausführlich berichtet wurde — immer insofern lösen, als sich immer unendlich viele Verhältnisse ganzer Zahlen finden lassen, welche, den Proportionen entsprechend, den Ungleichungen (1) genügen und zwar unabhängig davon, ob das Gebiet atomistisch aufgebaut ist oder nicht. Jede dieser ganzen Zahlen könnte zunächst im Falle der atomistischen Struktur des Gebietes als Vielfachheit der betreffenden Größe aufgefaßt werden.

Inwiefern aus dieser rechnerisch an den behandelten Größen immer ausführbaren Repartition auf die reale Atomistik derselben geschlossen werden kann, soll im Gebiete der Elektrizität erörtert werden.

§ 3. Die Einengungsmethode im Gebiete der Elektrizität.

Die Einengungsmethode der elektrischen Ladungen wurde von Ehrenhaft[2]) und Konstantinowsky[3]) eingeführt. Sie soll hier noch einmal auseinandergesetzt werden.

Die Messung besteht in der Bestimmung einer Spannung, bei welcher ein geladenes Partikel im elektrischen Felde gerade noch steigt bzw. fällt.

Ist die Ladung des Partikels e, mg sein Gewicht, $\mathfrak{E}$ Feldstärke, bei welcher es der Schwere entgegen von den elektrischen Kräften in die Höhe gezogen wird, so ist

$$e\,\mathfrak{E} > mg\,.$$

Verkleinert man die Spannung an den Kondensatorplatten, so wird schließlich jene Feldstärke erreicht, bei welcher das

1) F. Klein, „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie". 1895. Einleitung.

2) F. Ehrenhaft (l. c. 1914).

3) D. Konstantinowsky (l. c. 1914).

Partikel gerade fällt, d. h. die wirkende Kraft des elektrischen Feldes ist kleiner als die der Schwere:

$$e\,\mathfrak{E}^f < mg\,.$$

Damit ist die Ladung e zwischen zwei Grenzen eingeschlossen:

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^e} < e < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f}\,. \tag{2}$$

Werden nun nach dieser Methode alle Ladungen desselben Partikels, die ihm durch das mehrmalige Umladen aufgezwungen werden, ermittelt, so erhält man eine Reihe von Ungleichungen von der Form:

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}_i^e} < e_i < \frac{mg}{\mathfrak{E}_i^f}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots p,$$

die dem System (1), p. 555, entsprechen.

Die Vielfachheitszahlen n_i werden gefunden, indem man das Verhältnis zweier Ladungen etwa durch die Ungleichungen

$$\frac{\mathfrak{E}_\varkappa^f}{\mathfrak{E}_i^e} < \frac{e_i}{e_\varkappa} = \frac{n_i}{n_\varkappa} < \frac{\mathfrak{E}_\varkappa^e}{\mathfrak{E}_i^f}$$

bestimmt; die Grenzen enthalten das Gewicht mg des Partikels nicht mehr. Die Bestimmung ist demnach zufolge der Eigenart der Grenzen von jedem Experimentalfehler unabhängig. Für diese p *hinter*einander folgenden Ladungen eines Partikels lassen sich *immer* fortlaufende Proportionen:

$$e_1 : e_2 : e_3 : \ldots : e_p = n_1 : n_2 : \ldots n_p$$

bestimmen[1]). d. h. man kann die Beziehung

$$\frac{e_i}{n_i} = \varepsilon = \text{Constans}$$

---

1) Für die fortlaufende Proportion wird sich eine unendliche Zahl von Gruppen der Verhältniszahlen ergeben. Für die Frage der Grenzen der Möglichkeit einer Atomistik kommen nur die kleinsten n in Betracht; übrigens hat Konstantinowsky (l. c. p. 1711. 1914) ein Kriterium angegeben, nach welchem die Bestimmung der Zahlen n_i keinem Zweifel mehr unterliegen kann. Aus den Einengungsbeziehungen (2) folgt nämlich für p-Ladungen desselben Partikels:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{n_1 V_1^e} \\ \frac{1}{n_2 V_2^e} \\ \ldots \\ \frac{1}{n_p V_p^e} \end{array}\right\} < \mu < \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{n_1 V_1^f} \\ \frac{1}{n_2 V_2^f} \\ \ldots \\ \frac{1}{n_p V_p^f}\,, \end{array}\right.$$

wobei $\mu = \frac{\varepsilon}{300\,d\,mg}$ (d die Kondensatorplattendistanz) eine für dasselbe Partikel konstante Größe bedeutet. Diese p-Ungleichungen müssen gleich-

rechnerisch immer auf unendlich viele Arten konstruieren. Es ergibt sich für alle Ladungen desselben Teilchens vollkommen unabhängig davon, ob sie atomistisch aufgebaut sind oder nicht, eine unendliche Menge solcher Zahlen ε', aber

zeitig bestehen. Nur jene Zahlen n, welche diesem Kriterium genügen, dürfen als eventuelle Vielfachheiten der gemessenen Ladungen angesehen werden, alle anderen sind mit den durchgeführten Messungen im Widerspruch.

Die bisher übliche Methode der Bestimmung von Schwebespannungen (vgl. E. Meyer u. W. Gerlach, Ann. d. Phys. **45**. p. 177. 1914; **47**. p. 227. 1915; **48**. p. 718. 1915) oder Steiggeschwindigkeiten (Millikan) ergab Messungen, welche zwar nicht auf eine so einfache ganzzahlige Vielfachheit der beobachteten Ladungen wie dies die betreffenden Autoren deuteten, zu schließen gestatteten, man nahm jedoch stillschweigend an, daß diese Abweichungen auf die unvermeidlichen Meßfehler zurückzuführen seien und unterteilte die gemessenen Ladungen derart, daß sie im Mittel wieder auf das erwartete Quant führten, indem man die entstehenden Abweichungen bis zu 70 Proz. (vgl. D. Konstantinowsky, Ann. d. Phys. **49**. p. 889. 1916) als Beobachtungsfehler vernachlässigte.

Daß dieser Vorgang unstatthaft war, beweisen die Messungen nach der Einengungsmethode, denn nach ihr werden Spannungen bestimmt, welche vom Beobachtungsfehler frei sind, da sie dem Experimente nach mit Sicherheit als kleiner bzw. größer als die Schwebespannungen anzusehen sind: die Schwebespannung kann nur zwischen ihnen liegen. Die Einengungsmethode umgeht also den Beobachtungsfehler, der den Messungen der Schwebemethode als Unsicherheit anhaftete; ihre Resultate müssen daher als vollkommen sicher gelten. Vielfachheitszahlen, welche mit den erhaltenen Ungleichungen nicht im Einklange sind, Ladungen, welchen Schwebespannungen entsprechen, die nicht in das Intervall der beobachteten Grenzspannungen fallen, müssen als willkürliche Annahmen angesehen werden, welche den durchgeführten Experimenten nicht nur nicht entspringen, sondern mit ihnen im Widerspruche stehen.

Ich kann es daher nur auf ein Mißverstehen des Wesens der Einengungsmethode zurückführen, wenn z. B. A. Targonski (La question des sous-électrons, Arch. Sc. phys. nat. **41**. März—Mai 1916. p. 37) statt der von Konstantinowsky (l. c. p. 1740. 1914) gemessenen Einengungsspannungen bei den Part. Nr. 4 und Nr. 7 Schwebespannungen *annimmt*, die nicht in das Intervall der Grenzspannungen fallen, in der Absicht, die gemessenen Ladungen auf diese Weise eher durch Quanten der von ihm erwarteten Art auslegen zu können.

Entbehrte diese Art der Auswertung der nach der Methode der Schwebespannungen erhaltenen Ergebnisse bereits einer näheren Begründung, so muß sie für den Fall der Einengungsmethode geradezu als willkürlich und unzulässig bezeichnet werden, während die von Konstantinowsky angegebenen Zahlen durch die Versuche begründet und die einzig berechtigten sind.

nur *eine größte* Ladung ε, die als Baustein von allen e_i aufgefaßt werden kann. Dieses ε — das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen desselben Partikels — ist die obere Grenze einer eventuellen Elementarladung; denn es existiert keine Ladung

$$\varepsilon' > \varepsilon ,$$

aus welchen die Ladungen dieses Partikels aufgebaut werden könnten.[1])

Die Möglichkeit der Existenz einer kleineren elementaren Ladung ist dagegen nicht ausgeschlossen.

Die Einengungsmethode bestimmt demnach für jede Ladung die eventuelle Mindestvielfachheit und damit auch die obere Grenze der noch zulässigen eventuellen Elementarladung.

Auf Grund dieser Beweisführung kann man daher nur folgende Schlüsse ziehen:

1. Wenn alle an verschiedenen Partikeln gemessenen Ladungen dasselbe ε zulassen, und wenn sich bei keiner elektrischen Ladung eine Größe, die kleiner als ε wäre, vorfindet, so kann dieses ε mit großer Wahrscheinlichkeit als Atom der Elektrizität aufgefaßt werden.

Die Einengungsmethode würde es gestatten, eine solche Atomistik der Elektrizität an entsprechend kleinen Ladungen zu erkennen.

2. Ergeben sich aber für verschiedene Partikel verschiedene ε, so kann man mit Sicherheit nur behaupten, *daß die Atomistik der Elektrizität in der der Methode zugänglichen Größenordnung ausgeschlossen ist.*

Es muß aber nochmals betont werden, daß die bloße Anwendung der Methode auf ein gewisses Gebiet keineswegs mit der Notwendigkeit der Existenz einer Atomistik dieses Gebietes verknüpft ist; denn die Methode gestattet es *immer*, und zwar unabhängig davon, ob das Gebiet atomistisch ist oder nicht, Zahlen n_i und ε zu bestimmen.

Um zu entscheiden, welche von den eben erörterten Möglichkeiten im Falle der Elektrizität vorliegt, sollen an Ölkügelchen, an welchen Millikan die reale Existenz des Elektrizitätsatomes nachgewiesen zu haben glaubt, Erfahrungen gesammelt werden.

---

1) Ein anderes ε wäre mit dem in der Anmerkung p. 557 erörterten Kriterium unverträglich.

§ 4. Untersuchungen am Öl.

a) Versuche.

Die Messungen an Olivenöltröpfchen wurden mit der Versuchsanordnung von Ehrenhaft[1]) ausgeführt. Als Beobachtungsoptik diente ein Mikroskop (Apertur 0,8, Okular 12 von Zeiss). Um einen Vergleich mit der Millikanschen Beobachtungsart zu gewinnen, hatte ich die Ölpartikel auch in einem großen Kondensator durch ein Fernrohr[2]) (Objektiv Achromat, Durchmesser 28 mm, Brennweite 10 cm) beobachtet. Es ergab sich, daß die zu geringe Schärfe, die Verschwommenheit des Bildes, das helle Gesichtsfeld und die große Tiefenverstellung[3]) bedeutende Nachteile der Millikanschen Art der Beobachtung bilden, wie dies auch mehrere Autoren bereits angegeben haben.[4])

Die Öltröpfchen wurden in Luft beobachtet, die durch Vorlagen aus Watte, Glaswolle und H_2SO_4 gereinigt war. Vor jedem Zerstäuben des Öles wurde ein Strom der gereinigten Luft durch den Kondensator geblasen; das Gesichtsfeld des Mikroskopes blieb dabei, auch bei der Untersuchung mit Objektiven hoher numerischer Apertur, *optisch vollkommen leer*. Der zum Zerreißen von Öl verwendete *Luftstrom enthielt* also *keine materiellen Teilchen*. Erst nach dieser Durchprüfung des Gesichtsfeldes wurde das Öl zerstäubt. Die Partikel erscheinen im Mikroskop als helle Pünktchen auf dunklem Hintergrunde. Die großen lichtstarken Tropfen fallen rasch und zeigen gar keine Brownsche Bewegung; die mittleren, lichtschwächeren, weisen meßbare Brownsche Bewegung auf, während die kleinsten wegen Lichtschwäche und relativ starker Brownscher Bewegung nur schwer beobachtet werden können. Die Partikel lassen sich auf den ersten Blick von den metal-

---

1) F. Ehrenhaft (l. c. 1914) bzw. neuerdings Anzeiger 4 der Wiener Akademie der Wissenschaften vom 3. Februar 1916.

2) Nach den Angaben von Millikan, Physik. Zeitschr. 14. p. 799. 1913; Phys. Rev. 2. p. 115. 2. August 1913.

3) Millikan gibt an (l. c.), daß eine Verstellung um $^1/_2$ mm das Bild verwischt; bei dem Ehrenhaftschen Beobachtungssystem tritt das schon bei einer Drehung der Mikrometerschraube um 1 bis 2 Grade ein, während erst die ganze Umdrehung derselben $^1/_8$ mm gibt.

4) A. Schidlof und A. Targonski, Physik. Zeitschr. 17. p. 316. 1916.

lischen Teilchen[1]) unterscheiden; es fehlt ihnen der Metallglanz, ihre Farbe besitzt einen gelblichen, durchscheinenden Ton. Durch das mechanische Zerreißen wird zwar nicht jene Feinheit der Zerteilung erreicht, bei welcher die Resonanzfarben der Einzelpartikel auftreten könnten[2]); es ist aber auch nicht Zweck dieser Untersuchung, die Öltröpfchen des feinsten Verteilungszustandes zu behandeln, denn es sollen gerade Öltröpfchen von jener Größenordnung, auf welcher Millikans Schlüsse beruhen, untersucht werden.

b) Die Ladungen.

Aus der in Luft als widerstehendem Medium gemessenen Fallgeschwindigkeit im Gravitationsfelde und aus der Steiggeschwindigkeit des Partikels im elektrischen Felde ergibt sich nach dem Gesetze von Stokes-Cunningham[3]) Halbmesser a und Ladung e des Öltröpfchens aus den Formeln:

$$a = -\frac{Al}{2} + \sqrt{\left(\frac{Al}{2}\right)^2 + \frac{9\mu v_f}{2\sigma g}},$$

$$e = \frac{6\pi\mu(v_f + v_s)a}{\mathfrak{E}\left(1 + \frac{Al}{a}\right)}.$$

A ist dabei ein Korrektionsfaktor, dessen Wert der Theorie nach zwischen 0,815 und 1,68 liegt.[4])

---

1) F. Ehrenhaft, „Zur Physik des Millionstel Zentimeters", Physik. Zeitschr. 18. p. 352. 1917.

2) Diesbezüglich unterscheiden sich die Ölpartikel auch von den anderen dielektrischen Teilchen, z. B. von den durch Verdampfung hergestellten Schwefel- oder Selen-Kügelchen, deren typische Resonanzfarben ich in der Physik. Zeitschr. 18. p. 567 1917 beschrieben habe.

3) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. A. 83. p. 357. 1910.

4) Millikan (l. c. 1913) setzt die Existenz des Elementarquantums $\epsilon = 4{,}78 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. zunächst *voraus*, berechnet mit Hilfe dieses Wertes die Radien der Partikel und bestimmt dann graphisch für alle Partikel jenen Koeffizienten $A = 0{,}874$, der alle gemessenen Ladungen als Multipla von $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. darzustellen gestattet. Auch Schidlof ist gezwungen bei seinem Verfahren (ce qu'on ne peut faire qu'en admettent à priori l'existence de la charge élémentaire .... l. c. Extrait p. 9) die Existenz eines unteilbaren konstanten Elementarquantums vorauszusetzen und bestimmt rechnerisch einen geeigneten Koeffizienten A.

Es ist nach den Erörterungen dieser Arbeit überflüssig, eigens zu betonen, daß solche Wege nicht kritisch sind. Setzt man die Atomistik, um deren Nachweis es sich erst handelt, voraus, und trägt man diese

Die Werte der Radien und der Ladungen für den Grenzfall $A = 0{,}815$ können als vollkommen zuverlässig angenommen werden, wie dies einerseits die experimentellen auf mechanischen Grundlagen beruhenden Untersuchungen von M. Knudsen und S. Weber[1]) und Mc Keehan[2]) beweisen, welche vollkommen unabhängig von der Frage des Elementarquantums vorgenommen wurden, andererseits hat Ehrenhaft auch einen von den mechanischen Effekten unabhängigen Weg gewiesen, der aus der Farbe des von kleinen Partikeln infolge der optischen Resonanz zerstreuten Lichtes die Größe derselben zu bestimmen gestattet. Die so erhaltenen Werte der Radien stimmen bei den Metallen [Gold[3]), Quecksilber[4]), Silber[5])] und Dielektrizis[6]) mit den aus dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetze für $A = 0{,}815$ erschlossenen vollkommen überein. In dieser Arbeit sind demnach die Radien und die Ladungen der Ölpartikel nur mehr für dieses Widerstandsgesetz angegeben.

Entsprechend ihrer Größe (Kapazität), welche in das Intervall $2-9 \cdot 10^{-5}$ cm (Radien) fällt, tragen die zu vorliegenden Versuchen herangezogenen Ölkugeln im allgemeinen auch höhere Ladungen als dies beispielsweise an den Metallkügelchen, deren Radien ca. 10mal kleiner sind, konstatierbar ist. Ein Vergleich der in Tab. I[7]) (Kolonnen 8, 6, 9 u. 12) verzeichneten Ladungen, die teils solche Ladungen darstellen, welche die Öltröpfchen unmittelbar nach der Erzeugung trugen, teils aber solche, welche den Kügelchen durch Ionisierung des umliegenden Gases erteilt wurden, lehrt, daß auch an Ölkügelchen alle Werte der Ladungen vertreten sind; betont möge werden, daß auch an Kügelchen dieser Größenordnung Werte vorkommen,

---

Annahme in den Rechnungsgang, der zur Ladungsbestimmung dient, bereits hinein, so ist es vollkommen klar, daß im Resultate eine Atomistik vorgetäuscht werden kann. Auch die neuerdings in Phil. Mag. 34. 1917 publizierte Abhandlung Millikans bringt keine neuen Gedanken vor.

1) M. Knudsen u. S. Weber, Ann. d. Phys. 36. p. 981. 1911.

2) Mc Keehan, Physik. Zeitschr. 12. p. 707. 1911.

3) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 15. p. 952. 1914.

4) F. Ehrenhaft, Physik. Zeitschr. 16. p. 227. 1915.

5) G. Laski, Wiener Akad. Ber. 126 (IIa), 1917; Ann. d. Phys. 53. p. 1. 1917.

6) I. Parankiewicz, (l. c.).

7) Die Publikation der ausführlichen Messungsprotokolle erfolgt in den Berichten der Wiener Akademie der Wissenschaften.

Tabelle I.

Nr.	Radius $a \cdot 10^4$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$	Nr.	Radius $a \cdot 10^4$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$	Nr.	Radius $a \cdot 10^4$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$	Nr.	Radius $a \cdot 10^4$ cm	Ladung $e \cdot 10^{10}$
32	24,25	+13,63	9	47,43	+ 6,36	47	60,85	− 6,29	42	76,50	+ 5,94
25	25,62	− 8,59	27	48,23	−12,75	18	61,70	−19,56			−50,70
8	29,68	+ 8,90			−20,00			−10,11			−35,55
21	30,48	+ 7,82	11	49,71	+ 5,78	29	63,15	+17,18	45	76,67	+23,24
48	30,61	−13,80			+ 6,11			−70,70			−29,03
22	32,69	−47,00	12	51,56	−23,65			−30,85	31	78,80	+11,61
35	34,26	− 9,18			−16,43	24	64,16	−37,20			+16,55
10	34,74	−15,55			−34,25			−45,28			−17,05
14	36,36	− 2,41	30	52,00	−16,45			−17,92			−23,15
20	36,48	−19,42			+25,87			−38,48			−11,49
43	36,69	+ 5,62	7	54,30	+44,28	33	64,37	−10,55			−46,03
36	37,15	− 8,55	41	54,30	− 5,44			−21,70			−59,85
26	39,30	−11,26	28	54,30	− 7,76			−39,40			−29,80
		− 7,18	3	56,85	+ 5,52			−27,74			−36,80
44	39,32	+12,42	40	57,82	+ 5,60	17	69,10	+ 5,60			−42,35
		− 6,47			+28,68	5	72,71	− 6,40	38	79,30	−48,30
23	39,83	−22,60			+32,30	4	72,83	+ 6,62			−17,30
2	44,50	−17,85			+10,82	16	72,83	−16,98	6	84,53	−23,70
13	46,55	+10,89	34	57,83	+11,48			−11,69	39	93,68	−51,50
		−11,64	46	59,00	−17,30	19	75,06	+12,35			−95,50
						1	75,58	− 5,57			
		+ 5,62			−31,65	37	76,18	− 5,58	15	94,53	+56,80

Tabelle II.

Nr.	Aufgefangene Ladung $e \cdot 10^{10}$ e.st.E.	Nr.	Aufgefangene Ladung $e \cdot 10^{10}$ e.st.E.	Nr.	Aufgefangene Ladung $e \cdot 10^{10}$ e.st.E.
26	+ 4,08	46	+ 14,35	45	− 52,27
44	− 18,89	18	+ 9,45	31	+ 4,94
13	− 22,53	29	− 87,88		− 33,60
	+ 17,26		+ 39,85		− 6,10
27	+ 7,25	24	− 9,08		+ 11,66
11	− 0,33		+ 27,36		− 34,54
12	+ 7,22		− 20,56		− 13,82
	− 17,82	33	− 11,18		+ 30,05
30	+ 42,32		− 17,70		− 7,00
40	+ 23,08		+ 11,66		− 5,55
	+ 3,62	16	+ 5,29	38	+ 31,00
	− 21,48	42	− 56,64	39	+ 44,00
			+ 15,15		

die kleiner sind als das von der Theorie als kleinstmöglichstes Quant statuierte $e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. (Partikel Nr. 14).

Um der Frage nach der Größe eines möglichen Elektrizitätsatomes noch weiter auf den Grund zu gehen, kann man

Differenzladungen *verschiedener* Tröpfchen bilden; es erscheint jedoch im Hinblick auf die erörterten Vorteile der Einengungsmethode richtiger, verschiedene Ladungen, die jeweils an *denselben* Probekörpern zur Messung gelangen, zu vergleichen. Zu diesem Zwecke wurde eine größere Anzahl von Ölkugeln nach dem bekannten Verfahren umgeladen. Tab. II enthält die Differenzen der Ladungen, die auf diese Weise an denselben Ölkügelchen entstanden sind.

Bei dem Partikel Nr. 40 beträgt z. B. die Differenz der zweiten und dritten Ladung $3{,}62 \cdot 10^{-10}$ e. st. E., bei Partikel Nr. 81 die Differenz der dritten und vierten Ladung $6{,}10 \cdot 10^{-10}$ e. st. E., die Differenz der achten und neunten Ladung desselben Partikels $7{,}0 \cdot 10^{-10}$, der neunten und zehnten Ladung $5{,}55 \cdot 10^{-10}$ e. st. E., *es sind demnach auch Ladungssprünge aller Größen vorhanden*; es erhellt also, daß auch auf diesem Wege das von der Theorie geforderte Quant $e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. an Ölkügelchen nicht festgestellt werden kann.[1])

1) Für einige Partikel, für welche bis 100 Einzelmessungen für Fall- und Steigzeiten vorliegen, wurden die Produkte $N m g$ und $N e$, welch letzteres bekanntlich dem Grammäquivalente der Elektrolyse $290 \cdot 10^{12}$ e. st. E. gleich sein sollte, aus der Einsteinschen Theorie der Brownschen Bewegung berechnet. (Bezüglich der Methode der Berechnung sei auf E. Weiss, Wiener Akad. Ber. 120. p. 1021. 1911 verwiesen.)

Setzt man bei dieser Berechnungsart, welche in ihren Voraussetzungen von der Form und Dichte der Probekörper unabhängig ist, nachträglich Kugelgestalt und Dichte des Öles sowie die Loschmidtsche Zahl $N = 60{,}6 \cdot 10^{22}$ voraus, so kann man auf die Größe des kugelförmigen Probekörpers schließen. In folgender Tabelle sind die gewonnenen Resultate zusammengestellt:

Nr. des Partikels	$Ne \cdot 10^{-13}$ e.st.E.	Bei Umladung aufgefangene Menge $Ne \cdot 10^{-13}$ e.st.E.	Ladung $e \cdot 10^{10}$ e.st.E.		Radius $a \cdot 10^{5}$ cm	
			aus der Brownschen Bewegung	aus dem Widerstandsgesetze	aus der Brownschen Bewegung	aus dem Widerstandsgesetze
1	177,2 ± 23,46		2,92 ± 0,39	5,57	60,98	75,58
12	990	303	16,34	23,65	45,54	51,56
	687	743	11,35	16,43		
	1430		23,60	34,25		
18	397,5 ± 76,0	191,9 ± 76,0	6,56 ± 1,26	19,56	42,85	61,70
	205,6 ± 39,63	± 39,6	3,39 ± 0,65	10,11		
21	90,4 ± 16,25		1,49 ± 0,25	7,82	17,62	30,48
28	169,7 ± 39,5		2,8 ± 0,65	7,76	38,65	54,30

c) Die Ergebnisse der Einengungsmethode.

Einige Partikel wurden öfters umgeladen und für jede ihrer Ladungen

1. die Steigzeiten im elektrischen Felde,
2. die Einengungsgrenzen bestimmt.[1])

Dies Verfahren gestattet sowohl die Berechnung jeder absoluten Ladung auf Grund der Steig- und Fallzeiten allein, als auch nach den Erörterungen § 2 und 3 die objektive Bestimmung der zu dieser Ladung eventuell zugehörigen kleinsten Vielfachheit. Tab. III p. 566 gibt die Übersicht solcher Partikel.

Aus dieser Tabelle ist folgendes ersichtlich:

1. Den Ladungen, die, willkürlich repartiert, ein Multiplum eines Elementarquantums bei $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. vortäuschen könnten, mußten durch die Auswägung viel kompliziertere Zahlen als experimentell begründete Vielfachheiten zugewiesen werden. So enthält z. B. die Ladung $e_1 = 48{,}3 \cdot 10^{-10}$ des Partikels Nr. 38, die man bei unkritischer Untersuchung als zehnfaches Elementarquantum deuten würde, in Wirklichkeit zumindest 22 Quanten. Das mit den Versuchsresultaten verträgliche größte gemeinschaftliche Maß ε der Ladungen, welche dieses

Es ergeben sich also für die Radien der Ölpartikel Werte, welche *kleiner* sind als die aus dem Widerstandsgesetze folgenden. Dies Resultat stimmt vollkommen überein mit den Schlüssen, die F. Zerner aus Millikans Zahlenmaterial gezogen hat (vgl. Physik. Zeitschr. **16.** p. 10 und **17.** p. 165), während sich an den Metallpartikeln die Abweichung bekanntlich nach der entgegengesetzten Richtung ergibt. Die Werte für Ne stimmen auch an den Öltröpfchen keineswegs mit der Ladung des Grammäquivalentes überein; dabei sind die Abweichungen größer als die möglichen Fehlergrenzen (E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **16.** p. 289. 1915). Man muß also, auch wenn man den Berechnungen die Theorie der Brownschen Bewegung zugrunde legt, die Existenz von Werten für Ne zugeben, die bereits der Hälfte (Partikel Nr. 28) oder nur dem dritten Teile (Partikel Nr. 21) des Grammäquivalentes gleich sind. Ebenso läßt sich unter anderen am Partikel Nr. 12 konstatieren, daß auch die aufgefangenen Elektrizitätsmengen keine Multipla von $290 \cdot 10^{12}$ e. st. E. darstellen; so ist hier $Ne_3 - Ne_2$ gleich $743 \cdot 10^{12}$ e. st. E., ein Wert, der genau zwischen dem Doppelten und dem Dreifachen des Grammäquivalentes liegt. Alle diese Tatsachen widerlegen die früheren und neuesten Behauptungen Millikans (l. c. p. 750. 1916).

1) Für jedes dieser Partikel wurde die Konstanz der Fallgeschwindigkeit und damit die Konstanz von mg festgestellt (ausführlich in Wien. Akad. Ber.).

Tabelle III.

Nr. des Partikels	Gemessene Ladung $\varepsilon \cdot 10^{10}$ e.st.E.	Engste Grenzen für Steigspannung in Volt	Engste Grenzen für Fallspannung in Volt	Einfachste Vielfachheit	Eventuelle Elementarladung $\varepsilon \cdot 10^{10}$ e.st.E.
38	48,30	51	49,9	22	2,2
	17,30	141,5	140,0	8	
	—	66,5	64,5	17	
40	5,60	169,0	167,0	12	0,46
	28,68	33,0	31,2	63	
	—	92,0	91,0	22	
	10,82	87,5	86,0	23	
42	5,94	362,0	361,0	6	1,0
	—	74,9	74,0	29	
	50,70	43,5	42,9	50	
44	12,48	24,0	23,5	25	0,5
	6,47	46,0	45,0	13	
		60,0	59,0	10	
45	23,24	95,5	94,0	27	0,85
	—	93,8	93,0	28	
	29,03	76,5	75,5	34	

Partikel hintereinander trug, ergibt sich dabei zu $2{,}2 \cdot 10^{-10}$ e. st. E.; es stellt nur mehr die Hälfte der Ladung des hypothetischen Elektrons dar. Den beiden Ladungen des Partikels Nr. 44, die sich dem ersten Anschein nach wie 2 : 1 verhalten, gehören als einfachste Verhältniszahlen 25 : 13 zu, welchen eine obere Grenze des Elementarquantums $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. entspricht.

Aus solchen Beispielen folgt, daß bei Anwendung der Einengungsmethode, eines Verfahrens, das die objektive Möglichkeit bietet, die eventuelle Zusammensetzung der Ladungen aus elementaren Quanten zu erkennen, auch den Ladungen größerer Ölkugeln Vielfachheiten (Zusammensetzungszahlen aus eventuellen elementaren Quanten) zugeschrieben werden müssen, welche für das noch zulässige größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen als obere Grenze des Elementarquantums immer bedeutend kleinere Werte als das von der Theorie postulierte Quant ergeben.

2. Es ergibt sich ferner, daß die an verschiedenen Partikeln objektiv bestimmten Quanten ε untereinander verschieden sind.

Damit ist festgestellt, daß eine Atomistik der Elektrizität mit einem Quant der Größenordnung 10^{-10} e. st. E. schon nach den Versuchen an Öltröpfchen nicht denkbar ist. Auch diese Versuche führen vielmehr zu der Erkenntnis, daß ein eventuelles elementares Quant der Elektrizität nur in viel kleinerer Größenordnung als man vermutete, liegen könnte.

§ 5. Zusammenfassung.

In den Methoden, die sich in letzten Jahren zur direkten Bestimmung des elektrischen Elementarquantums entwickelt haben, wurde die Frage nach der Vielfachheit der gemessenen Ladungen, d. h. nach deren eventueller Zusammensetzung aus elementaren Quanten auf verschiedene Weise behandelt. Einerseits versuchte man nach Millikan die an Flüssigkeitströpfchen (Öl) gemessenen größeren Ladungen als Multipla der theoretischen Elementarladung $e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. darzustellen, anderseits stellten sich Ehrenhaft und andere Autoren, welche die Unterschreitungen von $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. nachgewiesen haben, die Frage, ob die Atomistik der Elektrizität — falls sie existieren sollte — konstatierbar ist. Von diesem Standpunkte aus wurde von Ehrenhaft und Konstantinowsky ein kritisches Verfahren entwickelt, welches sich auch zahlentheoretisch begründen läßt und welches die Möglichkeit bietet, obige Frage zu beantworten.

Das Verfahren, die sogenannte Einengungsmethode, beruht auf der einfachen Auswägung der elektrisch geladenen Partikel im elektrostatischen Felde in einem willkürlichen Einheitsmaße. Aus den engsten Auswägungsgrenzen, die durch jene Spannungen gegeben sind, bei welchen die Fall- bzw. Steigbewegung der Partikel eintritt, ergeben sich experimentell die eventuellen Vielfachheiten der von den Partikeln getragenen Ladungen.

Aus der Möglichkeit der Anwendung der Methode auf dem Gebiete der Elektrizität folgt keineswegs *die Notwendigkeit* einer atomistischen Struktur der Elektrizität, denn die Methode gestattet *immer* für die Ladungen desselben Partikels ein größtes, gemeinschaftliches Maß zu bestimmen und daher jede Ladung, wenn sie auch nicht atomistisch aufgebaut ist, als Multiplum einer kleineren darzustellen. Auf die reale Existenz der Atomistik kann man vielmehr bei Anwendung

dieses Verfahrens nur dann mit großer Wahrscheinlichkeit schließen, wenn sich für alle an verschiedenen Partikeln gemessenen Ladungen immer *dasselbe* gemeinschaftliche Maß ergibt. So müßte also die Einengungsmethode die von der Theorie postulierte Atomistik der Elektrizität in der Größenordnung 10^{-10} e. st. E. genau konstatieren lassen.

Es war demnach die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, große Ölpartikel mehrmals umzuladen, für jede der aufgefangenen Ladungen die Steigzeiten im elektrischen Felde *und* die Einengungsgrenzen zu bestimmen, wodurch es ermöglicht wird, für jede Ladung ihre absolute Größe und eine von jeder Willkür freie Vielfachheit für deren Zusammensetzung anzugeben.

Aus diesen Experimenten ergeben sich folgende Resultate:

1. Die an Öltröpfchen gemessenen Ladungen, sowie die aus der ionisierten Luft von denselben aufgefangenen Elektrizitätsmengen sind entweder kleiner als diejenige des theoretischen Elementarquantums $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. oder weichen von den vielfachen desselben ab; es sind alle Werte der Ladungen vorhanden, so daß auf die Existenz irgendwelcher bevorzugter Ladungen nicht geschlossen werden kann.

2. Die objektive Bestimmung der Vielfachheiten nach der Einengungsmethode ergibt für das größte gemeinschaftliche Maß der größeren Ladungen Werte, welche das $e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. erheblich unterschreiten. Auf diesem objektiven Wege gelangt man also auch bei großen, an Ölpartikeln gemessenen Ladungen zu denselben Resultaten, die an Metallpartikeln längst festgestellt worden sind, d. h. zu den Unterschreitungen des theoretischen Elementarquantums.

3. Die Einengungsmethode ergibt für die Ladungen der Ölpartikel kein gleiches gemeinschaftliches Maß, was im Falle der Atomistik in der Größenordnung 10^{-10} e. st. E. bei der Präzision der Methode zutreffen müßte; eine Tatsache, welche darauf hinweist, daß das Atom der Elektrizität, falls es besteht, nur in einer Größenordnung liegen kann, die das von der Theorie postulierte Quantum erheblich unterschreitet.

Wien, I. physikalisches Institut, Juli 1917.

(Eingegangen 14. August 1917.)

3. *Antwort an Herrn J. Stark; von L. Vegard.*

In einem Aufsatz „Bemerkung zu der Mitteilung des Hrn. Vegard usw." in Nr. 5 der Ann. d. Phys. d. J. hat Hr. J. Stark eine Entgegnung auf die Prioritätsansprüche gegeben, die ich in einer kürzlich erschienenen Mitteilung „Über die Lichterregung bei den Kanalstrahlen"[1]) Hrn. Stark gegenüber geltend gemacht habe.

Dies veranlaßt mich nochmals auf die Frage zurückzukommen.

Meine Ansprüche beziehen sich auf die durch meine[2]) und anderer[3]) Versuche von mir zuerst erhaltenen zwei Resultate:

1. Das „ruhende Licht" wird überwiegend vom gestoßenen Atom direkt ausgesandt, und nicht etwa indirekt durch sekundäre Kathodenstrahlen zur Emission gebracht.

2. Ein lichterregender Stoß verläuft ohne daß hierdurch dem gestoßenen Atom eine translatorische Energie erteilt wird, die selbst annähernd von der Größenordnung der Kanalstrahlenenergie ist.

Hr. Stark meint meine Prioritätsansprüche erstens streitig machen zu können durch Hinweis auf Äußerungen in einem Aufsatz von 1907.[4])

In dieser Arbeit des Hrn. Stark finde ich ganz richtig, daß er die Frage nach dem Ursprung der ruhenden Intensität behandelt hat. Ich will auch gleich bemerken, daß ich natür-

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. **52**. p. 72. 1917.

2) L. Vegard, Ann. d. Phys. **39**. p. 111. 1912; **40**. p. 711. 1913 u. **41**. p. 625. 1913.

3) Ch. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. **7**. p. 153, 748. 1906. G. Fulcher, Astroph. Journ. **34**. p. 388. 1911; Physik. Zeitschr. **13**. p. 224, 1137. 1912.

4) J. Stark, Physik. Zeitschr. **8**. p. 397. 1907.

lich keineswegs den Anspruch erhebe der erste gewesen zu sein der diese Frage behandelt hat.

Wenn dagegen Hr. Stark meint, durch seine früheren Erörterungen über diese Frage seine Priorität betreffs der beiden erwähnten Gesetze gesichert zu haben, so kann ich damit nicht einverstanden sein.

In dem Aufsatz von 1907 hat Hr. Stark erwähnt, daß die ruhende Intensität primär den Stoß des Kanalstrahls und die hierdurch hervorgerufene Ionisation entsteht. *Er vertritt jedoch die Ansicht, daß die ruhende Intensität durch die durch den Stoß erzeugten sekundären Kathodenstrahlen entstehe.* Auch in einer späteren Arbeit[1]) hat er dieselbe Auffassung geäußert. In § 7 dieser Abhandlung behandelt er: „Erregung von ruhender Intensität der Serienlinien durch Kathodenstrahlen".

Es zeigt sich also, daß Hr. Stark vor dem Erscheinen meiner Arbeit eine Auffassung der Frage vertreten hat, die zu den von mir nachgewiesenen richtigen Ansichten in ausgesprochenem Widerspruch steht.

Es wäre gewiß an dem Platze gewesen, daß ich in meiner Arbeit von 1913[2]), wo die beiden Sätze aufgestellt und begründet worden sind, auf die von Hrn. Stark vertretenen Anschauungen aufmerksam gemacht hätte.

Hr. Stark hat es auch nicht für ausreichend gehalten, seine Prioritätsansprüche durch Hinweis auf früher veröffentlichte Arbeiten zu begründen; er sucht weiter zu zeigen, daß die von mir angegebenen Beweise der beiden Gesetze mangelhaft sind.

Darin kann ich ihm aber nicht recht geben; denn den beiden Gesetzen sind von mir eine solche Begründung gegeben, daß es mir nicht möglich erscheint, daß ein Physiker, der mit der Beweiskraft der angeführten Tatsachen vertraut ist, an der Richtigkeit der von mir aufgestellten Gesetze zweifeln kann. Hr. Stark meint, daß die von ihm herangezogenen Tatsachen an Beweiskraft den meinigen überlegen sind. Die Beurteilung dieser Behauptung muß den Fachgenossen überlassen werden. Die meinigen sind jedenfalls *hinreichend* für den Zweck.

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 8. p. 913. 1907.
2) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 625. 1913.

Die Einwände von Hrn. Stark beziehen sich vornehmlich auf meinen Nachweis des ersten Gesetzes; ich will daher meine Beweise dieses Gesetzes erst kurz erwähnen.

Ich habe zwei voneinander gänzlich unabhängige Beweise geliefert.

Der erste geht darauf hinaus zu zeigen, daß die Annahme von sekundären Kathodenstrahlen mit den Gesetzen für ihre Bildung zusammengehalten[1]) die von mir für die Variationen der ruhenden Intensität gefundenen Gesetze[2]) nicht erklären kann.

Der zweite Beweis gründet sich auf die Eigenschaften der Spektren, und es ist dieser, welcher vom Einwande des Hrn. Stark getroffen wird.

Mein Räsonnement ist ganz einfach wie folgt:

Wenn das ruhende Licht von sekundären Kathodenstrahlen hervorgerufen wäre, so müßte das ruhende Spektrum dieselbe typische Struktur wie das von langsamen Kathodenstrahlen erzeugte haben, wenn diese letzteren unter einigermaßen denselben Druckverhältnissen wie den im Entladungsraum vorhandenen in das betrachtete Gas eindringen. Die notwendige Bedingung dafür, daß dieser Versuch imstande sein soll die Frage zu entscheiden, ist die, daß das Spektrum mit den verschiedenen Bildungsbedingungen typische Variationen erleidet. Aus diesem Grunde habe ich eben gewählt den Stickstoff zu erwähnen; aber auch der Wasserstoff zeigt derartige Variationen, daß auch für dieses Gas der Beweis auf dieselbe Weise geführt werden kann. Hr. Stark findet dagegen in der Variabilität des Stickstoffspektrums den wesentlichen Einwand gegen meinen Beweis; hierin kann ich ihm aber nicht folgen. Es sind eben die typischen Variationen des Spektrums, welche den Beweis ermöglichen. Nun ist es zwar so, daß das Stickstoffspektrum mit der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen variiert, doch in einer solchen Weise, daß bei abnehmender Geschwindigkeit eine stets stärkere Entwicklung der positiven Bande eintritt, so daß bei kleinen Geschwindigkeiten, der Größenordnung derjenigen der sekundären Kathodenstrahlen entsprechend, die Bandenspektren und besonders die positiven

1) Ch. Füchtbauer, Physik. Zeitschr. 7. p. 153, 748. 1906.
2) L. Vegard, Ann. d. Phys. 39. 40. 41.

Bande völlig dominierend werden. Vergleichen wir nun mit dem Kanalstrahlenspektrum, so finden wir, daß das ruhende Spektrum einen ganz verschiedenen Charakter besitzt, und daß die Verschiedenheit vom Kathodenstrahlenspektrum eben bei kleinen Geschwindigkeiten am meisten ausgeprägt wird. Die positiven Bande im Kanalstrahlenspektrum sind gänzlich zurückgetreten, und anstatt dieser zeigt das Spektrum eine Reihe starker Linien. Ein Blick auf die zwei Spektren macht es klar, daß sie nicht auf dieselbe Weise hervorgerufen sein können.

Als einen zweiten und letzten Einwand führt Hr. Stark an: „Überdies bezogen sich die erwähnten Beobachtungen auf Bandenlinien ohne Kanalstrahlen-Dopplereffekt, nicht auf Serienlinien mit Dopplereffekt, und die Frage galt dem Ursprung der ruhenden Serienlinien". Diese Bemerkung scheint mir aus mehreren Gründen als gänzlich unverständlich von seitens des Hrn. Stark.

Erstens kann darin kein Einwand gegen meinen Beweis erblickt werden. Denn wäre eine „ruhende Linie" mit Dopplereffekt durch sekundäre Kathodenstrahlen erzeugt, so müßte das ruhende Spektrum ja auch diejenigen Linien und Banden zeigen, welche für Erregung mit langsamen Kathodenstrahlen typisch sind.

Zweitens sind seine Anführungen nicht korrekt. Meine Beobachtungen sind nicht allein auf Bandenlinien ohne Dopplereffekt bezogen. Ich habe über die bewegte Intensität sowohl ohne als auch mit Dopplereffekt Messungen ausgeführt, und gelangte zu folgendem Ergebnis[1]): „Das ruhende Spektrum bildet etwas ganzes, etwas einheitliches, das für die Anregung des Gases mit einem gewissen Kanalstrahlentypus charakteristisch ist" oder das ganze ruhende Spektrum stammt hauptsächlich von demselben Erregungsprozeß. — Hr. Stark hat offenbar auch dieses Ergebnis übersehen, wenn er später in seiner Antwort zu mir[2]) sich selbst das Verdienst beilegt, dieses Verhältnis im Jahre 1916 nachgewiesen zu haben.

Was nun endlich den zweiten Satz betrifft, daß beim lichterregenden Stoß das gestoßene Atom nicht in merkliche

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 41. p. 629, 637, 640. 1913.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. 49. p. 197, 744. 1916.

Bewegung versetzt wird, so hat Hr. Stark hier die Berechtigung meines Prioritätsanspruches folgendermaßen zu bestreiten gesucht:

Der Beweis des zweiten Satzes beruht zum Teil auf die Gültigkeit des ersten; da ich aber nach der Behauptung Hrn. Starks den ersten nicht nachgewiesen habe, wird der Prioritätsanspruch auf den zweiten hinfällig.

Da ich aber im vorhergehenden gezeigt habe, daß die erste Annahme, das Licht werde vom gestoßenen Atom emitiert, wohl begründet ist, fällt hiermit der diesbezügliche Einwand des Hrn. Stark fort.

Ich meine durch die vorhergehenden Erläuterungen nachgewiesen zu haben, daß die von mir in den Ann. d. Phys. **52**. p. 72, 1917 erhobenen Prioritätsansprüche völlig berechtigt sind. Gleichwohl bleibt es natürlich von bedeutendem Interesse, daß Hr. Stark später auf anderem Wege die Richtigkeit meiner Ergebnisse hat bestätigen können.

(Eingegangen 11. September 1917.)

4. *Das Magneton als Funktion der Planckschen Konstante;* von *Th. Wereide.*

Bezüglich der in Ann. d. Phys. **52** (1917) abgeleiteten Relation zwischen Magneton und Planckscher Konstante möchte ich das folgende betonen.

Die Relation gründet sich *nicht* auf die numerische Ausrechnung, welche für die Nullpunktsbahn des Elektrons sehr nahe 5 Magnetonen gibt. Nach dieser Ausrechnung kann man nähmlich nur behaupten, daß die aufgestellte Relation *angenähert* richtig ist, und man ist zu einer *exakten* Verbindung der zwei physikalischen Größen nicht gelangt.

Das *primäre* in meinem Aufsatze ist die *Deduktion* einer Relationsformel, wo es *a priori* verlangt wird, daß der Zahlenfaktor τ' *eine ganze Zahl sein soll.* Dann kommt als eine Bestätigung der Theorie die numerische Ausrechnung, welche aussagt, daß die unbekannte Zahl s ist.

Ich finde diese Bemerkung notwendig, weil die numerische Berechnung schon früher mehrmals vorgenommen ist. Z. B. ist sie schon im Jahre 1911[1]) von mehreren Physikern besprochen worden, später von Chalmers[2]) und anderen, aber ohne daß man darauf aufmerksam geworden ist, daß eine Deduktion der Relation möglich ist. Eine solche Deduktion erhält man, wenn man den Magnetismus der (in den Bohrschen Bahnen sich bewegenden) Elektronen mit dem Magnetismus der Magnetonentheorie (ganz oder teilweise) identifiziert.

Christiania, Physikalisches Institut der Universität,
27. August 1917.

1) Physik. Zeitschr. **12**. p. 952. 1911.
2) Nature **19**. p. 687. 1914.

(Eingegangen 5. September 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1917. № 16

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie;*

von Erich Kretschmann.

Inhalt: Einleitung. Gegenstand und Ergebnisse der Arbeit. — I. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. — II. Über die prinzipielle Meßbarkeit der Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Einsteinschen Schwerepotentials. — III. Beschränkung der Kovarianz der Einsteinschen Gleichungen. 1. Benutzung der „Achsenrichtungen" des Krümmungstensors als Koordinatenrichtungen. 2. Über die Einführung absoluter Invarianten als Raum- und Zeitkoordinaten. 3. Nähere Bestimmung des Bezugssystemes durch den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen. — IV. Geometrische Bestimmung des von der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie physikalisch erfüllten Relativitätspostulates und Vergleich mit der ursprünglichen Relativitätstheorie. — Schluß: Über den Grund der Unerfüllbarkeit des allgemeinen Relativitätspostulates.

Einleitung.

Die Formen, in denen verschiedene Autoren das Postulat der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie[1]) und insbesondere neuerdings Einstein sein allgemeines Relativitätspostulat[2]) ausgedrückt haben, lassen die Auffassung zu oder fordern sie — bei Einstein — geradezu, daß ein System physikalischer Gesetze einem Relativitätspostulate dann genügt, wenn die Gleichungen, durch die es dargestellt ist, der dem Postulate zugeordneten Transformationsgruppe der Raum- und Zeitkoordinaten gegenüber kovariant sind.[3]) Erkennt man

1) Vgl. z. B. H. Minkowski: „Raum und Zeit". B. G. Teubner 1909. p. 4. — M. v. Lauer: „Das Relativitätsprinzip". Vieweg 1911. p. 33, § 6. — M. Abraham: „Theorie der Elektrizität". B. G. Teubner 1908. p. 379 u. 380.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

3) Im Sinne dieser Auffassung habe ich die Worte „Relativitätspostulat" und „Relativitätstheorie" noch in meiner Arbeit: „Über die prinzipielle Bestimmbarkeit usw.", Ann. d. Phys. 48. p. 907—982, gebraucht; vgl. l. c. p. 910, Anm. 5. Sachlich hat das indessen für den dort behandelten Gegenstand offensichtlich nichts zu bedeuten.

diese Auffassung an und vergegenwärtigt sich, daß alle physikalischen Beobachtungen letzten Endes in der Feststellung rein topologischer Beziehungen [„Koinzidenzen“[1])] zwischen räumlich-zeitlichen Wahrnehmungsgegenständen besteht und daher durch sie unmittelbar kein Koordinatensystem vor irgend einem anderen bevorrechtigt ist[2]), so wird man zu dem Schlusse gezwungen, daß jede physikalische Theorie ohne Änderung ihres — beliebigen — durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes mittels einer rein mathematischen und mit höchstens mathematischen Schwierigkeiten verbundenen Umformung der sie darstellenden Gleichungen mit jedem beliebigen — auch dem allgemeinsten — Relativitätspostulate in Einklang gebracht werden kann.[3])

Indessen muß es doch möglich sein, den Relativitätspostulaten noch einen anderen, nicht nur mathematisch formalen Sinn beizulegen. Denn nur aus dem Vorhandensein eines solchen läßt sich z. B. die einleuchtende und allgemein anerkannte Unmöglichkeit erklären, den Begriff des starren Körpers, der an sich so leicht wie kaum ein zweiter durch rein topologische Merkmale festgelegt werden kann[4]), der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie einzufügen.

Diesen physikalischen Sinn der Relativitätspostulate an einem Beispiele durch vierdimensional-geometrische Betrachtungen zu entwickeln und in einer allgemein gültigen Fassung eines beliebigen Relativitätspostulates zur Geltung zu bringen, ist im ersten Teil der vorliegenden Arbeit versucht. Die Anwendung des gewonnenen — vom Einsteinschen wesentlich verschiedenen — Relativitätsbegriffes auf die neue Einsteinsche Theorie der Schwerkraft in den folgenden Abschnitten führt dann zu dem Ergebnisse (§ 25), daß diese Theorie ihrem physikalischen Inhalte nach als eine vollkommene Absoluttheorie zu betrachten ist, die sachlich überhaupt keinem Relativitätspostulate genügt. Dagegen erweist sich die ursprüngliche Einsteinsche Relativitätstheorie als die weiteste, die unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen überhaupt denkbar ist (§ 26).

1) A. Einstein, l. c.

2) Näheres hierüber: E. Kretschmann, l. c. p. 914—924.

3) Vgl. G. Ricci et T. Levi-Cività: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“. Math. Ann. 54. p. 125. 1901.

4) Vgl. E. Kretschmann, l. c. p. 967 u. 968 § 55.

Zum Schlusse wird gezeigt, daß das allgemeine Relativitätspostulat physikalisch im Sinne der angenommenen Auffassung nur von Naturgesetzen erfüllt werden könnte, deren allgemeine Beschaffenheit — unbedingt bejahend — von der — bedingten, d. h. verneinenden — der bisher aufgestellten Gesetze gründlichst verschieden wäre.

Wie schon aus dem Gesagten hervorgeht, beruht der Gegensatz, in dem die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu den von Einstein in seinen gravitationstheoretischen Untersuchungen ausgesprochenen Ansichten stehen, allein auf der meines Erachtens allerdings bedeutungsvollen Verschiedenheit in der Auffassung und begrifflichen Bestimmung der Relativitätspostulate. Dieser Gegensatz betrifft nur die Einordnung Einsteins „allgemeiner" und seiner ursprünglichen Relativitätstheorie in die Reihe der überhaupt denkbaren Relativitätstheorien. Dagegen bleibt die Frage nach der sachlichen Gültigkeit der von Einstein aufgestellten neuen Naturgesetze vollständig unberührt.

I. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate.

§ 1. Seine Forderung der Kovarianz der physikalischen Gleichungen bei beliebigen stetigen Koordinatentransformationen stützt Einstein[1]) wesentlich auf die Tatsache, daß alle physikalische Erfahrung letzten Endes in der Beobachtung rein topologischer Beziehungen oder „Koinzidenzen" zwischen den räumlich zeitlichen Beobachtungsgegenständen besteht. Es ist also in der Erfahrung kein Grund gegeben, irgendwelche Bezugssysteme für Raum und Zeit vor allen übrigen als die allein berechtigten hervorzuheben. Demnach haben z. B. die Bezugssysteme $\Sigma\,(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = i\,c\,t)$, in denen, sofern sie überhaupt gilt, die bekannte Lichtausbreitungsgleichung

$$(1) \qquad (x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_4 - x_4^0)^2 = 0$$

der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie erfüllt ist, sachlich keinen Vorzug vor irgendwelchen anderen Bezugssystemen.

---

1) A. Einstein: „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie", Ann. d. Phys. 49. p. 769—822. 1916; vgl. p. 776 u. 777.

Verliert nun damit die ursprüngliche Relativitätstheorie als solche jeden physikalischen Inhalt? Das ist, wie mir scheint, keineswegs der Fall.

§ 2. Zu jedem beliebigen Bezugssysteme gibt es nach der ursprünglichen Relativitätstheorie eine ganz bestimmte Schar gleichberechtigter, in denen die physikalischen Gesetze die gleiche mathematische Form annehmen. Die geradlinigen rechtwinkligen Bezugssysteme, in denen die Lichtausbreitungsgleichung die Form (1) hat, entstehen auseinander durch die Transformationen der Gruppe, die man erhält, wenn man die Lorentzgruppe mit der Translationsgruppe, $x_1' = x_1 + a_1$, $\ldots x_4' = x_4 + a_4$, und der Gruppe der gleichförmigen Dilatation $x_1' = \lambda \cdot x_1, \ldots x_4' = \lambda \cdot x_4$ komponiert. Geht man zu anderen Bezugssystemen, z. B. Polarkoordinaten, über, so ändert sich auch die Form der Gleichung (1) und zugleich die Form der „berechtigten" Transformationen, welche sie invariant lassen.

Aber die Gruppe, welche die jeweils berechtigten Transformationen umfaßt, bleibt stets der ursprünglichen „ähnlich". Sie hat mit ihr alle von der Wahl des Bezugssystems unabhängigen Eigenschaften (z. B. die Zahl der Parameter usw.) gemein, die gruppentheoretisch die allein wesentlichen sind, so daß man nach Lie beliebige ähnliche Gruppen unter dem Begriffe einer (invarianten) Gruppe zusammenzufassen pflegt. Mit Benutzung dieses invarianten Gruppenbegriffes erhält man für ein beliebiges (spezielles) Relativitätspostulat vorläufig etwa folgenden allgemeinen Ausdruck: Die physikalischen Gesetze sind — gleichgültig, in welchen Koordinaten sie geschrieben sind — kovariant bezüglich der (invarianten) Transformationsgruppe G.

Hier ist unter G eine dem betrachteten Relativitätspostulate eindeutig zugeordnete Gruppe zu verstehen. Damit ist auch für Relativitätspostulate, die nicht die allgemeine Kovarianz fordern, ein von der Wahl des Bezugssystems vollständig unabhängiger Ausdruck gefunden.

§ 3. Trotzdem tritt der physikalische Inhalt des zu einer invarianten Gruppe G gehörenden Relativitätspostulates in der gegebenen Form noch nicht rein zutage. Man erkennt dies leicht am Beispiel der Lichtgleichung (1). Es ist nämlich ein leichtes, diese Gleichung, ohne an ihrem physikalischen

Inhalte das geringste zu ändern, auf eine bezüglich ganz beliebiger Koordinatentransformationen invariante Form zu bringen. Man braucht nur die Ausdrucksweise der allgemeinen Relativitätstheorie einzuführen und statt der Gleichung (1) zu schreiben[1]):

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta \int ds = 0, \\ ds^2 \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu = 0, \\ (\lambda\nu,\ \mu\tau) \equiv 0 \qquad\qquad (\lambda, \nu, \mu, \tau = 1 \ldots 4). \end{cases}$$

Hier bezeichnet ds das invariante Linienelement und $(\lambda\nu,\ \mu\tau)$ die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit[2]), mit dessen identischem Verschwinden bekanntlich die Gesetze der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie in die der ursprünglichen übergehen.

Der oben gegebenen allgemeinen Fassung eines Relativitätspostulates zufolge müßten also dieselben Lichtausbreitungsgesetze je nach der Form ihrer Darstellung einmal — durch (2) dargestellt — dem allgemeinsten Relativitätspostulate und in der anderen Gestalt, (1), nur einem speziellen Relativitätspostulate genügen. Gleiches würde für alle physikalischen Gesetze gelten. Denn nach den Untersuchungen von Ricci und Levi-Cività[3]) dürfte es kaum zweifelhaft sein, daß man jedes physikalische Gleichungssystem ohne Änderung seines durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes auf eine allgemein kovariante Form bringen kann. Das leuchtet von vornherein ein, wenn man sich wieder vergegenwärtigt, daß in Strenge nur rein topologische Tatsachen des Naturgeschehens oder nach Einstein Koinzidenzen beobachtbar sind.

Soll daher der Aussage, daß ein Gleichungssystem einem speziellen und keinem weiteren Relativitätspostulate genügt, eine sachlich physikalische und nicht nur mathematisch formale Bedeutung zukommen, so muß der allgemeine Begriff eines Relativitätspostulates so festgelegt werden, daß danach für

1) Vgl. z. B. A. Einstein u. M. Großmann: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie ...". B. G. Teubner 1913. p. 6 § 2 u. p. 8 § 3.

2) S. Christoffel, Crelles Journal 70. p. 54.

3) G. Ricci et T. Levi-Cività: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications". Math. Ann. 54. p. 125. 1901.

jedes gegebene physikalische Gesetzsystem ein und nur ein Relativitätspostulat — bzw. die zugehörige invariante Gruppe — als das weiteste, das die Gesetze erfüllen, allein aus ihrem topologischen Inhalte unabhängig von der gewählten Darstellungsform bestimmt werden kann.

§ 4. Daß und wie dies möglich ist, erkennt man wieder am einfachsten an dem Lichtausbreitungsgesetze der ursprünglichen Relativitätstheorie. Es werde dabei von diesem, wie im folgenden stets von dem jeweils betrachteten Gesetzsystem, angenommen, daß es seinem beobachtbaren Inhalte nach in der Wirklichkeit erfüllt sei. Geht man wieder von der Form (1) des Gesetzes aus, so sieht man zunächst, daß unter den Bezugssystemen der Wirklichkeit, die durch Maßstäbe und Uhren mit vollkommen scharfen Längen- und Zeitangaben gegeben zu denken sind, die, in denen die Gleichung (1) überall und stets erfüllt ist, von allen, in denen das nicht der Fall ist, durch die prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen Schwierigkeiten, in ihnen zu erwartenden Beobachtungsergebnisse unterschieden sind. Denn in jedem der letztgenannten muß mindestens einer unter allen theoretisch möglichen, irgendwann und irgendwo den Äther durcheilenden Lichtimpulsen eine Weltlinie zeigen, auf der mindestens ein Punktpaar Koordinatendifferenzen hat, die nicht in der durch (1) geforderten Beziehung stehen. Und vorausgesetzt, daß die Maßstäbe und Uhren, die das fragliche Bezugssystem verwirklichen, indem sie die Koordinaten der ihnen anliegenden Weltpunkte abzulesen gestatten, im richtigen Augenblicke zur Stelle sind, was prinzipiell jedenfalls möglich ist, so kann jede solche Abweichung durch bloße Skalenablesungen, also rein topologische Beobachtungen, festgestellt und das Bezugssystem, in dem sie statthat, als nach (1) unzulässig ausgeschieden werden. Entsprechendes wie für die Gleichung (1) gilt offensichtlich für alle Gleichungen oder Differentialgleichungen zwischen Koordinaten sinnlich wahrnehmbarer Dinge. Differentialquotienten der Koordinaten können zwar auch mit vollkommen scharfen Meßwerkzeugen nur annähernd gemessen werden; aber da die Meßgenauigkeit prinzipiell nicht begrenzt ist, so ist auch hier jeder Fehler des Bezugssystems der Entdeckung ausgesetzt.[1])

1) Der entgegengesetzte Nachweis, daß ein Bezugssystem, d. h. die Angaben der zugehörigen Meßwerkzeuge, mit einem gegebenen Gleichungs-

§ 5. Die Gleichung (1) und die durch Koordinatentransformationen aus ihr entstehenden Gleichungen zeichnen also, jede für sich, die Schar von Bezugssystemen, in denen sie erfüllt ist, und alle zusammen demnach die invariante Gruppe aus, deren Transformationen die Bezugssysteme einer Schar miteinander verbinden. Schreibt man aber das gleiche Gesetz der Lichtausbreitung in einer von allen diesen verschiedenen Form, so wird die durch sie und ihre Transformierten ausgezeichnete Gruppe eine andere. Z. B., wenn man statt (1) schreibt:

$$(3)\quad \begin{cases} (x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_3 - x_3^0)^2 + c^2 (x_4 - x_4^0)^2 = 0\,, \\ c = \text{Const.} \end{cases}$$

so läßt diese Darstellung, außer den Transformationen der Gruppe von (1) wegen der Unbestimmtheit von c noch die Transformationsgruppe

$$x_4' = \mu \cdot x_4, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

zu. Die zu (2) gehörige Gruppe umfaßt alle stetigen Transformationen überhaupt, und wenn man zu (2) etwa noch die Nebenbedingungen $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ hinzufügt, so hat man ein den vorigen physikalisch gleichwertiges Gleichungssystem, das invariant ist bezüglich aller Transformationen

$$x_1' = f_1 (x_1 \ldots x_4) \ldots x_4' = f_4 (x_1 \ldots x_4)\,,$$

die den Bedingungen:

$$g_{\mu\nu} = 0 = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\beta}' = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\alpha}'$$

$$(\mu, \nu, \alpha, \beta = 1 \ldots 4);\ \mu \neq \nu$$

genügen und wieder eine ander Gruppe bilden. Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Gesucht ist aber eine Transformationsgruppe, die allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der gewählten Ausdrucksform bestimmt ist.

§ 6. Zu einer solchen wird man geradenwegs geführt, wenn man sich für jedes Gleichungssystem alle mit ihm verträglichen Weltlinien von Lichtimpulsen in der Koordinaten-

---

system verträglich sind, kann außer in besonderen Fällen nur durch unendliche Reihen von Messungen geführt werden. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 943—959.

mannigfaltigkeit gezogen denkt und die so entstandenen vierdimensional-geometrischen Bilder miteinander vergleicht.

Alle nach (1) möglichen Lichtweltlinien erhält man, wenn man von jedem Weltpunkte $x_1^0 \ldots x_4^0$ aus alle Seiten des Nachkegels mit der Gleichung (1) zeichnet.[1]) Jede aus (1) transformierte Gleichung stellt ebenfalls eine unendliche Schar von Lichtweltlinien dar, die von der ersten in ihren Maßverhältnissen im allgemeinen verschieden, aber in allen davon unabhängigen topologischen Eigenschaften ihr völlig gleich ist. Nach Gleichung (8) dagegen gehen von jedem Weltpunkte statt eines Nachkegels deren unendlich viele aus, nämlich je einer für jeden Wert der unbestimmt gelassenen Konstanten c. In (2) und der daraus durch den Zusatz $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ entstandenen Darstellungsform treten sogar unbestimmte Funktionen — die zehn $g_{\mu\mu}$ bzw. die vier $g_{\mu\mu}$ — statt der unbestimmten Konstanten c auf, und die Mannigfaltigkeit der Nachkegel mit gleicher Spitze wird eine dementsprechend größere. Dabei ist es natürlich keiner dieser Gleichungen Sinn, daß in der Wirklichkeit auch nur zwei räumlich sich trennende und geschlossene Flächen bildende Lichtwellen von demselben Punkte im Äther zu gleicher Zeit ausgehen könnten. Vielmehr soll in jedem Falle schon jede einzelne der Weltlinienscharen, die man durch vollständige (zahlenmäßige) Festlegung der zwar unbestimmten, doch eindeutigen Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ bzw. der Konstanten c erhält, ein vollständiges Bild der in der Wirklichkeit neben- und nacheinander möglichen Lichtbewegungen sein. Jedes dieser Einzelbilder stimmt natürlich topologisch mit der durch (1) bestimmten Weltlinienschar vollkommen überein, und die Gesamtbilder der anderen drei Gleichungssysteme sind hiernach Zusammenfassungen unendlich vieler der durch (1) und die aus (1) transformierten Gleichungen gegebenen Bilder. Zur Darstellung des in der Wirklichkeit nach dem betrachteten Gesetze Möglichen genügt, wie gesagt, jedes einzelne von diesen. Jedes weitere ist in physikalischer Hinsicht vollkommen überflüssig.[2])

---

1) Von der imaginären Koordinate x_4 ist der absolute Wert aufgetragen zu denken.

2) Die Zusammenfassung einer ganzen Schar physikalisch gleichbedeutender Bilder in einer Darstellungsform kann dagegen unter Umständen mathematische Vorzüge bieten. (Vgl. im folgenden § 24.)

Andererseits aber läßt sich die einzelne Schar von Lichtweltlinien, die in (1) oder einer aus (1) transformierten Gleichung dargestellt ist, nicht allgemein vermindern, ohne daß damit ein neues über (1) hinausgehendes Gesetz der Lichtausbreitung eingeführt wäre. Denn unter den nach (1) überhaupt möglichen Lichterscheinungen gibt es offensichtlich keine, die allein vermöge der Gleichung (1) irgendeine andere als nicht mit ihr zusammen möglich ausschlösse. Daraus folgt, daß jedes Gleichungssystem, das die in (1) enthaltenen Gesetze und nur diese in irgendeiner Form zum Ausdrucke bringt, mindestens eine der zu Gleichung (1) und ihren transformierten Formen gehörenden Weltlinienscharen vollständig als Abbild möglicher und miteinander verträglicher Lichtbewegungen darstellen muß und demnach auch in allen den Bezugssystemen erfüllt sein muß, in denen dieses Bild, d. h. die zugehörige, aus (1) transformierte Gleichung, gilt. Die invariante Transformationsgruppe, die diese Bezugssysteme verbindet, ist folglich die engste, die sich durch irgendeine Darstellungsform der in (1) enthaltenen Gesetze physikalisch vor allen anderen auszeichnen läßt. Sie ist, wie verlangt, allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der Art ihres Ausdruckes bestimmt, und zwar ist es nach dem Dargelegten offensichtlich die einzige Gruppe, für die das gilt. Geometrisch ist die Gruppe gekennzeichnet als die Gruppe der Transformationen, welche die Schar aller Lichtweltlinien, die nach den Gesetzen zusammen in derselben Koordinatenmannigfaltigkeit möglich sind, in sich selbst überführen. Dem zu dieser Gruppe gehörenden Relativitätspostulate, und keinem weiteren, genügt also in physikalischer Hinsicht jedes den Gleichungen (1), (2) und (3) inhaltlich gleichwertige Gleichungssystem.

§ 7. Die im vorhergehenden gegebene Bestimmung des von den angenommenen Lichtausbreitungsgesetzen erfüllten Relativitätspostulates läßt sich ohne weiteres auf beliebige Systeme physikalischer Gesetze übertragen. Dabei hat man nur, um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, auch den Fall zu berücksichtigen, daß der Umfang der physikalisch ausgezeichneten Transformationsgruppe auch von gesetzmäßig nicht bestimmten, „zufälligen", physikalischen Umständen ab-

hängt.[1]) Als (allgemein) erfüllt kann dabei offensichtlich nur ein Relativitätspostulat gelten, dem unabhängig von solchen Umständen, die sich prinzipiell nach Willkür ändern lassen, genügt ist.

Nennt man ein Bezugssystem für eine gegebene Darstellungsform eines Gesetzsystems „physikalisch berechtigt“[2]), wenn es bezüglich aller Beobachtungen mit ihr verträglich ist, die durch das gegebene Gesetzsystem nicht ausgeschlossen, also als prinzipiell möglich zu betrachten sind[3]), so ergibt sich etwa folgende allgemeine Festsetzung:

Ein System physikalischer Gesetze erfüllt dann und nur dann das Relativitätspostulat einer invarianten Transformationsgruppe G, wenn bei jeder beliebig gestalteten Darstellung aller Gesetze des Systems und nur dieser Gesetze die für die Darstellung physikalisch berechtigten — und dadurch von allen übrigen durch Beobachtung prinzipiell unterscheidbaren — Bezugssysteme unter allen nach den Gesetzen möglichen physikalischen Umständen eine so große Schar bilden, daß die Schar der sie verbindenden Transformationen die Gruppe G in irgendeiner Form als Teil enthält oder ihr gleich ist.

Hiernach ist die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Relativitätspostulates für ein System physikalischer Gesetze von

---

1) Ein solcher Fall liegt bei der Einsteinschen Gravitationstheorie insofern vor, als nach ihr bei gewissen singulären Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die ja nach Einstein von der zufälligen Verteilung und Bewegung der Materie abhängen, die physikalisch ausgezeichnete Gruppe ausnahmsweise mehr Transformationen umfaßt als sonst; vgl. § 25.

2) Die Transformationen zwischen den „physikalisch berechtigten“ Bezugssystemen brauchen nicht in jedem Falle das zugehörige Gleichungssystem auch mathematisch invariant zu lassen. So bleibt z. B. die bekannte Form $\mathfrak{Div}\,\mathfrak{T} = 0$ der Erhaltungssätze von Energie und Impuls nur linearen Transformationen gegenüber invariant, ohne daß sich durch sie allein mittels physikalischer Beobachtungen irgendein Bezugssystem als physikalisch unberechtigt erweisen ließe. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 932. 1915.)

3) Als Kriterium des prinzipiell Möglichen kann hier immer nur das jeweils betrachtete und, wie gesagt, stets als inhaltlich richtig angenommene Gesetzsystem benutzt werden. Ein unbedingtes Kriterium des Möglichen könnte nur bei unbedingt sicherer Kenntnis von Naturgesetzen gegeben werden.

ihrer mathematischen Ausdrucksform vollständig unabhängig und allein durch ihren physikalischen Inhalt bestimmt.

§ 8. Im folgenden soll nun untersucht werden, welchen so verstandenen Relativitätspostulaten die Einsteinsche „Allgemeine Relativitätstheorie" genügt. Dabei darf nicht verschwiegen werden, daß Hr. Einstein unter einem Relativitätspostulate offensichtlich etwas ganz anderes versteht als ich; denn nach ihm wird eine Physik „dem allgemeinen Relativitätspostulate gerecht", wenn sie folgendem Postulate genügt:

„Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d. h. die beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein kovariant) sind."[1])

Die Forderung der allgemeinen Relativität ist hier also unmittelbar und allein auf den Ausdruck der Naturgesetze gerichtet, dessen Einfluß bei meiner Fassung eines Relativitätspostulates gerade ausgeschaltet ist. Nach dieser ist ein Relativitätspostulat nur dann erfüllt, wenn die von ihm geforderte Relativität des Bezugssystems *notwendig* und durch keine Ausdrucksform der Naturgesetze zu vermeiden ist, während nach Einstein dem allgemeinen Relativitätspostulate schon genügt ist, wenn die allgemeine Gleichberechtigung aller Bezugssysteme nur *möglich* und zum Ausdrucke gebracht ist.

II. Über die prinzipielle Meßbarkeit der Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Einsteinschen Schwerepotentials.

§ 9. Um die der Einsteinschen Theorie notwendigerweise und unabhängig von der Wahl des Ausdruckes anhaftenden Kovarianzeigenschaften zu finden, wird man versuchen, sie ohne Änderung ihres physikalischen Inhaltes auf eine möglichst wenig kovariante Form zu bringen. Es genügt, wenn dies mit einem Teil der Einsteinschen Gleichungen geschieht, und zwar sollen die Bewegungsgesetze des Lichtes und der Massenpunkte im Schwerefelde hierzu gewählt werden, auf denen die ganze Theorie ruht. Wie nun oben die Lichtausbreitungsgleichung der ursprünglichen Relativitätstheorie durch Einführung der unbestimmten Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ in den Ausdruck des Linienelementes auf allgemeiner kovariante Formen gebracht werden konnte, so kommt umgekehrt jede

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

Verwandlung der Einsteinschen Gleichungen in weniger kovariante gleichen physikalischen Inhaltes auf Festlegung aller oder eines Teiles der nur von der Wahl des Bezugssystems abhängigen Bestimmungsstücke der Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ hinaus. Um aber zu wissen, wie weit die Bezugssysteme, in denen die getroffenen Festsetzungen über die $g_{\mu\nu}$ gelten, vor den übrigen nicht nur mathematisch, sondern auch für die Beobachtung ausgezeichnet sind, was allein über die Gültigkeit von Relativitätspostulaten, wie sie hier verstanden werden, entscheidet, muß man vor allem untersuchen, welche Angaben über die Werte der $g_{\mu\nu}$ in einem empirisch gegebenen Bezugssysteme nach der Einsteinschen Theorie durch Beobachtungen nachgeprüft werden können. Das soll im folgenden geschehen.

§ 10. Es seien $\gamma_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ die Werte, die den $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in einem durch vollkommen scharfe Meßwerkzeuge verwirklichten Bezugssysteme $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ zugeschrieben sind und auf ihre Übereinstimmung mit den die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in Σ erfüllenden Werten, $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$, geprüft werden sollen. Die zwischen den $\gamma_{\mu\nu}$ und den $g_{\mu\nu}$ etwa bestehenden Abweichungen können jedenfalls dann durch Beobachtungen festgestellt werden, wenn die $\gamma_{\mu\nu}$ an Stelle der $g_{\mu\nu}$ in die Bewegungsgleichungen des Lichtes oder die eines nur der Schwerkraft unterworfenen Massenpunktes[1]) eingesetzt, diese in $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ nicht erfüllen. Denn außer ihnen treten in diesen Gleichungen nur Quotienten von Koordinatendifferentialen auf, die mit den gegebenen Meßwerkzeugen mit beliebiger Annäherung bestimmt werden können.

Die Richtungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$ der von einem beliebigen Weltpunkte ausgehenden Lichtweltlinien erfüllen in Σ nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Gleichung[1]):

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu}^{1\ldots4} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0$$

oder:

$$0 = \sum_{\mu,\nu}^{1\ldots4} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \cdot \frac{dx_\nu}{dx_4}. \tag{4}$$

1) A. Einstein: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". Ann. d. Phys. 49. p. 769—822. 1916; vgl. p. 777, 778 u. 790ff. § 9.

Soll der Unterschied der $\gamma_{\mu\nu}$ von den $g_{\mu\nu}$ nicht nachweisbar sein, so muß zugleich mit (4) allgemein gelten:

$$(5) \qquad 0 = \sum_{\mu,\nu}^{1\ldots4} \gamma_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_i} \cdot \frac{dx_\nu}{dx_i}.$$

Um die hieraus folgenden Beziehungen zwischen den $\gamma_{\mu\nu}$ und den $g_{\mu\nu}$ zu erhalten, setze man:

$$a) \quad g_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu g_{\mu\nu},$$

$$b) \quad \gamma_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu \gamma_{\mu\nu},$$

$$c) \quad \sum_\mu dx_\mu' u_\mu^\alpha = dx_\alpha$$

$$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1 \ldots 4)$$

und wähle die 16 Größen u_α^μ so, daß die Determinante $|u_\alpha^\mu| \neq 0$ ist und für $\alpha \neq \beta$ gilt[1]):

$$g_{\alpha\beta}' = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_{\alpha\beta}' = 0.$$

Dann gehen (4) und (5) über in:

$$(4') \quad 0 = \sum_\alpha g_{\alpha\alpha}' \left(\frac{dx_\alpha'}{dx_i'}\right)^2 \equiv g_{11}' \left(\frac{dx_1'}{dx_i'}\right)^2 + \cdots + g_{33}' \left(\frac{dx_3'}{dx_i'}\right)^2 + g_{44}'.$$

$$(5') \quad 0 = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha}' \left(\frac{dx_\alpha'}{dx_i'}\right)^2 \equiv \gamma_{11}' \left(\frac{dx_1'}{dx_i'}\right)^2 + \cdots + \gamma_{33}' \left(\frac{dx_3'}{dx_i'}\right)^2 + \gamma_{44}'.$$

Es ist[2]):

$$g_{11}' \cdot g_{22}' \cdot g_{33}' \cdot g_{44}' = |g_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|$$

und ebenso:

$$\gamma_{11}' \cdot \gamma_{22}' \cdot \gamma_{33}' \cdot \gamma_{44}' = |\gamma_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |\gamma_{\mu\nu}|.$$

---

1) Das ist möglich; denn nach a), b), c) stellen die u_α^μ die Koeffizienten der allgemeinsten eindeutigen Transformation im unendlich Kleinen dar, bei der $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ als Komponenten kovarianter Tensoren transformiert werden. Man kann nun bekanntlich durch eine Zwischentransformation erst $g_{11}' = g_{22}' = g_{33}' = g_{44}' = 1$ und $g_{\alpha\beta}' = 0$ für $\alpha \neq \beta$ erreichen und dann mittels einer Lorentztransformation die Achsen des Bezugssystemes mit den Hauptachsen des Tensors γ zur Deckung bringen, so daß ohne Änderung der $g_{\mu\nu}'$-Werte auch $\gamma_{\mu\nu}' = 0$ für $\mu \neq \nu$ wird.

2) Vgl. A. Einstein, l. c. p. 788 u. 789. Da ich der Symmetrie wegen die 4te Koordinate x_4 als imaginär annehme, so ist $|g_{\mu\nu}| > 0$ und $|g_{\mu\nu}| > 0$ statt < 0 wie bei Einstein.

Verschwände $|g_{\mu\nu}|$ in einem endlichen Koordinatengebiete, so müßten wegen

$$|g_{\mu\nu}'| = \left|\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\alpha}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| \quad ^1)$$

jedem Weltpunkte des Gebietes im allgemeinen unendlich viele Koordinatenpunkte zugeordnet sein. Das ist auszuschließen[1]) und auch prinzipiell durch Beobachtung erweisbar, so daß man von vornherein auch $|\gamma_{\mu\nu}| \neq 0$ — abgesehen von singulären Stellen — voraussetzen darf.

Demnach ist keine der Größen $g_{\alpha\alpha}'$ und $\gamma_{\alpha\alpha}'$ gleich Null, und es muß sich eine im allgemeinen nicht verschwindende und von den Quotienten dx_α'/dx_4' unabhängige Größe λ in jedem Koordinatenpunkte so wählen lassen, daß für beliebige Werte von $\frac{dx_1'}{dx_4'}, \frac{dx_2'}{dx_4'}, \frac{dx_3'}{dx_4'}$:

$$0 = \sum_\alpha (\gamma_{\alpha\alpha}' - \lambda g_{\alpha\alpha}') \cdot \left(\frac{dx_\alpha'}{dx_4'}\right)^2$$

ist. Durch Differentiation nach $(dx_1'/dx_4')^2$ usw. folgt hieraus:

$$\gamma_{\alpha\alpha}' = \lambda g_{\alpha\alpha}' \qquad (\alpha = 1 \ldots 4)$$

und mittels Auflösung der Gleichungen (a) und (b) nach den $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$:

(6) $$\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots 4).$$

Die $\gamma_{\mu\nu}$ müssen also den $g_{\mu\nu}$ in jedem Koordinatenpunkte proportional sein. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine von Null verschiedene, aber im übrigen noch unbestimmte Koordinatenfunktion.

§ 11. Zur näheren Bestimmung von λ führen die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Schwerefelde. Diese lassen sich nach Einstein[2]) schreiben:

(7) $$\sum_\alpha g_{\alpha\varrho} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \left[\begin{matrix}\mu\nu \\ \varrho\end{matrix}\right]_g \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

wo

$$\left[\begin{matrix}\mu\nu \\ \varrho\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\right)$$

ist.

1) Vgl. Anmerkung 1 auf vorhergehender Seite.
2) A. Einstein, l. c. p. 791, Gl. (20d) u. (21).

Führt man $\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ ein, so wird:

$$d\sigma \equiv \sqrt{\sum_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu} = \sqrt{\lambda} \cdot ds,$$

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{dx_\alpha}{d\sigma} \cdot \sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2x_\alpha}{ds^2} = \lambda \frac{d^2x_\alpha}{d\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\sigma} \cdot \frac{dx_\alpha}{d\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_s = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma - \frac{1}{2\lambda^2}\left(\gamma_{\mu\varrho} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right)$$

$$\text{mit} \quad \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\right).$$

Die Gleichung (7) geht damit über in:

$$\text{(7a)} \quad \begin{cases} \sum_\alpha \gamma_{\alpha\varrho}\frac{d^2x_\alpha}{d\sigma^2} + \sum_{\mu\nu}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma \frac{dx_\mu}{d\sigma}\frac{dx_\nu}{d\sigma} + \sum_\alpha \frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\sigma}\gamma_{\alpha\varrho}\frac{dx_\alpha}{d\sigma} - \\ \quad - \sum_{\mu\nu}\frac{1}{2\lambda}\left(\gamma_{\mu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right)\frac{dx_\mu}{d\sigma}\frac{dx_\nu}{d\sigma} = 0. \end{cases}$$

Soll nun die Bewegungsgleichung (7) auch mit $\gamma_{\mu\nu}$ statt $g_{\mu\nu}$ erfüllt sein, so müssen die ersten beiden Glieder in (7a) verschwinden. Das dritte läßt sich wegen

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sum_\nu \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{d\sigma}$$

umformen in:

$$\sum_{\alpha\nu}\frac{1}{2\lambda}\gamma_{\alpha\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu}\cdot\frac{dx_\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{dx_\nu}{d\sigma} \equiv \sum_{\mu\nu}\frac{1}{2\lambda}\gamma_{\mu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu}\cdot\frac{dx_\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx_\nu}{d\sigma}.$$

Es folgt also, da

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\nu}} \neq 0$$

ist:

$$0 = \sum_{\mu\nu}\left(\gamma_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right)\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}$$

oder

$$0 = \sum_{\mu\nu}\left(g_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right)\cdot\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Die Richtungskosinusse dx_μ/ds haben nur der Bedingung

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds} = 1$$

zu genügen. Mittels des gleichen Verfahrens, durch das die Gleichung (6) aus (4) und (5) abgeleitet wurde, folgt aus den letzten beiden Gleichungen:

$$g_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho} = \Lambda \cdot g_{\mu\nu}.$$

Dies gilt für beliebige Zahlzeiger $\mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4$. Setzt man $\varrho = \mu$, so folgt $\Lambda = 0$. Es ist daher allgemein:

$$g_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho} = 0 \quad \text{oder} \quad g_{\nu\varrho}/g_{\nu\mu} = \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\Big/\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu}. \qquad (\mu, \nu, \varrho = 1 \ldots 4)$$

Da die Glieder zweier Zeilen der Determinante $|g_{\mu\nu}| \neq 0$ einander nicht proportional sein können, so müssen alle Ableitungen von λ nach den Koordinaten verschwinden. Also ist:

(8) $$\lambda = \text{Const.}$$

§ 12. Von den Bezugssystemen, in denen irgendwelche über die $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen getroffenen Festsetzungen gelten, können demnach nur diejenigen anderen Bezugssysteme durch keine Beobachtung der Bewegungen von Licht und ungeladenen Massen unterschieden werden, in denen alle aus den Festsetzungen folgenden Verhältnisse von $g_{\mu\nu}$ Werten des gleichen oder verschiedener *Koordinaten*punkte zueinander ihre gegebenen Werte haben. Bei den Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ nach den Koordinaten, die ja durch Differenzenquotienten beliebig angenähert werden können, kann daher ebenfalls die Erfüllung jeder ihnen auferlegten Bedingung durch Beobachtung geprüft werden, bis auf die Abweichungen, die sich durch Multiplikation der $g_{\mu\nu}$ Werte aller Koordinatenpunkte mit derselben Konstanten λ erzielen lassen.

Eine von der identischen verschiedene Koordinatentransformation, welche die Funktionen $g_{\mu\nu}$ in der angegebenen Weise ändert, so daß also aus $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in $\Sigma\, g'_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$ im transformierten Bezugssysteme Σ' wird, gibt es im allgemeinen nicht. Denn jede in den $g_{\mu\nu}$ und ihren Differentialen (vom Grade n_σ) homogene Krümmungsinvariante J_σ müßte dabei aus

$$J_\sigma = f_\sigma(x_1 \ldots x_4) \quad \text{in} \quad J_\sigma' = J_\sigma = \lambda^{n_\sigma} \cdot f_\sigma(x_1' \ldots x_4')$$

übergehen. Die hieraus folgenden Gleichungen

(9) $$f_\sigma(x_1 \ldots x_4) = \lambda^{n_\sigma} \cdot f_\sigma(x_1' \ldots x_4')$$

lassen sich aber, da es mehr als vier unabhängige in den $g_{\mu\nu}$

und $dg_{\mu\nu}$ homogene Invarianten J_σ gibt[1]), im allgemeinen nur durch die identische Transformation, $x_1' = x_1, \ldots x_4' = x_4$, befriedigen. Auszunehmen sind nur Fälle besonders weitgehender funktionaler Abhängigkeit der $J_\sigma(x_1 \ldots x_4)$ voneinander, also ganz besonderer Gestaltung der invarianten Krümmungsverhältnisse der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Im allgemeinen sind demnach den durch irgendwelche Bedingungen für die $g_{\mu\nu}$ mathematisch hervorgehobenen Bezugssystemen auch in rein physikalischer Hinsicht keine weiteren — die ja stets derselben wirklichen Mannigfaltigkeit angehören, d. h. in jene transformierbar sein müßten — *gleichberechtigt.*

In den eben genannten Ausnahmefällen genügt offenbar eine einparametrige Gruppe von Transformationen, die $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in $g_{\mu\nu}' = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$ überführt, um aus den mathematisch hervorgehobenen alle physikalisch berechtigten Bezugssysteme zu erzeugen.[2])

III. Beschränkung der Kovarianz der Einsteinschen Gleichungen.

§ 13. Ohne den physikalischen Inhalt der Einsteinschen Gleichungen zu ändern, kann man den in ihnen vorkommenden Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ alle Bedingungen auferlegen, die sich auf jeden Fall allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems erfüllen lassen und daher auch nur über dieses etwas aussagen. Unser Ziel ist es, so durch rein formale Änderung der Theorie eine möglichst enge Gruppe von „berechtigten" Bezugssystemen auszuzeichnen. Dahin scheint man am einfachsten zu gelangen, indem man das Koordinatensystem möglichst eng an die nach Einstein vorhandene natürliche Struktur

1) Z. B. die acht Hauptkomponenten des Krümmungstensors, bezogen auf Koordinatenrichtungen, die mit denen seiner Achsen zusammenfallen (vgl. im folgenden §§ 14 u. 17), sowie die sechs Winkel zwischen diesen Richtungen.

2) Für die Bestimmung der im Sinne von § 7 wirklich erfüllten Relativitätspostulate wird diese Ausnahme insofern bedeutungslos, als sie nur bei ganz besonderer Gestaltung der zufälligen, d. h. gesetzlich nicht bestimmten, physikalischen Umstände (Verteilung der Materie), die ja nach Einsteins Theorie den Krümmungscharakter der Welt mitbestimmen, besteht und daher durch eine (willkürliche) Änderung dieser Zufälligkeiten aufgehoben werden kann.

des Raum-Zeit-Gebietes, gegeben durch seine von Weltpunkt zu Weltpunkt wechselnde Krümmung, anschließt.[1])

1. Benutzung der „Achsenrichtungen" des Krümmungstensors als Koordinatenrichtungen.

Die Komponenten $(\lambda\nu, \mu\tau)$ des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors R im $x_1 \ldots x_4$-Raume mit dem invarianten Linienelemente

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu}$$

sind gegeben durch[2]):

$$(10)\quad \begin{cases} R_{\lambda\nu,\mu\tau} = (\lambda\nu, \mu\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\tau}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right) \\ \qquad + \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\left(\begin{bmatrix}\lambda\tau\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \beta\end{bmatrix}\right). \end{cases}$$

Dabei ist:

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)$$

und $g^{\alpha\beta}$ die normierte Adjungierte von $g_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|g_{\mu\nu}|$ der $g_{\mu\nu}$. Alle griechischen Zahlzeiger α, β, λ, ν usf. laufen von 1 bis 4.

Der Tensor R ist kovariant vom Range 4. Seine Komponenten transformieren sich also nach dem Gesetze:

$$(11)\quad (\lambda\nu, \mu\tau)' = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu'} \cdot \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\mu'} \cdot \frac{\partial x_\delta}{\partial x_\tau'} \cdot (\alpha\beta, \gamma\delta).$$

Ferner gelten die Identitäten:

$$(10a)\quad (\lambda\nu, \mu\tau) \equiv (\mu\tau, \lambda\nu),$$

$$(10b)\quad (\lambda\nu, \mu\tau) \equiv -(\nu\lambda, \mu\tau) \equiv -(\lambda\nu, \tau\mu),$$

also

$$(\lambda\lambda, \mu\tau) = (\lambda\nu, \mu\mu) = 0$$

und:

$$(10c)\quad (12, 34) + (23, 14) + (31, 24) \equiv 0,$$

so daß nur 20 der Komponenten von R algebraisch unabhängig voneinander sind. Denn jede nicht verschwindende Kom-

1) Auf diese Möglichkeit, gerade mittels der allgemeinen Relativitätstheorie Koordinatenrichtungen absolut festzulegen, wies mich Hr. G. Mie brieflich schon im Februar 1916 hin.

2) Christoffel, Journ. f. Math. 70. p. 54. 1869.

ponente ist gleich oder entgegengesetzt gleich einer der 36 Komponenten $(\lambda\nu, \mu\tau)$, bei denen $\lambda\nu$ und $\mu\tau$ je einem der sechs Ziffernpaare 2 3, 3 1, 1 2, 3 4, 2 4, 1 4 gleich sind. Diese 36 Komponenten bilden, nach den $\lambda\nu$ in der hingeschriebenen Reihenfolge in Reihen und nach den $\mu\tau$ ebenso in Kolonnen geordnet, die Elemente einer symmetrischen Matrix, M, deren Hauptdiagonale die sechs Komponenten der Form $(\lambda\nu, \lambda\nu)$ enthält, während die obere Hälfte der Nebendiagonale aus den drei links stehenden Gliedern der Gleichung (10c) gebildet wird. Von den 9 verschiedenen Diagonalelementen von M, die ich als die Hauptkomponenten von R bezeichnen will, sind daher nur 8 algebraisch unabhängig. Zu ihnen kommen als ebenfalls unabhängige „Nebenkomponenten" noch die 12 außerhalb der Diagonalen doppelt auftretenden Elemente von M.

§ 14. Diese Nebenkomponenten kann man nun in einem beliebigen Weltpunkte, durch geeignete Wahl der Achsenrichtungen des Bezugssystemes, zum Verschwinden bringen.

Sei nämlich $\Sigma'(x_1' \ldots x_4')$ das ursprüngliche Bezugssystem mit beliebig gegebenen Werten der $(\lambda\nu, \mu\tau)'$ und $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ das gesuchte, in dem die 12 Nebenkomponenten von R im betrachteten Punkte, P, verschwinden sollen, so ist dies jedenfalls erreicht, wenn man die Werte der 16 Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \quad (\varrho, \sigma = 1 \ldots 4)$$

und die 8 unabhängigen, in Σ gemessenen Hauptkomponenten von R im Punkte P so bestimmt, daß die Transformationsgleichungen (11) erfüllt sind, während alle auf ihren rechten Seiten vorkommenden Nebenkomponenten von R in Σ verschwinden. Denkt man sich, was stets erlaubt ist, die Transformation von Σ' in Σ für die unendlich kleine Umgebung von P in eine Transformation, bei der die vier $\partial x_\varrho / \partial x_\varrho'$ gleich Eins sind, und in eine nachfolgende reine Achsendehnung zerlegt, bei der die 12 übrigen

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \quad (\varrho \neq \sigma)$$

verschwinden, so bringt die letzte Transformation den Gleichungen (11) zufolge gewiß keine neue Komponente von R

zum Verschwinden. Der Tensor R' muß sich daher, wenn überhaupt, auch für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\varrho'} = 1 \,(\varrho = 1 \ldots 4)$$

auf die gewünschte Normalform bringen lassen. Und dies ist möglich, da die für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\varrho'} = 1$$

und verschwindende Nebenkomponenten von R in Σ aus (11) berechnete Funktionaldeterminante von 20 unabhängig gegebenen Komponenten, $(\lambda\nu, \mu\tau)'$, von R' in Σ' bezüglich der zwölf

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \,(\varrho \neq \sigma)$$

und acht unabhängiger Hauptkomponenten von R in Σ nicht identisch verschwindet.[1]) Hieraus folgt zugleich, daß im allgemeinen die

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \,(\varrho \neq \sigma)$$

bestimmte Funktionen der $(\lambda\nu\,\mu\tau)'$ sind, und daß daher nur für bestimmte ausgezeichnete Richtungen der vier Koordinatenachsen in einem gegebenen Weltpunkte alle Nebenkomponenten des Krümmungstensors R verschwinden.

§ 15. Dieses System von Richtungen, welche kurz die Achsenrichtungen des Krümmungstensors R heißen mögen, kann bei besonderer Beschaffenheit von R natürlich un-

1) Man berechnet die Funktionaldeterminante am leichtesten für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} = 0 \,(\varrho \neq \sigma).$$

Von den Differentialquotienten der acht Hauptkomponenten von R' sind dann nur die — in der Hauptdiagonale stehenden — nach den entsprechenden Hauptkomponenten von R von Null verschieden, nämlich gleich Eins. In den zwölf übrigen, den Nebenkomponenten von R' zugeordneten Zeilen stehen nur je drei durch Differentiation von (11) nach den $\partial x_\varrho / \partial x_\sigma'$ sich ergebende Hauptkomponenten von R, und zwar so geordnet, daß die ganze Determinante gleich dem Produkte dreier nicht verschwindender Determinanten vierter Ordnung wird, deren Elemente in den zu $(12, 13)'$, $(42, 43)'$, $(21, 24)'$, $(31, 34)'$ bzw. $(23, 24)'$, $(13, 14)'$, $(32, 31)'$, $(42, 41)'$ bzw. $(12, 14)'$, $(32, 34)'$, $(23, 21)'$, $(43, 41)'$ gehörenden Zeilen stehen.

bestimmt werden oder sonstwie ausarten. Die in der Einsteinschen Theorie wichtigste besondere Form von R ist die, welche R im „materiefreien"[1]) Schwerefelde annimmt. In diesem verschwindet der Einsteinsche Tensor $B_{\mu\nu}$ der Schwerkraftquellen[1]), und da, wie man leicht ausrechnet[2]), identisch

$$B_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda\tau} (\lambda\nu, \mu\tau)\, g^{\lambda\tau}$$

ist, so gilt:

$$B_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\tau} (\lambda\nu, \mu\tau)\, g^{\lambda\tau} = 0. \tag{12}$$

Es sei nun möglich, in einem materiefreien Weltpunkte P die Koordinatenrichtungen und -maße so zu wählen, daß erstens

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \quad \text{und} \quad g^{\nu\nu} = 1 \quad \left(\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right) = 1 \ldots 4)$$

ist, oder auch $g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ und $g_{\nu\nu} = 1$, was bekanntlich stets erfüllt werden kann, und daß zweitens alle Nebenkomponenten von R verschwinden. Für die Hauptkomponenten von R folgen dann aus (12) nur noch die vier Beziehungen:

$$\sum_{\lambda} (\lambda\nu, \lambda\nu) = 0, \tag{13}$$

welche die sechs Glieder $(\lambda\nu, \lambda\nu)$ der Hauptdiagonale in der Matrix, M, der $(\lambda\nu, \mu\tau)$ auf zwei unabhängige zurückführen. Ebenso sind nach (10c) und (10a) nur zwei Elemente der Nebendiagonale voneinander unabhängig, so daß man im ganzen gerade vier unabhängige Hauptkomponenten von R in dem gewählten Bezugssysteme hat.

Transformiert man dies nun durch eine beliebige Lorentztransformation, also so, daß wieder $g_{\nu\nu} = 1$ und $g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ gilt, so geht R nach (11) in einen Tensor R' über, der, da die Lorentztransformation auch bezüglich der Komponenten von R wesentlich sechsparametrig ist[3]), $4 + 6 = 10$ voneinander

---

1) A. Einstein, l. c. p. 802, 803 § 14. A. Einstein bezeichnet „alles außer dem Gravitationsfeld als Materie".

2) Vgl. A. Einstein u. M. Großmann, l. c. p. 35 u. 36, Gl. (43), (44) u. (46), und A. Einstein, l. c. p. 800 u. 801, Gl. (43) u. (44). Die neueste Änderung der Einsteinschen Quellgleichungen des Schwerefeldes (A. Einstein, Berl. Ber. p. 142—152. 1917) konnte leider nicht mehr berücksichtigt werden.

3) Man hat zum Beweise nur zu zeigen, daß es keine infinitesimale Lorentztransformation gibt, die R in sich selbst überführt. Da aber wegen

$$\sum_{\sigma} (\partial x_\varrho / \partial x_\sigma')^2 = 1$$

unabhängige Komponenten hat. Zwischen den 20 nicht durch (10a, b, c) verknüpften Komponenten von R' können sich demnach nicht mehr als $20 - 10 = 10$ unabhängige Beziehungen ergeben, und das müssen offensichtlich gerade die 10 Gleichungen sein, die ganz allgemein für $g^{\nu\nu} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0\,(\mu \neq \nu)$ aus (12) folgen.

Die oben angenommene Möglichkeit, die Koordinatenrichtungen in einem materiefreien Weltpunkte, $B_{\mu\nu} = 0$, so zu wählen, daß sie in die Achsenrichtungen von R fallen und zugleich $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ ist, bedeutet also für R keine über (12) hinausgehende Beschränkung und besteht demnach allgemein. Nennt man wie üblich Koordinatenrichtungen, für die $g_{\mu\nu} = 0\,(\mu \neq \nu)$ ist, zueinander senkrecht[1]), so stehen hiernach in jedem materiefreien Weltpunkte die vier Achsenrichtungen des Weltkrümmungstensors aufeinander senkrecht. Die Anwesenheit von „Materie" bewirkt im allgemeinen, daß das Achsenkreuz von R schiefwinklig wird.

§ 16. Ein Bezugssystem, dessen Achsenrichtungen mit denen des Krümmungstensors R überall zusammenfallen, gibt es wegen der hierfür notwendigen Integrabilitätsbedingungen im allgemeinen nicht. Dagegen darf man ohne weiteres fordern, daß die x_4-Richtung $(dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0)$ überall in eine

---

bei einer solchen, bis auf ∞ kleine Glieder 2ter Ordnung, $\partial x_\varrho / \partial x_\varrho' = 1$ ist, so folgt die Behauptung schon daraus, daß die nach (11) gebildete Funktionaldeterminante der 12 Nebenkomponenten von R' nach den 12 unendlich kleinen Transformationskoeffizienten $\partial x_\varrho / \partial x_\sigma'$ $(\varrho \neq \sigma)$ von Null verschieden ist (vgl. Anm. 1, § 14; die Gleichung (13) ändert daran nichts), also diese Koeffizienten durch die Komponenten von R' und R ausgedrückt werden können und somit für $R' = R$ nur den einen hiermit nach (11) verträglichen Wert Null haben können.

1) Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man den Cosinus des Winkels α zwischen zwei Richtungen:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)_1, \ldots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)_2, \ldots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_2$$

definiert durch:

$$\cos\alpha = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)_1 \cdot \left(\frac{dx_\nu}{ds}\right)_2 .$$

Vgl. z. B. L. Bianchi-Lukat: „Vorlesungen über Differentialgeometrie".

dieser Richtungen fällt.[1]) Denkt man sich diese Forderung als Bedingung für die Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$, die ja nach (10) den Krümmungstensor R bestimmen, ausgedrückt und in die Einsteinschen Gleichungen eingeführt, so ist das entstehende Gleichungssystem stetigen Drehungen der x_4-Richtung, d. h. den eigentlichen Geschwindigkeitstransformationen gegenüber jedenfalls nicht invariant. Die so mathematisch ausgezeichneten Bezugssysteme sind nach § 12 im allgemeinen auch für die Beobachtung vor allen übrigen gekennzeichnet.

Im Sinne der in Abschnitt I dargelegten Auffassung genügt demnach die Einsteinsche Theorie jedenfalls keinem Relativitätspostulate der Geschwindigkeit.[2])

2. Über die Einführung absoluter Invarianten als Raum- und Zeitkoordinaten.

§ 17. In viel bestimmterer und zugleich einfacherer Weise kann man indessen Bezugssysteme mittels der absoluten Invarianten festlegen, die sich aus den Komponenten von R und den $g_{\mu\nu}$ bilden lassen. Da nur 16 Koeffizienten, $\partial x_\nu / \partial x_\rho'$, in die Transformationsgesetze der Tensorkomponenten $(\lambda\nu, \mu\tau)$ und $g_{\mu\nu}$ eingehen, unter denen zusammen $20 + 10 = 30$ unabhängige sind, so muß es im allgemeinen $30 - 16 = 14$ solcher algebraisch unabhängiger Invarianten geben und in materiefreien Gebieten, wo die 10 Gleichungen (12) gelten, immer noch $14 - 10 = 4$. In diesem Falle müssen die Invarianten offensichtlich Funktionen der (invarianten) Hauptkomponenten von R sein, gemessen in dem orthogonalen infinitesimalen Bezugssysteme $\Sigma\,(dx_1, \ldots dx_4)$, dessen Achsenrichtungen mit denen von R zusammenfallen und für das die $g_{\nu\nu} = 1$ sind. Im allgemeinen Falle, $B_{\mu\nu} \neq 0$, vermehrt sich, wie gezeigt, in einem auf entsprechende Weise nach Lage und Maß bestimmten infinitesimalen Bezugssysteme die Zahl der unabhängigen Hauptkomponenten von R auf 8, und dazu kommen noch 6 Größen, welche die Winkel zwischen den

1) Darüber hinaus könnte man z. B. noch verlangen, daß für $x_4 = 0$ die x_3-Richtung, für $x_4 = x_3 = 0$ die x_2-Richtung und endlich die x_1-Achse, $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, überall in eine der Achsenrichtungen von R fallen.

2) Dagegen bleiben auch nach Einführung der auf die angegebene Weise ausgezeichneten Bezugssysteme die Gleichungen invariant bezüglich der unendlichen Gruppe der Transformationen, welche die x_4-Richtung überall ungeändert lassen.

vier Achsenrichtungen von R messen. Das sind zusammen gerade 14 unabhängige absolut invariante Funktionen der $(\lambda\nu, \mu\tau)$ und $g_{\mu\nu}$.

Es seien nun J_1, J_2, J_3, J_4 vier Funktionen dieser Invarianten, die sowohl für $B_{\mu\nu} \neq 0$ wie für $B_{\mu\nu} = 0$ voneinander unabhängig sind, so ist ein Bezugssystem mathematisch vollständig festgelegt und nach § 12 auch physikalisch vor allen übrigen ausgezeichnet, wenn man setzt:

$$x_1 = J_1, \quad x_2 = J_2, \quad x_3 = J_3, \quad x_4 = J_4. \tag{18}$$

§ 18. Die Einführung eines der durch Gleichungen der Art (18) bestimmten Bezugssysteme in die allgemeine Relativitätstheorie, die dadurch mathematisch auf die Form einer vollkommenen „Absolutheorie" gebracht würde, ist aber nur unter der Voraussetzung zulässig, daß in keinem endlichen vierdimensionalen Gebiete die als Koordinaten gewählten Invarianten $J_1 \ldots J_4$ funktional voneinander abhängig seien; denn anderenfalls würden ganze Kontinua von Weltpunkten je einem Koordinatenpunkte zugeordnet werden.

Es ist nun zu fragen, ob diese für die Einführung der Bezugssysteme (18) notwendige Voraussetzung, die wegen der Invarianz von $J_1 \ldots J_4$ zweifellos physikalischen Inhalt hat, der Einsteinschen Theorie etwas physikalisch Neues hinzufügt. Denn nur, wenn das nicht der Fall ist, kann der Nachweis als erbracht gelten, daß nach der in Teil I dargelegten Auffassung der physikalischen Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie physikalisch eine vollkommene Absolutheorie ist.

Für die wirkliche, wahrnehmbare Welt könnte, die Richtigkeit der Einsteinschen Theorie vorausgesetzt, in der Tat jede funktionale Abhängigkeit der $J_1 \ldots J_4$ voneinander in einem nach Zeit und Raum endlich ausgedehnten Gebiete als unendlich unwahrscheinlich oder unmöglich gelten, da sie stets nur einen singulären Fall unter unendlich vielen Fällen völliger Unabhängigkeit der $J_1 \ldots J_4$ voneinander bildet.

Die Gesetze der Einsteinschen Theorie an und für sich bestimmen indessen wie die jeder anderen physikalischen Theorie nicht sowohl, was wirklich geschieht, sondern was überhaupt „möglich", d. h. mit ihnen verträglich ist. Die Annahme der Unabhängigkeit von $J_1 \ldots J_4$ schließt aber

gewisse nach ihnen offene, wenngleich singuläre Möglichkeiten aus; und zwar sind diese wegen der Invarianz der J_ν von allen übrigen auch topologisch verschieden und somit prinzipiell durch Beobachtung von ihnen unterscheidbar. In diesem Sinne bildet die genannte Annahme daher auch einen physikalischen Zusatz zur Einsteinschen Theorie.

3. Nähere Bestimmung des Bezugssystems durch den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen.

§ 19. Deshalb soll eine möglichst weitgehende Befreiung der Einsteinschen Theorie von ihren nur formalen Kovarianzeigenschaften noch auf eine andere Art versucht werden, die dem eben geäußerten Bedenken nicht unterliegt. Das Verfahren besteht einfach darin, die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ im Ausdrucke des Weltlinienelementes, die in der allgemeinen Relativitätstheorie als teilweise unbestimmte und willkürlich wählbare Koordinatenfunktionen auftreten, durch soviel willkürliche Bedingungen näher zu bestimmen, wie sich ohne neue physikalische Voraussetzungen allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes erfüllen lassen, das eben dadurch bestimmt wird.

Eine solche Bedingung, nämlich die Gleichung $|g_{\mu\nu}| = 1$, hat bekanntlich Einstein selbst zur Vereinfachung seiner Gleichungen eingeführt[1]) und auch gelegentlich bemerkt, daß entsprechend den vier willkürlich wählbaren Koordinaten im allgemeinen vier Funktionen der $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen frei gewählt werden dürfen.[2])

Schreibt man z. B.

(14) $\quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} \equiv 1$ für alle x_1, x_2, x_3, x_4

vor, so hat, man um ein gegebenes Bezugssystem $\Sigma'(x_1' \ldots x_4')$ in ein System $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$, in dem (14) gilt, zu transformieren, nur die vier Differentialgleichungen

$$(15) \qquad 1 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}'(\varphi_1, \ldots \varphi_4) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1 \ldots 4)$$

---

1) A. Einstein, l. c. p. 801. Nach Hrn. Einsteins Auffassung liegt hierin aber kein Beweis, daß seine Theorie (in anderer Form) nicht das allgemeinste Relativitätspostulat erfüllen könne. (Vgl. § 8 und A. Einstein, l. c. p. 776 u. 789.)

2) A. Einstein, l. c. p. 812 oben und Anm. 1.

durch geeignete Wahl der vier Funktionen $\varphi_\nu(x_1, \ldots x_4) = x_\nu'$ oder ihrer Umkehrfunktionen $f_\nu(x_1' \ldots x_4') = x_\nu$, die Σ' in Σ überführen, zu erfüllen, was stets möglich ist.[1])

Die Funktionen φ_ν können sogar noch in je einem Raume $x_\nu = \text{Const.}$, etwa $x_\nu = 0$ willkürlich gewählt werden. (Vgl. Anmerkung 1.) Neben (14) darf daher zur näheren Bestimmung von φ_1

$$g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0$$

festgesetzt werden. Denkt man sich — im groben überschlagend — die hieraus für die φ_ν folgende Differentialgleichung (wieder) nach einem der (noch unbestimmten) Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}$$

von φ_1 etwa nach $\partial\varphi_1/\partial x_2$ aufgelöst, so folgt, daß zur Bestimmung von φ_1 auch noch

$$g_{13} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = 0$$

und schließlich ebenso, daß zugleich

$$g_{14} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

gesetzt werden darf. Entsprechende Festsetzungen zur Bestimmung der übrigen Transformationsfunktionen, φ_2, φ_3, φ_4, ergeben sich aus denen für φ_1 durch zyklische Vertauschung. Im ganzen erhält man so außer (14) die Bedingungen:

$$(16)\quad \begin{cases} g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0 \text{ und für } x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ g_{23} = 0 \text{ „ } x_2 = 0 \text{ „ „ } x_3 = x_4 = x_1 = 0 \\ g_{34} = 0 \text{ „ } x_3 = 0 \text{ „ „ } x_4 = x_1 = x_2 = 0 \\ g_{41} = 0 \text{ „ } x_4 = 0 \text{ „ „ } x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ g_{24} = 0 \text{ für } x_2 = x_3 = 0 \text{ und für } x_4 = x_1 = 0 \\ g_{31} = 0 \text{ „ } x_3 = x_4 = 0 \text{ „ „ } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen (14) und (16) sind offensichtlich so gewählt, daß im Ursprunge 0 ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) und soweit wie möglich in seiner Umgebung und auf den Koordinatenachsen,

---

1) Zunächst kann man sich Σ' in ein (gleichbezeichnetes) Bezugssystem transformiert denken, dessen Achsenrichtungen nirgends mit der Richtung, $ds = 0$, einer Vor- oder Nachkegelseite zusammenfallen. Dann ist überall $g_{\nu\nu}' \neq 0$ ($\nu = 1 \ldots 4$) und die Gleichungen (15) lassen sich nach den vier völlig unabhängigen Differentialquotienten $\partial \varphi_\nu/\partial x_\nu$ ($\nu = 1 \ldots 4$) auflösen.

-flächen und -räumen das „natürliche" Maßsystem, $g_{\nu\nu} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$, gilt.

Unbestimmt bleiben hierbei nach der oben angestellten vorläufigen Überlegung allein: erstens die Werte von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in 0, zweitens aber noch sechs weitere, die Funktionen φ_ν mitbestimmende Parameter, etwa die Werte von sechs Differentialquotienten der φ_ν in 0, da ja das Verschwinden jeder der sechs Größen $g_{\mu\nu}\ (\mu \neq \nu)$ in 0 unter den die φ_ν bestimmenden Festsetzungen doppelt gezählt ist. Hiernach gibt es im allgemeinen bei gegebener Gestaltung der invarianten Weltkrümmung für jeden Weltpunkt als Ursprung eine gerade sechsparametrige Schar von Bezugssystemen, in denen die Gleichungen (14) und (16) mathematisch erfüllt sind.

§ 20. Der strenge Beweis hierfür ließ sich nur für die Umgebung von 0 unter der Voraussetzung führen, daß die $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und φ_ν analytische Funktionen ihrer Argumente seien.

In diesem Falle sind die Bedingungen (14) und (16) vollständig erfüllt, wenn nur alle die Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ in 0 gleich 0 sind, deren Verschwinden in 0 aus (14) und (16) folgt, und jede Funktion $\varphi_\nu\ (x_1 \ldots x_4)$ ist vollständig bestimmt, wenn ihr eigener Wert und die Werte ihrer sämtlichen Differentialquotienten in 0 bestimmt sind.

Um nun zu untersuchen, wie weit ein Bezugssystem $\Sigma\ (x_1 \ldots x_4)$ durch die Bedingungen (14) und (16) festgelegt ist, nehme ich an, daß der Ursprung des Bezugssystemes $\Sigma\ (x_1 \ldots x_4)$ mit dem eines fest gegebenen Bezugssystemes $\Sigma'\ (x_1' \ldots x_4')$ zusammenfällt und daß sowohl in Σ für die $g_{\mu\nu}\ (x_1 \ldots x_4$ wie in Σ' für die $g_{\mu\nu}'\ (x_1' \ldots x_4')$ die Gleichungen (14) und (16) erfüllt sind. Dann folgen zunächst für die 16 ersten Differentialquotienten von

$$x_1' = \varphi_1\ (x_1 \ldots x_4), \ldots x_4' = \varphi_4\ (x_1 \ldots x_4)$$

aus

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \cdot g_{\mu\nu}' \tag{17}$$

nach (14) und (16) die 10 Gleichungen:

$$g_{\alpha\alpha} = 1 = \sum_\nu \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha}\right)^2, \tag{18a}$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \quad (\alpha \neq \beta). \tag{18b}$$

Die letzten sechs Gleichungen sagen aus, daß in Σ sowohl wie in Σ' die Anfangsrichtungen der Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen. Läßt man sie zusammenfallen, so daß

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ für } \nu \neq \alpha$$

und nach (18a)

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = +1$$

ist, so sind damit also gerade sechs weitere Bestimmungsparameter (nebst den Vorzeichen von $\partial\varphi_\alpha/\partial x_\alpha$) für Σ willkürlich festgelegt.

Für die 40 zweiten Differentialquotienten der $\varphi_\nu(x_1 \dots x_4)$ erhält man, da nach (14) und (16) alle ersten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}(x_1 \dots x_4)$ und $g_{\mu\nu}'(x_1' \dots x_4')$ in 0 verschwinden, durch Differentiation von (17) die 40 Gleichungen

$$0 = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}' \left(\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder mit Berücksichtigung der für die $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und die ersten Differentialquotienten der φ_ν festgesetzten Werte:

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \quad (\alpha, \beta, \sigma = 1 \dots 4).$$

Die Gleichungen für die 3ten Differentialquotienten der φ_ν und für die jeder höheren Ordnung ergeben sich in entsprechender Weise, indem man mittels (17) die Ausdrücke für alle nach (14) und (16) verschwindenden um je einen Grad niedrigeren Differentialquotienten der $g_{\alpha\beta}$ bildet und gleich Null setzt. Dabei erhält man für die

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (4+n)}{(n+1)!}$$

Differentialquotienten $(n+1)$ter Ordnung der φ_ν nach (14) und (16) auch gerade ebensoviel[1]) Gleichungen.

---

1) Es liefert jede der ersten 4 Gleichungen (16) je $1 + \frac{3 \cdot 4 \dots (n+2)}{n!}$ und jede der letzten 2 je $2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \dots (n+1)}{n!}$ Gleichungen. Das sind zusammen mit den aus (14) folgenden $4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+3)}{n!}$ Gleichungen wie behauptet:

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+4)}{(n+1)!} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 3(n+1) \cdot (n+2) + 2 \cdot 3 \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \dots (n+4)}{(n+1)!}.$$

Wenn alle Differentialquotienten der φ_ν von der 2ten bis einschließlich $n$ten Ordnung verschwinden, so haben diese Gleichungen die einfache Form[1])

$$(19)\quad 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma_1} \cdot \partial x_{\sigma_2} \dots \partial x_{\sigma_n}} \equiv \frac{\partial^{n+1} \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} + \frac{\partial^{n+1} \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}}$$
$$(\alpha, \beta, \sigma_1, \dots \sigma_n = 1 \dots 4).$$

Die Differentialquotienten der φ_ν verschwinden daher von der 2ten bis zu jeder beliebigen Ordnung, wenn nur die Diskriminanten D_n aller zugehörigen Bestimmungsgleichungen (19) von Null verschieden sind.

Die nicht schwierige, aber etwas umständliche Untersuchung dieser Diskriminanten ergibt nun, daß sie alle die genannte Bedingung erfüllen, bis auf die für $n = 2$ gebildete, also den zweiten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ zugeordnete, Diskriminante D_2, welche allein verschwindet.[2])

---

1) Wegen

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\sigma} \equiv \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\sigma} = 0 \text{ für } \nu \neq \sigma$$

treten rechts nur dieselben Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}'$ nach $x_1' \dots x_4$ wie links der $g_{\mu\nu}$ nach $x_1 \dots x_4$ auf, also lauter verschwindende.

2) Aus (14), (16) und (19) folgt, daß ebenso wie in jeder Zeile von D_n auch in jeder Kolonne nur ein oder zwei Elemente von Null verschieden, also gleich Eins sein können. Denkt man sich jedes Paar nicht verschwindender Elemente der gleichen Zeile oder Kolonne durch eine Gerade verbunden, so entstehen Linienzüge, die nur für $n = 1$ und $n = 2$ geschlossen sein können und, wenn sie offen sind, stets eine ungerade Anzahl von Elementen verbinden. Jede Diskriminante D_n bildet ein Produkt der aus den Elementen je eines Linienzuges gebildeten Unterdeterminanten. Von diesen verschwindet keine außer der des — für $n = 2$ einzigen — geschlossenen Linienzuges, der die vier zu

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_3 \partial x_4}, \quad \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x_4 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 g_{34}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 g_{41}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

gehörenden Zeilen verbindet. Also ist nur $D_2 = 0$. Ersetzt man einen der eben aufgezählten Differentialquotienten durch

$$\frac{\partial^2 g_{34}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_4 \partial x_3},$$

so nimmt die entsprechend gebildete Unterdeterminante den Wert $+2$ an. $D_2^* \neq 0$. Das hängt damit zusammen, daß in den Ausdrücken (10) für die Komponenten des Krümmungstensors, R, die letztgenannten zwei Differentialquotienten nur summiert und mit keinem anderen zweiten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ als den vier vorher angeführten verbunden — in $R_{12\,34}$, $R_{23\,14}$, $R_{31\,24}$ — auftreten.

Setzt man indessen noch einen geeignet gewählten, durch (16) nicht bestimmten 2ten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ (in Σ und in Σ') gleich 0, z. B.

$$\frac{\partial^2 g_{24}}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = 0 \tag{20}$$

und die hieraus nach (17) folgende Gleichung an die Stelle der aus

$$\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x_3 \cdot \partial x_4} = 0 \tag{21}$$

abgeleiteten, so tritt statt D_2 eine neue Diskriminante, D_2^*, auf, die sich als verschieden von 0 erweist.[1]) Mit Hilfe dieser neuen Festsetzung (20) sind folglich sämtliche Differentialquotienten der φ_ν, außer den vier $\partial\varphi_\nu/\partial x_\nu$, die gleich 1 sind, zum Verschwinden gebracht. Das Bezugssystem Σ fällt mit Σ' zusammen und ist somit vollständig festgelegt.

Dabei ist zu seiner Bestimmung die eben ausgeschiedene Bedingung (21) noch gar nicht benutzt. Unter Voraussetzung der übrigen aus (14) und (16) für die ersten und zweiten Differentialqnotienten der $g_{\mu\nu}$ folgenden Gleichungen kann sie aber nach (10) ersetzt werden durch die Gleichung

$$R_{2413} \equiv (24, 13) = 0\,, \tag{21a}$$

welche gemäß den Transformationsgleichungen (11) der $R_{\lambda\nu\mu\tau}$ stets durch geeignete Drehung der aufeinander senkrechten Achsenrichtungen von Σ in 0 erfüllbar ist. Die Bedingung (21) kann daher im allgemeinen[2]) eine der sechs Parameterfestsetzungen vertreten, die diese Richtungen bestimmen sollten.

Es fehlt noch der Beweis, daß es für jede Gestaltung der invarianten Weltkrümmnng mindestens ein Bezugssystem gibt, in dem die Bedingungen (14), (16) und (20) erfüllt sind. Dies läßt sich leicht durch vollständige Induktion zeigen.

---

1) Vgl. Anmerkung 2 auf vorhergehender Seite.

2) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, daß $R_{2413} = 0$ für jede Lage der orthogonalen Achsenrichtungen von Σ in 0 gilt. Das tritt, wie sich aus den Transformationsgesetzen (11) der $R_{\lambda\nu\mu\tau}$ schließen läßt, nur dann ein, wenn 0 in einem Weltpunkte liegt, in dem alle Komponenten des Krümmungstensors R verschwinden. Dieser Fall kann indessen durch die Bedingung, $R \neq 0$ in 0, ausgeschlossen werden, die nach der allgemeinen Relativitätstheorie stets erfüllbar ist außer in einer durchaus materie- und gravitationsfreien, d. h. gänzlich leeren Welt, ($R \equiv 0$).

Es seien nämlich in Σ und in Σ' alle aus (14), (16) und (20) für die $g_{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}'$ und ihre Differentialquotienten bis zur $(n-1)$ten Ordnung folgenden Bedingungen erfüllt, und von den Differentialquotienten der n ersten Ordnungen der Transformationsfunktionen $\varphi_\nu(x_1 \dots x_4) = x_\nu'$ wieder nur die vier

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 1 \quad (\nu = 1 \dots 4)$$

von Null verschieden, dann ergeben die Bedingungen für die Differentialquotienten $n$ter Ordnung der $g_{\mu\nu}$ nach (17) Gleichungen der Form:

$$(19a)\quad \left\{ 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} \equiv \frac{\partial^{n+1} \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} + \frac{\partial^{n+1} \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} + \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}'}{\partial x_{\sigma_1}' \dots \partial x_{\sigma_n}'}, \right.$$

die sich von den Gleichungen (19) nur durch die hinzugekommenen dritten Glieder der rechten Seiten unterscheiden. Sie können daher, wenn für $n = 2$ wieder (20) für (21) eintritt, ebenfalls nach den $(n+1)$ten Differentialquotienten der φ_ν aufgelöst und folglich durch geeignete Wahl dieser Größen oder anders ausgedrückt: des Bezugssystemes Σ bei festgehaltenem Σ' befriedigt werden. Da ferner die für die $g_{\mu\nu}$ selbst aufgestellten Bedingungen (18a) und (18b) für sich bekanntlich stets ∞^6 Systeme von Lösungen $\partial\varphi_\nu/\partial x_\alpha$ zulassen, von denen ∞^5 zugleich die Bedingung (21) erfüllen, so gibt es auch stets ∞^5 und im allgemeinen ($R \neq 0$ in 0) nicht mehr Bezugssysteme Σ, die bei gegebener Lage ihres Ursprunges allen aufgestellten Bedingungen (14), (16) und (20) genügen.

§ 21. Dieses nur für analytische Funktionen, $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$, φ_ν und die Umgebung von 0 bewiesene Ergebnis bestätigt durchaus die vorher ohne diese beschränkenden Voraussetzungen angestellte Vorüberlegung.[1]) Es darf daher wohl, wie es im folgenden geschieht, ohne Bedenken auf beliebige stetige und differenzierbare Funktionen $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und φ_ν und auf beliebig weit ausgedehnte Gebiete übertragen werden.

Demnach sind durch die rein formale Änderung der Einsteinschen Theorie, welche in der näheren Bestimmung der bei Einstein in weitem Umfange willkürlich wählbaren Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ durch die Festsetzungen (14), (16)

1) Diese galt natürlich nur dem allgemeinen Falle $R \neq 0$.

und (20) liegt, im allgemeinen die Bezugssysteme einer $(4+5=9)$ parametrigen Gruppe mathematisch und nach § 12 auch für physikalische Beobachtungen vor allen übrigen als „berechtigte" ausgezeichnet. Nur bei singulärer Gestaltung der Weltkrümmung ist die Parameterzahl der physikalisch ausgezeichneten Schar um eins oder — nur für $R=0$ — um zwei größer. Diese Schar ist also im allgemeinen enger begrenzt als bei der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie (11 Parameter) und kann durch weitere Bedingungen, z. B. der Form $R_{\lambda\nu,\mu\tau}=0$ in 0, leicht noch mehr eingeschränkt werden.

§ 22. Dabei ist noch zu beachten, daß die Transformationen zwischen den durch irgendwelche nähere Bestimmungen der $g_{\mu\nu}$ ausgezeichneten Bezugssystemen für die verschiedenen möglichen invarianten Krümmungsverhältnisse[1]) der Welt im allgemeinen auch verschiedene Gruppen bilden.[2]) Nach § 7 kann aber in physikalischem Sinne die Einsteinsche Theorie nur einem Relativitätspostulate genügen, dessen Gruppe unabhängig von dem zufälligen metrischen Charakter der Wirklichkeit berechtigt, also einer Untergruppe jeder einzelnen der erwähnten Gruppen gleich oder ähnlich ist.[3]) Die weiteste Gruppe, die dieser Bedingung zugleich für jede physikalisch adäquate Darstellungsform der Theorie genügt, bestimmt die von der Theorie wirklich erfüllten Relativitätspostulate.

---

1) Es wäre sinnlos, zu fordern, daß in ein und demselben, bezüglich einer gegebenen Form der Einsteinschen Theorie berechtigten Bezugssysteme diese Form für zwei verschiedene oder gar für alle möglichen Krümmungsverhältnisse der Welt zugleich gelten müsse. Denn in keinem Weltpunkte und daher auch in keinem Koordinatenpunkte irgendeines überhaupt zulässigen Bezugssystemes dürfen nach der Theorie zwei verschiedene Werte derselben Krümmungsinvarianten als zugleich gültig vorgestellt werden.

2) Auszunehmen ist der Fall, daß nur $|g_{\mu\nu}| = \text{Const.}$ festgesetzt ist. Hier verknüpft stets dieselbe Gruppe von Transformationen, bestimmt durch $|g_{\mu\nu}|/|g_{\mu\nu}'| = \text{Const.} = |\partial x_\mu/\partial x_\nu'|^2$, die ausgezeichneten Bezugssysteme.

3) Eine solche Gruppe ist die Gruppe der Transformationen, bezüglich derer die aufgestellten Gleichungen kovariant sind. Doch ist nicht gesagt, daß es die weiteste Gruppe der verlangten Art ist, da nur Ähnlichkeit, nicht Formgleichheit, mit je einer Untergruppe jeder der verschiedenen, unter verschiedenen physikalischen Umständen ausgezeichneten Gruppen verlangt ist.

IV. Geometrische Bestimmung des von der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie physikalisch erfüllten Relativitätspostulates und Vergleich mit der ursprünglichen Relativitätstheorie.

§ 23. Welche Gruppe dies ist oder: welche Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie im Sinne des § 7, d. h. unabhängig von der Darstellungsform der Theorie und den zufälligen physikalischen Bedingungen der Wirklichkeit, erfüllt, kann man aber weit einfacher und deutlicher, als wenn man die den $g_{\mu\nu}$ auferlegten Bedingungen bis an die Grenze des Zulässigen zu vermehren versuchte, durch Betrachtung des vierdimensionalen geometrischen Bildes erkennen, unter dem sich das Bewegungsgesetz, $\delta \int ds = 0$, der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse, $(ds = 0)$, und Massenpunkte,

$$(ds^2 = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu < 0),$$

in einer beliebigen Koordinatenmannigfaltigkeit $\Sigma\,(x_1 \ldots x_4)$ darstellt. Für jedes System beliebig gegebener Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\,(x_1 \ldots x_4)$, $(|g_{\mu\nu}| > 0)$ bestimmt die Gleichung

$$\delta \int ds = 0 \tag{22}$$

mit $ds^2 \gtrless 0$ eine unendliche Schar von Weltlinien, den Extremalen der Mannigfaltigkeit $\Sigma\,(x_1 \ldots x_4)$. Jede der Weltlinien stellt eine nach der Theorie mögliche Bewegung eines Massenpunktes $(ds < 0)$ oder Lichtimpulses im Äther dar und ihre Gesamtheit die Gesamtheit der in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen von Lichtimpulsen und Massenpunkten.[1]) Die Menge aller dieser den verschiedenen Funktionensystemen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\,(x_1 \ldots x_4)$ zugeordneter Weltlinienscharen zerfällt nun in unendlich viele Teilmengen, deren jede alle Weltlinienscharen umfaßt, die je einer topologisch gleich sind und daher durch reine Beobachtungen von Licht und Massenbewegungen — ohne willkürliche Beziehung auf ein bestimmtes Bezugssystem — nicht voneinander unterschieden werden können. Zu jeder durch ein bestimmtes

1) Möglich heißt stets: mit den angenommenen Gesetzen verträglich, also hier: mit den angeführten Bewegungsgesetzen vereinbar. Vgl. § 7 Anm. 3.

Funktionensystem $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ gegebenen Extremalenschar gehören ferner nach Teil II ∞^1 weitere, die ihr nicht nur topologisch gleich sind, sondern sich mit ihr vollständig decken, nämlich alle, die zu den Funktionensystemen der Form $g_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ gehören, wo λ unabhängig von $x_1 \ldots x_4$ ist. Jede der genannten Teilmengen läßt sich daher zerlegen in ∞^1 Untermengen, deren jede auch metrisch genau die gleichen Weltlinienscharen enthält. Diejenigen Unterschiede in den invarianten Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die durch die Verschiedenheit der diesen Untermengen zugeordneten Werte des Parameters λ nach § 12 bedingt sind, kommen eben in den Bewegungsgesetzen der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse und Massenpunkte physikalisch nicht zum Ausdrucke.

§ 24. Die absolute mathematische Invarianz der Einsteinschen Bewegungsgesetze erfordert es und beruht offensichtlich auf dem Umstande, daß jede der genannten Untermengen alle Weltlinienscharen enthält, die durch stetige Deformationen aus einer von ihnen entstehen können; denn nach dem oben Ausgeführten ist ein Übergang einer Weltlinienschar von einer Untermenge zur anderen bei keiner stetigen Transformation möglich.

Der physikalische, durch reine (topologische) Beobachtungen prüfbare Inhalt des durch die Weltlinienscharen einer Untermenge Dargestellten ist aber schon vollständig durch jede beliebige einzelne Schar der Menge gegeben, da ja ein topologischer Unterschied zwischen den Scharen derselben Menge nicht besteht und sich jede Schar in jede andere allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes überführen läßt. Aus jeder Untermenge dürften daher alle Weltlinienscharen bis auf eine beliebige ausgeschieden werden, ohne daß dadurch der physikalische Inhalt der Darstellung gegenüber der Einsteinschen Gleichungen (22) eingeschränkt oder sonst wie verändert würde. Vielmehr wären bei diesem Verfahren nur solche Teile des durch (22) gegebenen Bildes entfernt, die sachlich nichts als wiederholte Darstellungen schon einmal dargestellter physikalischer Möglichkeiten bedeuten, obgleich sie, wie gesagt, zur Herstellung der mathematischen Invarianz der Theorie und wohl auch ihrer mathematisch eleganten Form unentbehrlich sind. Dagegen genügt eine Darstellung der

oben beschriebenen Art[1]) der Forderung größtmöglicher sachlicher Knappheit.[2])

§ 25. Die Bezugssysteme der Wirklichkeit, in denen eine solche Darstellung erfüllt ist, d. h. in denen die Weltlinien der wirklichen Lichtimpulse und Massenpunkte einer der in ihr enthaltenen Extremalenscharen angehören, können wegen des rein kinematischen Charakters des Dargestellten prinzipiell durch geeignete Beobachtungen von allen übrigen unterschieden werden (vgl. § 4). Die Einsteinsche Theorie erfüllt daher physikalisch kein Relativitätspostulat, bezüglich dessen invarianter Transformationsgruppe nicht jede einzelne der genannten Extremalenscharen für sich invariant ist; denn da die Scharen durchweg topologisch verschieden oder durch den nach § 12 im allgemeinen unveränderlichen Parameter λ unterschieden sind, so ist eine Transformation der einen in die andere im allgemeinen unmöglich. In sich selbst kann aber nach Teil II eine vollständige Extremalenschar der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit nur bei einer Transformation übergehen, die das zugehörige Funktionensystem $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ bis auf einen konstanten Faktor λ ungeändert läßt, und außer der identischen gibt es keine Koordinatentransformation, die das allgemein leistet. Bezüglich jeder anderen Transformation besteht die Invarianz sogar nur in singulären und in der Wirklichkeit wohl ausgeschlossenen Fällen (vgl. § 12).

---

1) Analytisch nähert man sich einer solchen Darstellung durch das in Teil III, 3, angewandte Verfahren, den $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen Bedingungen aufzuerlegen, die sich allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes unabhängig von dem zufälligen invarianten metrischen Charakter der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit erfüllen lassen und die daher niemals alle ineinander transformierbaren und dem gleichen λ zugehörenden Extremalenscharen ausschließen können. Ob sie auf diesem Wege, der jedenfalls, wie in §§ 20, 21 gezeigt, recht weit führt, vollständig erreicht werden kann, ist fraglich. Indessen kommt es ja nicht darauf an, eine Darstellung der gekennzeichneten Art in mathematisch geschlossener Form wirklich herzustellen, sondern es genügt, daß sie überhaupt, wenn auch nur als geometrisches Bild, denkbar ist.

2) Vorausgesetzt, daß der Parameter λ eine wirkliche physikalische Bedeutung hat. Anderenfalls wäre aus jeder der in der Darstellung enthaltenen Mengen von je ∞^1 topologisch gleichen und nur durch den zugeordneten Wert von λ unterschiedenen Weltlinienscharen alle bis auf eine zu entfernen.

Die Einsteinsche Theorie genügt demnach physikalisch im Sinne des in § 7 Ausgeführten *überhaupt keinem Relativitätspostulate; sie ist ihrem Inhalte nach eine vollkommene Absolut-theorie.*

§ 26. Relativitätspostulate im Sinne des § 7 kann eine Theorie, die das Bewegungsgesetz (22) für Lichtimpulse und Massenpunkte anerkennt oder den durch (22) dargestellten Extremalen sonst eine physikalische Bedeutung zumißt, nur dann erfüllen, wenn sie zugleich nur solche singuläre Gestaltung der invarianten Weltkrümmung als möglich zuläßt, bei der durch nicht identische Koordinatentransformationen die Funktionen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ auf die Form

$$g_{\mu\nu}' = \lambda^2 \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$$

gebracht und somit die zugehörige Extremalenschar in sich selbst transformiert werden kann. Je mehr eine Theorie in dieser Richtung die Möglichkeit verschiedenartiger Krümmungsverhältnisse der Welt einschränkt[1]), desto umfassenderen Relativitätspostulaten kann sie genügen. Die äußerste Grenze ist jedenfalls erreicht, wenn, wie es in der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie geschieht, der Weltkrümmungstensor identisch gleich Null gesetzt wird. In diesem Falle gibt es bekanntlich nur eine Extremalenschar, und diese ist invariant bezüglich der Lorentzgruppe, komponiert mit den Gruppen der gleichförmigen Dilatation und Translation, d. h. sie geht in sich selbst über bei jeder Drehung, Verschiebung und gleichförmigen Dehnung der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Es ergibt sich hiermit also: *Eine physikalische Theorie, welche den Extremalen (22) einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit Minkowskischer Normalform des Linienelements eine der Beobachtung zugängliche Bedeutung zuerkennt oder den invarianten metrischen Charakter der Mannigfaltigkeit sonstwie in gleichem Umfange als prinzipiell beobachtbar hinstellt, kann keinem weiteren Relativitätspostulate im Sinne des § 7 genügen, als denen der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie.* Diese Theorie erscheint somit im Lichte der hier vertretenen Auffassung des

1) Das kann durch invariante, den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen geschehen, deren äußerste, $R_{\lambda\nu,\mu\tau} \equiv 0$, das identische Verschwinden der Weltkrümmung verlangt.

Sinnes der physikalischen Relativitätspostulate nicht als eine mittlere unter gleichfalls möglichen, teils spezielleren, teils allgemeineren Relativitätstheorien, sondern als die Erfüllung des weitesten Relativitätspostulates, dem unter der bereits genannten Voraussetzung, daß die durch die Weltextremalen bestimmten invarianten Weltkrümmungsverhältnisse irgendwie prinzipiell beobachtbar seien, überhaupt genügt werden kann. Das entgegengesetzte Extrem ist verwirklicht in der neuen Einsteinschen Theorie, die, wie oben dargelegt, physikalisch gar kein Relativitätspostulat erfüllt.

Schluß:
Über den Grund der Unerfüllbarkeit des allgemeinen Relativitätspostulates.

§ 27. Ebenso wie die betrachteten Bewegungsgesetze bestimmen auch andere kinematische Gesetze allein durch ihren topologischen, durch Beobachtung prüfbaren Inhalt eine ihnen eigentümliche invariante Transformationsgruppe, deren Relativitätspostulat sie erfüllen.

Stellt man z. B. die kinematischen Gesetze des starren Körpers oder, genauer gesagt, die kinematischen Gesetze starr verbundener Massenpunkte etwa in der Form:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 = \text{Const.}$$
$$t_1 - t_2 = 0$$

auf[1]), so ist die Gruppe der Transformationen, welche die durch die Gleichungen dargestellte unendliche Schar von Weltlinien und Weltliniensystemen in sich überführen, als invariante — von allen ihr ähnlichen nicht unterschiedene — Gruppe aufgefaßt, nur durch die Topologie dieser Weltlinienschar bestimmt, und da die Gleichungen die in ihnen enthaltenen Gesetze ohne überflüssige Wiederholungen ausdrücken, so muß jede Darstellung derselben Gesetze das zu dieser Gruppe gehörende Relativitätspostulat erfüllen. Es besteht also in jedem Falle physikalische Invarianz bezüglich der, je nach Wahl des Bezugssystemes verschieden geformten, Gruppe aller Transformationen, welche die Räume konstanter Zeit und die räumlichen Entfernungen gleichzeitiger Weltpunkte invariant lassen. Jede weitere Transformation ist

1) In dieser Form ist die Undurchdringlichkeit des starren Körpers nicht berücksichtigt.

physikalisch unberechtigt, gleichgültig ob die Gleichungen in einer auch ihr gegenüber invarianten Form aufgestellt sind oder nicht.

§ 28. Dies legt die Frage nahe, auf welcher allgemeinen Eigenschaft der kinematischen Gesetze diese Hervorhebung einer bestimmten invarianten Gruppe von Koordinatentransformationen als der physikalisch allein berechtigten beruht und ob nicht kinematische Gesetze denkbar seien, die auch physikalisch dem allgemeinsten Relativitätspostulate genügen.

Angenommen, ein solches Gesetzsystem sei gegeben. Denkt man sich dann wieder seinen Inhalt durch eine Schar oder allgemeiner (unendlich) viele, topologisch durchweg verschiedene Scharen von Weltlinien, -flächen usw. dargestellt, die je eine Gesamtheit der nach dem Gesetzsystem in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen und Konstellationen wiedergeben, so muß jede einzelne Schar bei jeder beliebigen stetigen Verzerrung wieder in sich selbst übergehen. Greift man also aus irgendeiner Schar einen beliebigen Teil, bestehend aus irgendeinem System von Weltlinien o. dgl., heraus, so ist dieser Teil nicht nur in der herausgegriffenen Form und Lage in der Schar enthalten, sondern zugleich in allen anderen beliebig verzerrten und verschobenen Gestalten und Lagen, die sich mit der ersten in jeder denkbaren Weise berühren und durchdringen. Das bedeutet aber: ein physikalisch dem allgemeinen Relativitätspostulate genügendes Gesetzsystem kann bei den räumlich-zeitlichen Gegenständen, für die es gilt, keine Art von gegenseitiger Berührung und Durchdringung ausschließen, die überhaupt geometrisch bei Wahrung des topologischen Charakters der einzelnen Gegenstände denkbar sind.

Dagegen kann ein solches Gesetzsystem sehr wohl das (regelmäßige) *unbedingte*[1]) Vorhandensein bestimmter Berührungen oder Durchdringungen fordern. Denn denkt man sich diese im geometrischen Bilde der Gesetze einmal gegeben, so

1) Wären die Berührungen oder Durchdringungen nur notwendige Folge anderer Koinzidenzen, so wäre damit das Vorhandensein dieser letzten für sich allein wieder ausgeschlossen, und die Gesetze könnten daher nicht dem allgemeinen Relativitätspostulate genügen.

folgt aus der absoluten Invarianz des Bildes eben nur, daß sie zugleich in jeder anderen durch Verschiebung und Verzerrung entstehenden Lage in ihm auftreten müssen. Das kann aber ihr Vorhandensein an sich niemals ausschließen oder einschränken.

Demnach ist es also der verneinende Inhalt der uns bekannten kinematischen Gesetze, d. h. die in ihnen enthaltene Beschränkung und Verneinung von Koinzidenzmöglichkeiten, welche die physikalische Erfüllung des allgemeinen Relativitätspostulates unmöglich machen.

§ 29. Bei dem oben betrachteten Gesetze der Licht- und Massenbewegung im Äther, das die Weltlinien der Lichtimpulse und Massenpunkte mit Extremalen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit identifiziert, besteht der verneinende Teil des Inhaltes offensichtlich in dem aus dieser Gleichsetzung folgenden Satze, daß durch zwei verschiedene Weltpunkte niemals zwei verschiedene der genannten Weltlinien gehen können. In der Tat ist es gerade dieser Satz, der in jeder Koordinatenmannigfaltigkeit die Schar der miteinander verträglichen Weltlinien und damit zugleich die Gruppe der Transformationen, die sie in sich überführen — im allgemeinen ist es nur die identische Transformation — begrenzt, da er durch jede weitere der Schar zugefügte Weltlinie verletzt würde.

Ebenso sind Systeme starr verbundener Massenpunkte nur vermöge des Ausschlusses ihrer freien Beweglichkeit gegeneinander zu Messungen (z. B. als Skalenpunkte starrer Maßstäbe) und damit zur physikalischen Auszeichnung einer bestimmten Transformationsgruppe prinzipiell verwendbar.

Als Beispiel eines unbedingten rein bejahenden kinematischen Gesetzes könnte man etwa den Satz aufstellen, daß jeder Massenpunkt im Laufe der Zeit mit mindestens einem anderen zusammentreffen und dann dauernd mit ihm vereint bleiben müsse. Das geometrische Bild, das die Gesamtheit der diesem fingierten Gesetze nicht widersprechenden Weltlinien enthält, muß bei jeder stetigen Koordinatentransformation in sich selbst übergehen; denn seine Überdeckung mit einem beliebig verzerrten Bilde kann niemals eine einzeln stehende, mit keiner anderen zusammenfließende Weltlinie ergeben, also keine im ursprünglichen Bilde noch nicht enthaltene Weltlinie.

Tatsächlich scheinen indessen kinematische Gesetze dieser rein bejahenden Art niemals aufgestellt worden zu sein. *Aber nur dann, wenn ausschließlich solche unbedingten und bejahenden Gesetze, an Stelle der allein bekannten verneinenden und bedingten, die Welt beherrschten, würde das allgemeine Relativitätspostulat sachliche Geltung im Sinne des § 7 besitzen.*

Königsberg i. Pr., den 6. August 1917.

(Eingegangen 14. August 1917.)

2. Über die thermoelektrischen Erscheinungen als Mittel zur Analyse der metallischen Mischkristalle und über den Ursprung der Thermoelektrizität; von G. Borelius.

Durch mikroskopische und thermische Analyse ist gefunden worden, daß besonders unter den Legierungen der Metalle Au, Ag, Cu; Pt, Pd, Ni; Ir, Rh, Co; Fe und Mn häufig Beispiele von Legierungsreihen mit ununterbrochener Mischkristallbildung vorkommen.[1]) Durch Arbeiten von Matthiessen[2]), Le Chatelier[3]), Kurnakow und Zemczuzny[4]), Guertler[5]) und anderen wissen wir jetzt, daß bei solchen Reihen die elektrische Leitfähigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration durch eine Kurve dargestellt wird, die sehr an eine Kettenlinie erinnert. Von Schulze[6]) ist dann auch an den Beispielen Pd-Au, Pd-Ag und Pd-Pt nachgewiesen worden, daß die Wärmeleitfähigkeit eben dieselbe Gesetzmäßigkeit zeigt.

Die Frage nach der Kurvenform der Thermokraft bei Mischkristallen wurde fast gleichzeitig von Haken[7]), Broniewski[8]) u. Rudolfi[9]) diskutiert. Besonders durch Thermokraftkurven der Reihen Au-Ag, Au-Cu und Ni-Cu gelangen sie zu der Ansicht, daß auch für die Thermokraft die Kettenlinienform gelten sollte. Wir wollen später auf diese Resultate näher

1) G. Tammann, Lehrbuch der Metallographie p. 220. 1914.
2) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 103. p. 428. 1858; 110. p. 190 u. 222. 18600.
3) H. Le Chatelier, Revue générale des Sciences 6. p. 531. 1895.
4) N. Kurnakow u. S. Zemczuzny, Zeitschr. f. anorg. Chem. 54. p. 149. 1907.
5) W. Guertler, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 51. p. 397. 1906.
6) F. A. Schulze, Physik. Zeitschr. 12. p. 1028. 1911.
7) W. Haken, Ann. d. Phys. 32. p. 291. 1910.
8) W. Broniewski, Revue de Metall. 7. p. 341. 1910.
9) E. Rudolfi, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 67. p. 65. 1910.

eingehen. Ein außerordentlich wertvoller Beitrag zu dieser Frage wurde dann durch die in dem Laboratorium der Firma W. C. Heraeus ausgeführte Untersuchung von Geibel über die Thermokraft der vollständigen Reihen Pd-Au[1]), Pd-Ag und Pd-Pt[2]) von zehn zu zehn Prozent und von hundert zu hundert Grad bis in die Nähe der Schmelzpunkte gegeben. Geibel hat zunächst die praktischen Zwecke vor Augen gehabt und geht auf die Deutung der erhaltenen Kurven nicht ein. Bei den Besprechungen seiner Arbeit in der späteren Literatur findet man aber an mehreren Stellen[3]) die Meinung vertreten, daß die Thermokraftkurven von Geibel denen der elektrischen Leitfähigkeit ähnlich sind. Die Pt-Pd-Kurve gibt auch wirklich einigermaßen eine Kettenlinie wieder. Ein Blick auf das Kurvenmaterial für Pd-Au und Pd-Ag erweckt aber leicht den Gedanken, daß hier eine Gesetzmäßigkeit ganz anderer Art vorliegt.

In der Tat bin ich durch das Studium der Peltierwärme eben derselben Legierungsreihen zur Aufstellung ganz anderer Sätze für die Thermoelektrizität dieser Mischkristalle gelangt, und ich glaube gute Gründe für die folgende Annahme zu haben.

1. *In den untersuchten Mischkristallreihen lassen sich Peltierwärme und Thermokraft (pro Grad Temperaturdifferenz) in ihrer Abhängigkeit von der Atomkonzentration (oder Volumenkonzentration) des einen Komponenten durch Kurven darstellen die aus nahe geradlinigen Stücken zusammengesetzt sind.*

2. *Die Schnittpunkte dieser Linien liegen an Stellen, wo die Atomprozente der Komponenten zueinander in einfachen Proportionen stehen.*

Ich werde später Beispiel für Beispiel die Resultate meiner eigenen sowie anderer Messungen zusammenstellen, um den obigen Ansatz zu prüfen, nachdem ich zuerst einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt habe.

Meine Messungen sind durch die Gefälligkeit der Firma W. C. Heraeus in Hanau ermöglicht worden, die mir die von Geibel hergestellten und früher auch von Schulze be-

1) W. Geibel, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 69. p. 38. 1911.
2) W. Geibel, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 70. p. 240. 1911.
3) A. Bernouilli, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 9. p. 278. 1912; G. Tammann, Metallographie p. 350.

nutzten Edelmetallegierungen leihweise überlassen hat. Ich ergreife hier die Gelegenheit, der Firma meinen besten Dank auszusprechen.

Die Messungen sind nach einer neulichst in dieser Zeitschrift veröffentlichten Methode[1]) für kombinierte Messungen an Peltierwärme und Wärmeleitfähigkeit ausgeführt worden. Ich werde später eine ausführliche Beschreibung der Apparate und Messungen veröffentlichen. Hier möchte ich nur die Resultate einiger Messungen über Peltierwärme gegen Kupfer bei 0° wiedergeben. Sie werden in relativem Maße im Verhältnis zur Peltierwärme einer Kombination von in den Apparat eingehenden technischen Kupfer- und Konstantandrähten angegeben. Ich setze die Peltierwärme Kupfer-Konstantan, die nach vorläufigen Messungen recht nahe bei $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ gr/kal pro Coulomb liegen muß, gleich tausend Einheiten und rechne durchgehend Metalle wie Wismut und Konstantan negativ gegenüber Kupfer. Die Messungen dürften bis auf ein oder zwei der benutzten Einheiten genau sein.

Die Drähte, die mir zur Verfügung standen, waren aus zwei Arten. Einige waren ziemlich dicke (die meisten hatten den Durchmesser 1 mm) und harte Drähte. Vermutlich waren diese Stücken von denselben Drähten, an denen Geibel die Zugfestigkeit, Schulze die Wärmeleitung bestimmt hatte. Ich habe sie mit *a* oder, wenn sie durch Ausglühen weich gemacht waren, mit *a'* bezeichnet. Die anderen hatten den Durchmesser 0,2 mm, wie die von Geibel zu Widerstand- und Thermokraftmessungen benutzten. Ich bezeichne sie als hart mit *b*, nach Ausglühen mit *b'*. Da die *a*- und *b*-Drähte oft nicht zusammenhängende Kurven ergaben, habe ich einige der *a*-Drähte zu Drähten von 0,2 mm Durchmesser ausziehen lassen, die ich mit *c* oder *c'* bezeichne, und die in thermoelektrischer Hinsicht mit den *b*- und *b'*-Drähten gut übereinstimmen. Der Unterschied zwischen den *c*- und *c'*- sowie den *b*- und *b'*-Drähten ist im allgemeinen recht klein gefunden worden.

Pd-Ag.

Die von mir bei 0° bestimmten Peltierkoeffizienten der Pd-Ag-Legierungen werden in Tab. 1 und Fig. 1 wiedergegeben.

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 52. p. 398. 1917.

Tabelle 1.

Pd–Ag.

Peltierwärme gegen Cu bei 0°.

Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichts-prozente Ag	Atom-prozente Ag	Draht	Peltier-wärme
0	0	*b*	[– 210]
10	9,0	*a*	– 378
20	19,1	*b*	– 550
		b'	– 534
30	29,2	*b*	– 757
		b'	– 742
40	39,3	*a*	– 825
		c'	– 935
50	49,4	*b*	– 759
		b'	– 766
60	59,6	*b*	– 462
		b'	– 413
70	69,7	*b*	– 286
		b'	– 286
80	79,8	*a*	– 194
		c'	– 196
90	89,9	*a*	– 138
		c'	– 143
100	100		[– 6]

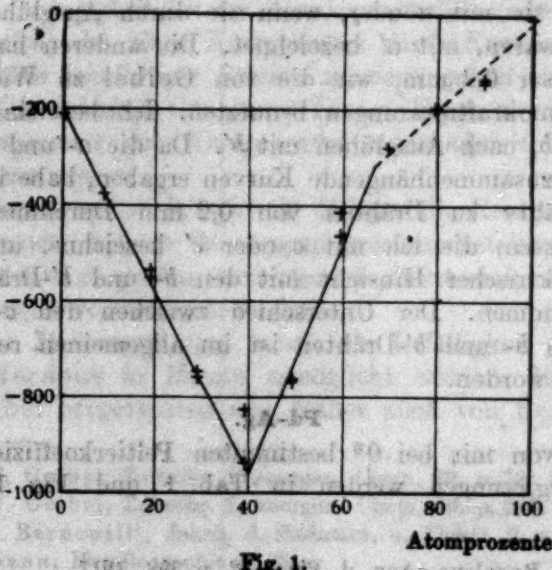


Fig. 1.

Beim Ziehen der Kurven habe ich immer die an *b* (*b'*)-*c* (*c'*)-Drähten erhaltenen Punkte den an *a* (*a'*)-Drähten erhaltenen hervorgezogen. Der Einfluß der Bearbeitung scheint dort am größten zu sein, wo die Kurve steil verläuft. Eine Abweichung nach aufwärts wie die, die der Draht 60 Pd–Ag 40 *a* zeigt, kann hier, wo die Kurve ein Minimum hat, einfachst durch Inhomogenität erklärt werden. Der Draht 90 Pd–Ag 10 *a* war etwas dicker als die übrigen und konnte mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bearbeitet werden. Der Wert für das Pd ist nicht gemessen, sondern nach Geibels Angaben mit Hilfe des bekannten Satzes, daß die Peltierwärme, von einem durch die benutzten Einheiten bestimmten Zahlenfaktor abgesehen, gleich Thermokraft mal absolute Temperatur ist, näherungsweise berechnet. Dabei habe ich den oben angegebenen Wert für Kupfer–Konstantan benutzt. Das zur Herstellung der Pd–Ag- sowie auch der Pd–Au-Legierungen verwendete Pd war übrigens, wie Geibel angibt, nicht ganz rein. Das Ag-Material wird dagegen als gut rein angegeben. Ich habe selbst einen ausgeglühten Stimmel eines reinen Ag-Bleches (Merck puriss.) gemessen.

Die Figur überzeugt sogleich, daß die Meßresultate nicht durch eine Kettenlinie befriedigt werden können. Die fünf ersten Punkte von Pd bis 60 Pd–Ag 40 liegen auf einer gut geraden Linie. Bei 40 Proz. Ag (Pd_3Ag_2) oder wenigstens sehr nahe hat die Kurve ein scharfes Minimum. Der von hier aus nach Ag aufsteigende Ast hat wenigstens einen Knickpunkt, dessen Lage bei 66,7 Proz. Ag ($PdAg_2$) wohl als wahrscheinlich, wenn auch nicht als sichergestellt betrachtet werden kann. Ich zeichne besonders unsichere Linien gestrichelt.

Aus den Angaben Geibels über die thermoelektromotorischen Kräfte (E) der Legierungen gegen Platin zwischen 0° und verschiedenen Temperaturen berechne ich weiter zum Vergleich die Thermokräfte dE/dt. Ich bekomme in dieser Weise zwar nie die wahren Thermokräfte, sondern einen Mittelwert für das benutzte Temperaturintervall, das um so mehr ungenau ist, je größer der quadratische Term in E ist. Ich wähle hier das Intervall 600° bis 900°, teils weil es von Interesse sein kann, die Verhältnisse bei dieser hohen Temperatur, rund 750°, mit denen bei 0° zu vergleichen, teils weil die E-Kurven Geibels hier besonders geradlinig zu gehen scheinen. Ich gebe die Resultate in Fig. 2 wieder.

Auch diese Kurve stützt meinen Ansatz. Der Schnittpunkt bei 40 Proz. Ag ist immer deutlich. Der bei 66,7 Proz. scheint dagegen bei dieser hohen Temperatur stark verwischt

Pd–Ag.

Thermokräfte in Volt · 10^{-6}/Grad gegen Pt um 750° nach Geibel.

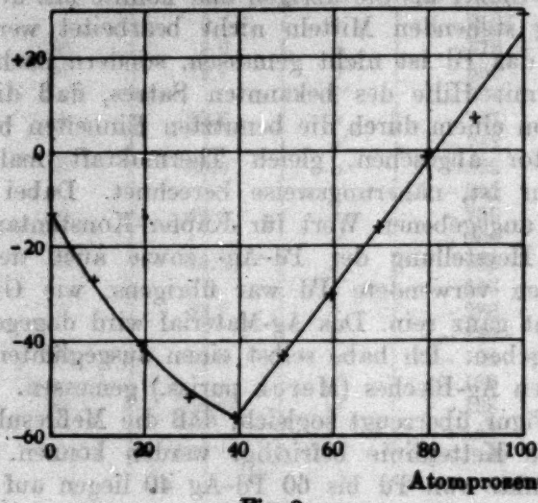


Fig. 2.

zu sein. Die Abweichung von der Linearität kann auf die Rechnung der quadratischen Terme in der $E-t$-Kurve geschrieben werden. In der Tat erscheint diese nach Geibel besonders für Pd und die Pd-reichen Legierungen stärker gekrümmt als bei den Ag-reichen.

Pd–Au.

Meine Messungen an Pd-Au-Legierungen sind in Tab. 2 und Fig. 3 wiedergegeben. Auch hier ist die Verbindung der Punkte durch eine Kettenlinie völlig ausgeschlossen. Die wahrscheinlichsten Lagen der Schnittpunkte sind bei 25 Proz. Au (Pd_3Au), 50 Proz. Au (PdAu) und bei 66,7 Proz. Au ($PdAu_2$) oder 60 Proz. (Pd_3Au_2), unbestimmt welche. Hierzu kommen noch unsichere Andeutungen zu Schnittpunkten in der Nähe der reinen Metalle.

Tabelle 2.

Pd–Au.

Peltierwärme gegen Cu bei 0°.

Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichtsprozente Au	Atomprozente Au	Draht	Peltierwärme
0		*b*	[– 210]
10	5,7	*a*	– 421
		c′	– 428
20	11,9	*b′*	– 518
30	18,8	*a*	– 545
		c′	– 550
40	26,6	*a*	– 586
		c′	– 598
50	35,1	*a*	– 685
		c	– 745
		c′	– 738
60	44,8	*b*	– 924
		b′	– 947
70	55,7	*a*	– 669
		a′	– 653
		c	– 718
80	68,4	*a*	– 256
		c′	– 249
90	82,8	*b′*	– 184
100	100		– 29

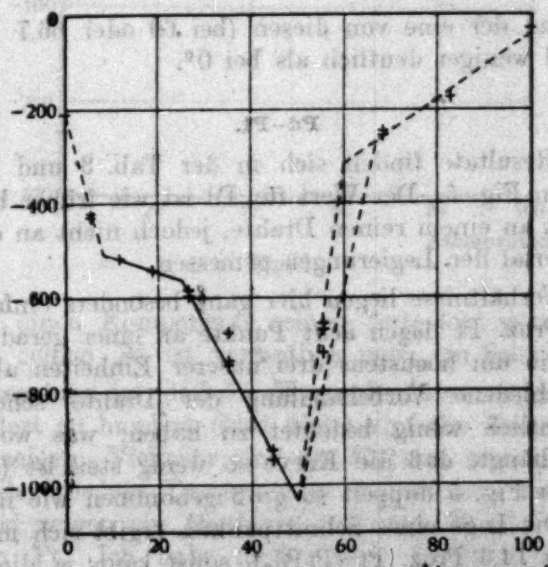


Fig. 3.

Fig. 4 zeigt die Thermokräfte gegen Platin, wie sie aus Geibels Messungen zwischen 600° und 1000° berechnet sind. Nur zwei Schnittpunkte treten hier um 800° noch deutlich

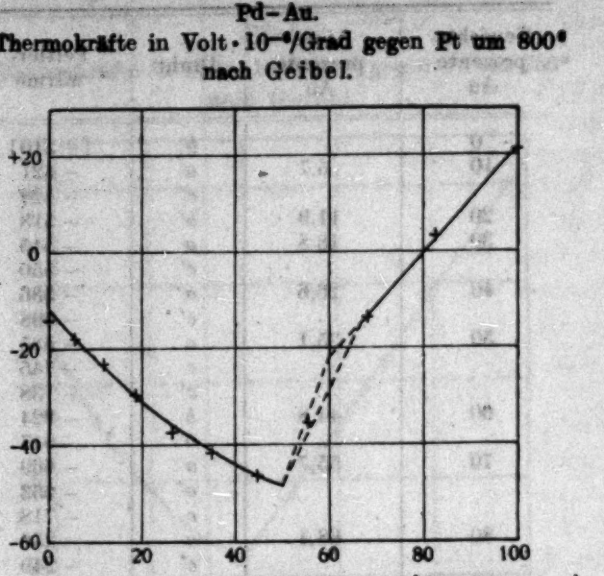


Fig. 4.

hervor, und der eine von diesen (bei 60 oder 66,7 Proz.) ist schon viel weniger deutlich als bei 0°.

Pd–Pt.

Die Resultate finden sich in der Tab. 8 und der dazu gehörenden Fig. 5. Der Wert für Pd ist wie früher berechnet, der für Pt an einem reinen Drahte, jedoch nicht an dem Ausgangsmaterial der Legierungen gemessen.

Die Verhältnisse liegen hier ganz besonders einfach. Von 19—100 Proz. Pt liegen acht Punkte an einer geraden Linie, von der sie um höchstens drei unserer Einheiten abweichen. Die verschiedene Vorbehandlung der Drähte scheint hier außerordentlich wenig bedeutet zu haben, was wohl damit zusammenhängt, daß die Kurve so wenig steil ist (die Ordinate ist in Fig. 5 doppelt so groß genommen wie in Figg. 1 und 3). Die Lage eines Schnittpunktes ergibt sich mit großer Schärfe zu 14,3 Proz. Pt ($PtPd_6$), sonst kann ja die Lage so

Tabelle 8.

Pd–Pt.

Peltierwärme gegen Cu bei 0°.

Cu-Konstantan gleich 1000 Einheiten gesetzt.

Gewichtsprozente Pt	Atomprozente Pt	Draht	Peltierwärme
0	0	*b*	[– 257]
10	5,6	*a*	– 65
20	12,0	*b*	+ 4
30	19,0	*a*	+ 25
40	26,7	*a*	+ 15
50	35,3	*a*	– 7
60	45,0	*a*	– 22
70	56,0	*b'*	– 48
80	68,6	*a*	– 66
90	83,0	*b'*	– 100
100	100		– 135

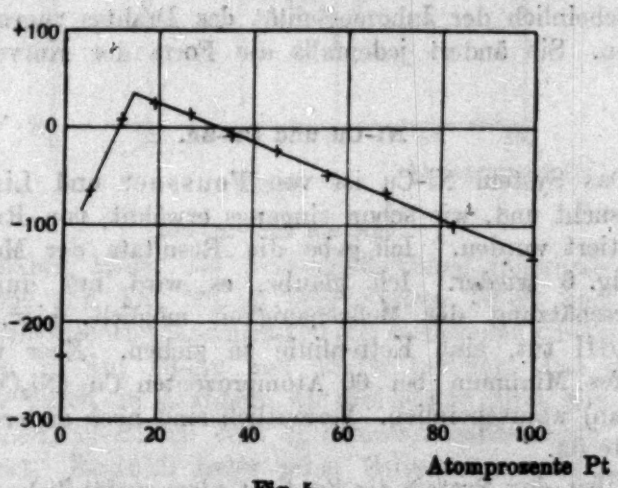


Fig. 5.

nahe der einen Komponente schwer festgelegt werden. Ganz nahe am reinen Pd ist vermutlich noch ein Schnittpunkt.

Zu beachten ist, daß die Thermokraftmessungen Geibels von hundert zu hundert Grad dieses einfache Verhalten nicht deutlich zeigen. Vielmehr sind die Kurven, man mag sie für höhere oder niedere Temperaturen aufzeichnen, unscharf gebogen und zeigen ein Maximum bei etwa 30 oder 40 Atomprozenten Pt. Ich habe mich durch direkte Thermokraft-

messungen, die in meinem Apparate mit einer sehr kleinen Temperaturdifferenz und mit derselben Genauigkeit wie die Peltierwärmemessungen ausgeführt werden können, davon überzeugt, daß kein wesentlicher Unterschied in dem Gang der Peltierkoeffizienten und der Thermokräfte besteht. Ich bekam für die drei höchstliegenden Legierungen beidenfalls im Verhältnis zu Cu-Konstantan (gleich 1000 gesetzt):

	Thermokraft	Peltierwärme
80 Pd-Pt 20 *b*	+ 16	+ 4
zwei Messungen	+ 16	+ 5
70 Pd-Pt 30 *a*	+ 24	+ 25
60 Pd-Pt 40 *a*	+ 15	+ 15

Bei den zwei letzten Drähten war die Übereinstimmung vollständig. Bei dem ersten, der an dem steilen Ast der Kurve liegt, ist die Abweichung zwar erheblich, kann aber wahrscheinlich der Inhomogenität des Drahtes zugeschrieben werden. Sie ändert jedenfalls die Form der Kurve wenig.

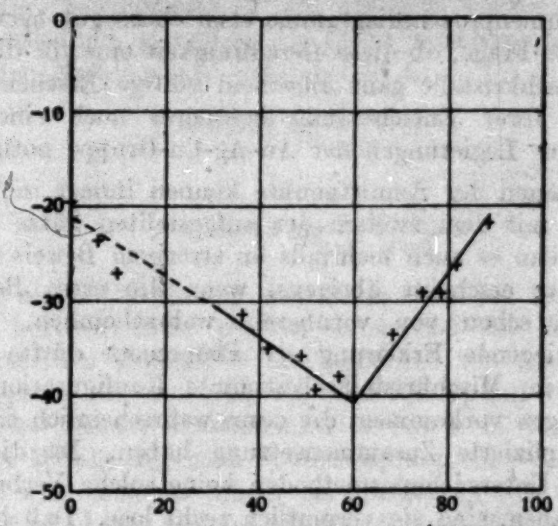
Ni-Cu und Cu-Zn.

Das System Ni-Cu ist von Feussner und Lindeck[1]) untersucht und, wie schon eingangs erwähnt, von Rudolfi[2]) diskutiert worden. Ich gebe die Resultate der Messungen in Fig. 6 wieder. Ich glaube, es wird nur durch eine Unterschätzung der Meßgenauigkeit möglich, hier, wie es Rudolfi tut, eine Kettenlinie zu ziehen. Eher wird ein scharfes Minimum bei 60 Atomprozenten Cu (Ni_2Cu_3, Konstantan) wahrscheinlich. Vermutlich sind noch andere Knickpunkte da.

Über das System Cu-Zn liegt eine ausführliche und genaue Untersuchung von Pinczower[3]) vor. Die Verhältnisse sind hier zwar recht verwickelt, indem nur bis 35 Proz. Zn ununterbrochene Mischkristallbildung vorliegt. In diesem Gebiete zeigen aber die sechs kupferreichsten Legierungen

1) K. Feussner u. St. Lindeck, Abh. d. Reichsanst. 2. 1895.
2) l. c.
3) E. Pinczower, Mitt. d. Physik. Ges. Zürich 24. 1901; vgl. auch den Bericht von A. Bernouilli, Jahrb. d. Radiokt. u. Elektr. 9. p. 278. 1912.

in Übereinstimmung mit meinem Ansatze, nach einem ersten steilen Abfall der Kurve, eine gut gerade Linie.



Fg. 6.

Au–Cu und Au–Ag.

Wir haben bisher die Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Platingruppe (Pt, Pd, Ni) an dem System Pd–Pt und bei Legierungen zwischen Platinmetallen und solchen der Au–Ag–Cu-Gruppe an Pd–Au, Pd–Ag und Ni–Cu verfolgt. Das erste System war durch ein Maximum, die drei letzten durch Minima, die alle thermoelektrisch dem Konstantan nahestanden, gekennzeichnet. Rudolfi hatte seine Beispiele innerhalb der letzten Gruppe gewählt, und seine Messungen zeigen hier einen anderen Gang der Thermokräfte, die in der Tat innerhalb seiner anscheinend recht großen Versuchsfehler durch Kurven der Kettenlinienform befriedigt werden können. Es ist jedoch gar nicht ausgeschlossen, daß sich die Kurven aus geradlinigen Stücken zusammensetzen können. Hierzu reichen aber weder die Zahl der Legierungen noch die Meßgenauigkeit von Rudolfi aus. Ich hoffe in der nächsten Zeit die Frage experimentell in Angriff nehmen zu können.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Messungen in mehreren Fällen die Geradlinigkeit größerer Kurvenstücke gut bewiesen haben. Wir wollen aber dabei ausdrücklich bemerken, daß für die untersuchten Metalle die Atomvolumina recht gleich groß sind, und daß daher die Geradlinigkeit in einem Volumenprozentdiagramme etwa ebensogut hervortreten würde. Die Frage, ob diese Geradlinigkeit eine für die metallischen Mischkristalle ganz allgemein gültige Erscheinung ist, dürfte zu ihrer Entscheidung besonders noch eine Untersuchung der Legierungen der Au-Ag-Cu-Gruppe nötig haben.

Die Lagen der Schnittpunkte können immer in Übereinstimmung mit dem zweiten der aufgestellten Sätze gedeutet werden, wenn es auch mehrfalls an strengem Beweis mangelt. Dieser Satz erscheint übrigens, wenn die erste Bedingung erfüllt ist, schon von vornherein wahrscheinlich. Die am nächsten liegende Erklärung der Phänomene dürfte nämlich sein, daß im Mischkristalle bestimmte Konfigurationen oder Verbindungen vorkommen, die dann wahrscheinlich eine nicht allzu komplizierte Zusammensetzung haben. Da die bisher benutzten Untersuchungsmethoden keine solche Verbindungen ergeben haben, sind sie vermutlich recht lose. Daß bei ihnen auch solche Valenzen vorkommen, die in den Metallsalzen nicht möglich sind, ist eine bei Metallverbindungen schon längst bekannte Tatsache.

Die thermoelektrischen Erscheinungen sind in Übereinstimmung mit dem Gesagten ein vorzügliches Mittel zur Analyse der Mischkristalle. Wir können aber auch voraussagen, daß entsprechende Eigentümlichkeiten in den Kurven der spezifischen Volumina oder der Ausdehnungskoeffizienten hervortreten sollen, falls diese Größen mit genügender Genauigkeit an hinreichend gleichmäßigem Material gemessen werden. Ihr Ausbleiben in den Kurven der Elektrizitäts- und Wärmeleitung kann wohl durch die große Bedeutung der mittleren freien Weglänge für diese Erscheinungen erklärt werden.

Die aufgewiesenen Gesetzmäßigkeiten der thermoelektrischen Erscheinungen, die unter den in diesem Gebiete gefundenen zu den meist ausgesprochenen zu rechnen sind, können anscheinend zur Entscheidung wichtiger Fragen der Elektronentheorie dienen. Die rein „gaskinetische" Elektronentheorie, die getrennte elastische Zusammenstöße zwischen

den Elektronen und den Metallatomen voraussetzt, ergibt für die gegenseitige Peltierwärme zweier Metalle den Ausdruck[1,2])

$$(1) \qquad P = \frac{RT}{c} \operatorname{lognat} \frac{n_1}{n_2},$$

wo R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, c die Äquivalentladung, n_1 und n_2 die Elektronenkonzentrationen in den beiden Metallen sind, oder bei 0° C.

$$(1') \qquad P = 0{,}054 \log \frac{n_1}{n_2} \text{ Volt},$$

oder

$$(1'') \qquad P = 0{,}013 \log \frac{n_1}{n_2} \frac{\text{g} \cdot \text{Kal}}{\text{Coul}}.$$

Um einen Effekt von der Größe wie bei Kupfer-Konstantan hervorzurufen, müßten demgemäß die Elektronenkonzentrationen zueinander im Verhältnis von 1,6 : 1 stehen. Den Ursprung der Entwicklung oder Absorption von Wärme sucht diese Theorie ausschließlich in einem in der Kontaktfläche der Metalle liegenden Potentialsprung. Der Ausdruck (1) ist aber, wie leicht zu sehen, zur Erklärung der experimentellen Befunde kaum geeignet. Damit sich der Peltierkoeffizient mit der Atomkonzentration der Legierungen linear ändern würde, müßte n gemäß einer Exponentialfunktion dieser Konzentration variieren, und eine solche Abhängigkeit läßt sich schwer begründen. Da wir bald andere Ursachen zu den geraden Kurvenstücken aufweisen können, sind wir wohl berechtigt zu schließen, daß die sich nach (1) ergebenden Effekte klein gegenüber dem für Kupfer-Konstantan gefundenen sein müssen. Hieraus folgt entweder, daß die Elektronenkonzentrationen bei den untersuchten Legierungen höchstens um einige Prozente variieren, oder auch, daß die physikalische Voraussetzung für (1), das Zustandekommen eines Potentialsprungs in der Kontaktfläche auf Grund der verschiedenen Elektronenkonzentrationen, unzutreffend ist. Diese Frage muß jetzt offen gelassen werden.

Sobald man die Voraussetzung von getrennten, rein elastischen Stößen zwischen den Elektronen und den Atomen

1) H. A. Lorentz, Arch. Néerl. 10. p. 336. 1905.
2) J. J. Thomson, The Corpuscular Theory of Matter, London 1907.

aufgibt, ergeben sich aber noch andere Möglichkeiten für das Auftreten thermoelektrischer Effekte. Die mittlere potentielle sowie kinetische Energie der beweglichen Elektronen wird in verschiedenen Metallen, je nach den verschiedenen Kraftgesetzen, verschieden. Die Differenz der Summen von potentieller und kinetischer Energie zweier Metalle bestimmt wenigstens einen Teil ihrer gegenseitigen Peltierwärme.[1,2]) Von diesen mittleren Energien ist es nun eben vorauszusehen, daß sie sich der Zahl der verschiedenen Kraftzentra oder auch der von ihnen aufgenommenen Volumina approximativ proportional ändern müssen.

Es scheint wahrscheinlich zu sein, daß man aus dem besseren oder schlechteren Hervortreten der Geradlinigkeit der Kurven im Atomprozenten- oder Volumenprozentendiagramme auf den Grad der Beweglichkeit der Elektronen schließen könnte. Solche Fragen müssen aber dahinstehen, bis daß neues Meßmaterial geschafft ist. Die Möglichkeiten, die Erscheinungen näher aufzuklären, werden dabei eher von der Schwierigkeit, gut vergleichbare Legierungen herzustellen, als von der erreichbaren Meßgenauigkeit begrenzt.

Lund, Physik. Inst. d. Univ., Juli 1917.

---

1) N. Bohr, Metallerner Elektrontheori, Kobenhavn 1911.

2) O. W. Richardson, The electron Theory of matter, Cambridge 1914.

(Eingegangen 1. September 1917.)

Bemerkung zur Korrektur: Es ist später gefunden worden, daß die Unübereinstimmung der an den dickeren $a\,a'$-Drähten und an den dünneren ($b\,b'\,c\,c'$) erhaltenen Peltierkoeffizienten (vgl. p. 617 u. ff.) hauptsächlich auf die Einwirkung der Thomsonwärme bei den dünneren, in ihrer Mitte erwärmten Drähten zurückzuführen ist. Dies ändert jedoch in der Tat den Gang der nur in relativerem Maße gegebenen Kurven nicht wesentlich; nur können wir die abweichenden $a\,a'$-Werte bei der Seite der übrigen vernachlässigen.

3. *Über die Abhängigkeit der Refraktion der Gase vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre. I;* *von V. Posejpal.*

(Der böhmischen Kaiser Franz-Josef-Akademie in Prag für die Rozpravy vorgelegt am 22. Juni 1917.)

§ 1. Die experimentelle Untersuchung der Funktion $n-1=f(p)$, wobei n der Brechungsindex eines Gases für eine bestimmte Lichtart, also $n-1$ die sogenannte Refraktion, p den Gasdruck bedeuten, wurde, wie es der Bedeutung der genannten Funktion entspricht, das Ziel zahlreicher Arbeiten. Diese Bedeutung ist einerseits eine praktische, wenn es sich um die Reduktion der bei ungleichen Drucken ausgeführten Messungen der Refraktion handelt, andererseits und in erhöhtem Grade eine theoretische, nämlich für die Prüfung der Refraktionskonstanten. Zu diesem letztgenannten Zwecke ist noch der Verlauf der Abweichungen des Gases vom Boyle-Mariotteschen Gesetze, also die Funktion $\varrho=\varphi(p)$, wobei ϱ die Gasdichte ist, zu kennen. Auch diese zweite Funktion ist in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Indessen gelang eine befriedigende Erforschung beider Funktionen zuerst für das Gebiet höherer Drucke. Von Arbeiten, die sich im Druckgebiete unterhalb einer Atmosphäre bewegen, waren es erst diejenigen von neuester Zeit, die mit gutem Erfolge endeten. Eigentlich gilt das nur bezüglich der Funktion ϱ, welche von D. Berthelot und Lord Rayleigh festgestellt wurde. Die Funktion $n-1$ ist dagegen für Drucke unterhalb einer Atmosphäre bis jetzt noch nicht befriedigend bekannt. Ihre Erforschung ist, und zwar auch erst in neuerer Zeit, nur durch eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kaiser[1]), unternommen worden. Diese Arbeit, auf welche ich hiermit in bezug auf eine ausführliche Zusammenstellung und Diskussion der bisherigen Literatur

1) W. Kaiser, Ann. d. Phys. 12. p. 210. 1904; Inaug.-Diss. der Königl. Univ. zu Münster i. W., Brilon 1903.

dieses Gegenstandes verweise, wurde auf das Anregen und mit Beihilfe von Prof. Heydweiler ausgeführt, aber ihre Resultate sind, wie es der Autor selbst angibt, nicht sicher genug. So konnte also noch im Jahre 1914 St. Loria in seinem bekannten Buche über die Lichtbrechung in Gasen mit Recht sagen, daß in bezug auf geringe Drucke die Frage nach der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte noch als unbeantwortet zu bezeichnen ist.

Ich entschloß mich, an der schwierigen experimentellen Lösung dieser Frage teilzunehmen, in der Hoffnung, daß es mir meine neue, bisher noch nicht benutzte Meßmethode mit dem Jaminschen Instrumente, die ich im Jahre 1915 in den Verhandlungen (Rozpravy) der böhmischen Akademie in Prag zuerst und bald darauf im Auszuge auch in diesen Annalen beschrieben hatte[1]), erlauben wird, auf diesem Felde weiter vorzudringen, als es meinem Vorgänger gelungen ist. Im allgemeinen ist die Interferenzmethode, und speziell in Verbindung mit dem Jaminschen Instrumente, zweifellos die einzige, die hier befriedigende Resultate versprechen kann und Kayser ebenso wie die meisten übrigen Forscher auf diesem Gebiete benutzten auch wirklich das Jaminsche Instrument.

§ 2. Es bedeute L die Länge des Lichtweges von Wellenlänge λ (im Vakuum) in einer evakuierten Röhre des Jaminschen Instrumentes, und es bedeute weiter s die Anzahl von Interferenzfransen, um welche sich das Interferenzphänomen verschiebt, wenn wir dieselbe Röhre mit einem Gase vom Druck p und Brechungsexponenten n erfüllen. Es gilt dann in bekannter Weise die Gleichung

$$n - 1 = \frac{\lambda}{L} s. \tag{1}$$

Mißt man s, λ, L, so bekommt man dadurch den richtigen Wert vom Brechungsexponenten n beim Drucke p (und natürlich bei der gegebenen Temperatur, die man als unveränderlich betrachtet). Arbeiten wir bei verschiedenen Werten von p, so finden wir das Gesetz der Abhängigkeit $n - 1$ von p. Dieser Vorgang würde aber mit dem großen Nachteile verbunden sein, daß man bald sehr kleine, bald

1) Verhandlungen (Rozpravy) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXIV, Nr. 17. 1915; Ann. d. Pdys. 49. p. 419—452. 1916.

ziemlich große Werte von p und s zu messen hätte, was besonders bei p das Erlangen einer hohen Meßgenauigkeit ausschließen würde. Man kann aber diesen Nachteil umgehen. Deriviert man nämlich die Gleichung (1) nach p, so bekommt man die Gleichung

$$\frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L}\frac{ds}{dp}. \tag{2}$$

Erforscht man nun durch Messungen die Abhängigkeit der Funktion ds/dp vom Drucke, so ist dadurch die obengenannte Aufgabe im Grunde auch gelöst. Aber ds/dp wird sich mit dem Drucke nur allmählich ändern, indem es in erster Annäherung für eine Konstante gehalten werden kann. Es wird infolgedessen hier eine ziemlich schwächere Genauigkeit für die Druckmessungen p erforderlich sein als im Falle der Gleichung (1), wo $n-1$ dem Drucke p in erster Annäherung gerade proportional ist. Nur für ds und dp wird man womöglich hohe Meßgenauigkeiten anstreben müssen. Hier ist die Sache aber eine ganz andere, indem wir das dp für alle Drucke p annähernd konstant behalten können, wo durch natürlich auch ds in engen Grenzen eingeschlossen bleiben wird. Die obere Grenze der Größe dp ist nun durch die Bedingung, daß das Verhältnis ds/dp mit genügender Annäherung dem Differentialquotienten gleich bleibe, bestimmt. Für die untere Grenze sind die zur Verfügung stehenden Meßmittel maßgebend, indem das Verhältnis ds/dp mit einer Genauigkeit wenigstens von 0,1 Proz. gemessen werden muß. Ich habe für dp 100 mm Quecksilber gewählt, wodurch das ds bei der Länge meiner Interferenzröhren annähernd 32 beträgt. Die Erlangung der oben angegebenen Präzision erfordert also, daß die Angaben von dp bis auf einige hundertstel Millimeter, diejenige von ds bis auf 0,03 einer Fransenbreite gesichert seien. Die schon erwähnte Interferenzbeobachtungsmethode erlaubt es, für das ds eine ziemlich größere als die oben genannte Genauigkeit zu erzielen. Es bleibt also nur noch den Genauigkeitsforderungen für dp zu genügen. Das wurde durch die Konstruktion eines besonderen Manometers, das ich im nächsten Paragraphen kurz beschreiben will, erzielt.[1])

1) Eine ausführliche Beschreibung ist in der Originalabhandlung in den Verhandlungen (Rozpravy) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXVI. 1917, zu finden. Vgl. auch Bulletin.

§ 3. Das benutzte Manometer hat Quecksilberfüllung und ist einem Gay-Lussacschen Barometer analog. Die Messungen der Drucke p geschehen in der üblichen Weise durch das Kathetometer. Für die Druckdifferenzen dp wurde aber ein anderes Meßprinzip herangezogen, nach dem man die Verschiebung der beiden Quecksilberoberflächen nicht am Meniskusscheitel, sondern an der scharfen Grenzlinie zwischen Röhrenwand und Flüssigkeit mißt. Die Ablesungen geschehen durch ein horizontales, vertikal verstellbares Mikroskop mit hundertfacher linearer Vergrößerung. Das Mikroskop hat eine hundertteilige Okularskala, deren Skalateil durch sorgfältige Ausmessung auf $0{,}01210 \pm 0{,}0002$ mm bewertet wurde. Die konstante Druckdifferenz dp wurde stets als eine Druckverminderung realisiert, wobei sich die zu beobachtende Grenzlinie in einem jeden von den beiden Manometerschenkeln zwischen je zwei an der äußeren Oberfläche der Röhrenwand angebrachten festen Marken bewegte. Jede Marke besteht aus drei feinen, in gegenseitiger Distanz von 0,4 mm durch einen scharfen Diamanten und unter Wasser mit Hilfe einer Teilmaschine gezogenen horizontalen Linien. Durch die Mittellinien dieser Marken sind an jedem Schenkel eine feste Strecke, deren Länge durch einen Komparator sorgfältigst gemessen wurde, definiert. An dem offenen Schenkel B beträgt diese Strecke bei 0° C $49{,}984 \pm 0{,}001$ mm, diejenige des oben geschlossenen und luftleeren Schenkels A $50{,}009 \pm 0{,}002$ mm. Das Verbleiben der Quecksilberoberfläche zwischen den genannten festen Marken bei jedem beliebigen Drucke p ist dadurch ermöglicht, daß der freie Schenkel A vermittelst zweier parallelen Glasschliffe in einer vertikalen Ebene beliebig drehbar und verstellbar ist. Ist das beobachtende Mikroskop an einen der Grenzlinie zwischen Glas und Quecksilber ganz nahen Teilstrich einer Marke scharf eingestellt, so bleibt dabei bei der gegebenen ziemlich starken Dicke der Röhrenwand die Grenzlinie selbst ganz unsichtbar und umgekehrt. Um von der einen scharfen Einstellung zu der anderen ohne jede Bewegung des Mikroskops selbst gelangen zu können, ist vor dem Mikroskopobjektiv ein leicht bewegliches Fensterchen angebracht, das aus gutem planparallelen Glase von passender Dicke ausgewählt ist.

Die zu messende Druckdifferenz dp ist durch die Summe

der beiden vertikalen Längen $x = 49{,}984 + \xi$, $y = 50{,}009 + \eta$, wobei ξ und η zwei durch das Mikroskop festzustellende kleine Brüche bedeuten, gegeben. Diese mikroskopische Feststellung von ξ und η erfordert im ganzen vier Ablesungen, je zwei an jedem Schenkel. Indem x und y in jedem Schenkel an eine feste, durch die Marken gegebene Strecke gebunden sind, bleibt das Verhältnis $y : x$ für alle Werte dieser Größen praktisch eine Konstante. Durch die Bestimmung dieser Konstante reduziert sich die Anzahl der Mikroskopablesungen bloß auf zwei, nämlich diejenigen am Schenkel *B*. Diese Bestimmung wurde auch ausgeführt und ergab:

$$y : x = 1{,}00111 \pm 0{,}00020.$$

Folglich ist

$$dp = x + y = x \,.\, 2{,}00111\,, \tag{3}$$

wobei also der Fehler in dp 0,01 mm wesentlich nicht übersteigt.

§ 4. Die Verschiebung ds des Interferenzphänomens wurde durch die in § 1 schon angedeutete Methode gemessen. Sie besteht in der Benutzung eines Spektralphotometers in Verbindung mit dem Jaminschen Interferenzrefraktor, wodurch vor allem der große Vorteil entsteht, daß man bei Verwendung einer weißen Lichtquelle genügend monochromatische Messungen ohne jede Einschränkung ausführen kann. Ein zweiter Vorteil dieser Verbindung ist eine erhöhte Ablesungspräzision, die ein hundertstel einer Fransenbreite überholen kann. Das Photometer wurde auf die Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie, $\lambda = 0{,}54623 \,.\, 10^{-3}$ mm eingestellt. Als Lichtquelle diente eine 50kerzige, 12voltige Azotlampe mit einem praktisch linearen Leuchtkörper.

Die Interferenzröhren sind aus Glas, ihre Längen, ebenfalls mit dem Komparator gemessen, sind bei 16° C die folgenden:

die Arbeitsröhre ϱ, ... $L_\varrho = 494{,}650 \pm 0{,}008$ mm,
die Hilfsröhre r, ... $L_r = 495{,}189 \pm 0{,}011$ mm.

Der Gasdruck in der Hilfsröhre r wird stets dem betreffenden Anfangsdruck in ϱ annähernd gleichgehalten.

Was die Temperaturmessungen des untersuchten Gases betrifft, so wurde darauf geachtet, daß die Hundertstel eines

Celsiusgrades gesichert seien. Das benutzte Thermometer war ein altes normales Glasthermometer von Baudin, an dem mit Fernrohrablesung auch die Tausendstel noch geschätzt werden konnten. Das Thermometer befand sich direkt im Innern des gemessenen Gases in einer vertikalen Seitenröhre zu ϱ. Indem sich natürlich das thermometrische Gefäßchen nicht direkt im Gange des Lichtstrahlenbündels in ϱ befinden kann, so wurde noch ein Thermoelement Kupfer-Konstantan, dessen eine Lötstelle mitten im Lichtbündel, die andere fest an dem thermometrischen Zylinderchen lag, verwendet, um dadurch die Angaben des Glasthermometers zu korrigieren. Das Thermoelement wurde durch direkten Vergleich mit dem Normalthermometer Baudin geeicht.

§ 5. Das untersuchte Gas war die Luft. Sie kommt von der Südseite des Physikalischen Instituts und gelangt durch eine über 6 m lange, mitten zwischen dem Boden und der Decke des Laboratoriums liegende Glasluftleitung zuerst in einen großen (ca. 25 Liter) Glasballon, wo sie durch Kalziumchlorid getrocknet wird; von da geht sie in einen analogen Ballon mit Phosphorpentoxyd über; nachher tritt sie schon genügend trocken durch eine mit sterilisierter Watte gefüllte Drexlersche Flasche in eine analoge mit Kaliumhydroxyd gefüllte Flasche, wo sie von Kohlendioxyd befreit wird, um endlich, durch eine neue Schicht Watte passierend, in den eigentlichen Meßraum einzutreten. Die Glaswände dieses Raumes, dem zuerst die beiden Interferenzröhren und das Manometer angehören, werden gegen plötzliche Temperaturschwankungen durch einen starken Wattemantel geschützt. Die Temperaturschwankungen sind in der Tat sehr klein und verlaufen immer sehr langsam. Während einer vollständigen Messung, deren Ausführung durchschnittlich eine volle Stunde erheischt, pflegte die Temperaturänderung im Innern der Röhre ϱ höchstens einige Hundertstel eines Grades auszumachen. Das Meßzimmer ist ein großes unterirdisches Laboratorium mit thermischer Korkisolation der Wände, und jede der verwendeten Lichtquellen wurde, um die Temperaturstabilität des Raumes möglichst wenig zu stören, immer nur während der kurzen Zeit der durch diese Lichtquelle bedienten Ablesung in Tätigkeit gehalten.

Die Messung der korrespondierenden Größen dp und ds

wurde bei jedem mittleren Drucke p immer zehnmal nacheinander ausgeführt. Die daraus resultierenden zehn Werte des Quotienten ds/dp wurden auf die mittlere Temperatur aller Messungen überhaupt, die sehr nahe 16° C betrug, reduziert und zum arithmetischen Mittel zusammengefaßt, das dann als der wahre, dem gegebenen Drucke p angehörige Wert der Funktion ds/dp angenommen wurde. In der Originalabhandlung findet man eine ausführliche Beschreibung des ganzen Meß- und Rechnungsverfahrens sowie eine detaillierte Skizze der Meßeinrichtung. Hier genügt es wohl, nur die Endresultate vollständig mitzuteilen. Man findet sie in der Tab. 1; p ist der mittlere Druck, bei dem die Druckverminderung dp zehnmal wiederholt ausgeführt wurde. Darunter stehen nun die zehn Einzelwerte ds/dp auf 16° reduziert und ihr arithmetisches Mittel; das letztere mit der Angabe des mittleren in den Einheiten der letzten Dezimale ausgedrückten Fehlers versehen. Betrachten wir näher diese arithmetischen Mittel, so sehen wir sogleich, daß sie unzweifelhaft eine mit p steigende Progression bilden; die Differenz zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der Reihe übersteigt weit jeden

Tabelle 1.

(ds/dp) 16°.

$p = 64{,}6$ mm	$p = 162{,}0$ mm	$p = 262{,}0$ mm	$p = 362{,}5$ mm	$p = 462{,}0$ mm	$p = 561{,}5$ mm	$p = 661{,}0$ mm
0,32800	0,32781	0,32816	0,32825	0,32845	0,32738	0,32918
0,32740	0,32767	0,32716	0,32828	0,33077	0,32927	0,32926
0,32739	0,32743	0,32799	0,32794	0,32805	0,32864	0,32923
0,32777	0,32770	0,32762	0,33125	0,32838	0,32996	0,32897
0,32817	0,32772	0,32764	0,32813	0,32841	0,32899	0,32942
0,32756	0,32801	0,32784	0,32828	0,32817	0,32857	0,32904
0,32764	0,32780	0,32838	0,32779	0,32837	0,32899	0,32836
0,32756	0,32767	0,32791	0,32825	0,32841	0,32929	0,32965
0,32735	0,32793	0,32780	0,32823	0,32858	0,32875	0,32943
0,32818	0,32815	0,32822	0,32737	0,32805	0,32903	0,32886
0,32760 ± 10	0,32780 ± 7	0,32787 ± 11	0,32838 ± 33	0,32856 ± 25	0,32888 ± 20	0,32914 ± 12

der angegebenen mittleren Fehler. Es ist also ds/dp keine Konstante, sondern eine steigende Funktion des Druckes.

Wir wollen zur Feststellung dieser Funktion in erster Annäherung eine lineare Abhängigkeit voraussetzen und setzen daher

$$\frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p \,, \tag{4}$$

wobei die Konstanten α_1, β_1 in üblicher Weise durch die Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sind. Bevor wir aber an die diesbezüglichen Rechnungen herantreten, so wollen wir die Drucke p und dp, die für die Schwereintensität in Prag gelten, an die Normalintensität der Schwere reduzieren. Es geschieht dies durch die Multiplikation mit dem Koeffizienten 1,000412.[1]) Die Rechnungen durch die Methode der kleinsten Quadrate ergeben dann das Resultat

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0{,}32725 \pm 0{,}00009 \,, \\ \beta_1 = 0{,}00000259 \pm 0{,}00000021 \,. \end{cases} \tag{4'}$$

Tabelle 2.

p	$\frac{ds}{dp}$ beob.	$\frac{ds}{dp}$ berechn.	Δ
64,6	0,32755	0,32742	− 0,00013
162,1	0,32766	0,32767	+ 0,00001
262,1	0,32773	0,32793	+ 0,00020
362,6	0,32824	0,32819	− 0,00005
462,2	0,32842	0,32845	+ 0,00003
561,7	0,32874	0,32870	− 0,00004
661,3	0,32900	0,32896	− 0,00004

Die Tab. 2 bringt nun einen Vergleich der gemessenen Werte von ds/dp und derjenigen, die nach den Gleichungen (4) und (4') berechnet wurden. In der ersten Spalt stehen die in Normalmillimetern ausgedrückten Drucke p, in der zweiten die zugehörigen Werte von ds/dp nach der Beobachtung, in der dritten dieselben Werte nach der Berechnung; die vierte Spalte bringt die Differenzen Δ der berechneten und der be-

1) Vgl. Strouhal-Kucera, Mechanika (böhmisch), II. Aufl., Prag 1910. p. 542.

obachteten Werte dar. Man sieht, daß die Beobachtung und Berechnung gut miteinander übereinstimmen; die Differenzen Δ bewegen sich durchwegs in den Grenzen der mittleren Beobachtungsfehler. Die angenommene lineare Abhängigkeit reicht also vollständig aus und drückt die gesuchte Funktion im gegebenen Bereiche genügend gut in den Grenzen der Beobachtungsfehler aus.

§ 6. Wir wollen die Verläßlichkeit unserer Messungen, die durch die Konstanten α_1, β_1 endgültig zusammengefaßt sind, einer Prüfung unterwerfen. Zu diesem Zwecke berechnen wir, sich an dieselben stützend, die Luftrefraktion für die gegebene Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie nach dem in diesbezüglichen sehr zahlreichen Arbeiten üblichen Vorgange. Dieser Vorgang fußt bekanntlich auf der Voraussetzung der Unabhängigkeit des Quotienten ds/dp vom Drucke. Dieser Quotient wird dann für einen dem Drucke von 760 mm nahen mittleren Druck p und eine Temperatur t festgestellt, wobei wohl die Druckdifferenz dp weit größer zu sein pflegt als die von uns benutzte, und sodann die Refraktion $n-1$ aus der Gleichung (2) einfach berechnet, was also ergibt

$$n-1=\frac{\lambda}{L}\frac{ds}{dp}\cdot 760.$$

Die Reduktion von $n-1$ auf die Temperatur 0^0 geschieht durch den Faktor $(1+\alpha t)$, wobei α den thermischen Volumkoeffizienten bei konstantem Drucke bedeutet, so daß man endlich für die normalen Bedingungen des Druckes und der Temperatur bekommt:

(5) $$n-1=\frac{\lambda}{L}\frac{ds}{dp}760\,(1+\alpha t).$$

Setzt man in diese Gleichung unsere Werte ein, nämlich:

$\frac{ds}{dp}=0{,}32922\pm 0{,}00025$
(für $p=760$ mm nach der Gleichung [4] berechnet),

$\lambda=0{,}54623\,.\,10^{-3}$ mm,

$L=494{,}650$ mm,

$t=16^0$,

$\alpha=367{,}28\,.\,10^{-5}$ (nach Chappuis),

so bekommt man

$10^6 (n-1) = 292{,}54 \pm 0{,}20$, für den Normaldruck 760 mm,

$10^6 (n-1) = 292{,}66 \pm 0{,}20$, für den Druck 760 mm in Prag.

Die Angaben früherer Arbeiten findet man in der 4. Auflage der bekannten Tafeln von Landolt-Bernstein, mit Ausnahme der Zahl von Loria[1]). Ordnet man sie alle, die unserige mitbegriffen, der Größe nach in eine Reihe, so bekommt man die folgende Übersichtstabelle.

Tabelle 8.

Beobachter	$(n-1).10^6$
L. Lorenz 1880	291,8
Kessler 1909	292,3
Scheel 1907	292,4
Ahrberg 1909	292,5
Chappuis und Rivière 1888	292,6
Posejpal 1917	292,7
Kayser und Runge 1893, St. Loria 1909	292,9
Benoit 1889, Rentschler 1908	293,0
Perreau 1896	293,3
Mascart 1877	293,4
Walker 1903	293,5
C. M. Cuthbertson (3) 1909	293,6
Koch 1909	293,7
Herrmann 1908, Gruschke 1910	294,6
Ketteler 1865	295,4

Wie wir sehen, so befindet sich die unserige Zahl zwar nicht gerade in der Mitte der Reihe, aber doch sehr nahe derselben, so daß also die Verläßlichkeit unserer Messungen eine gute ist. Wir haben in die Vergleichsreihe die der Schwereintensität in Prag, also des 50. Parallelkreises, entsprechende Zahl angenommen, da auch die Mehrzahl der übrigen Zahlen dieser Schwereintensität angenähert entspricht.

§ 7. Wir wollen nun die Abhängigkeit der Refraktion $n-1$ vom Drucke bestimmen. Es genügt zu diesem Zwecke in die Gleichung (2) für ds/dp den Wert nach der Gleichung (4) einzusetzen und die Gleichung (2) nachher in den Grenzen von $0-p$ zu integrieren. Wir schreiben das leicht zu be-

1) St. Loria, Ann. d. Pdys. 29. p. 619. 1909.

stimmende Integral in der schon von Mascart eingeführten Form, nämlich:

$$n - 1 = K p (1 + \beta p) . \tag{6}$$

Es ist also, wie leicht einzusehen,

$$K = \frac{\lambda}{L} \alpha_1 , \qquad \beta = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} ,$$

was nach dem Einsetzen der schon sämtlich bekannten Werte der in die rechten Seiten dieser Gleichungen eintretenden Größen ergibt:

$$\begin{cases} 10^6 K = 0{,}36138 \pm 0{,}00010 , \\ 10^8 \beta = 396 \pm 32 , \end{cases} \tag{6'}$$

wobei wieder wie sonst der Druck in Normalmillimetern Quecksilber ausgedrückt ist.

Die Konstante K hängt von der Wellenlänge ab, und ihr Gültigkeitsbereich ist folglich nur an die Wellenlänge, für welche sie bestimmt wurde, in unserem Falle also an $\lambda = 0{,}54623 \,.\, 10^{-3}$ mm, gebunden.

Die Konstante β ist von der Wellenlänge unabhängig. Es ist dies eine Folge der Tatsache, daß die sogenannten Dispersionskonstanten

$$\frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda'} - 1} ,$$

wo λ und λ' zwei verschiedene Wellenlängen sind, vom Drucke nicht abhängen, wie es in neuester Zeit für mehrere Gase, unter ihnen auch für Luft, und für große Druckintervalle L. H. Siertsema und M. de Haas bewiesen haben.[1])

Die beiden Konstanten K und β sind in demselben Grade gesichert wie die Konstanten α_1, β_1, deren Verläßlichkeit im vorigen Paragraphen geprüft wurde. Dieser Sicherheitsgrad ist ganz ausreichend für die Konstante K, der bei weitem nicht jene theoretische Bedeutung zukommt, wie der Konstanten β. Wir wollen also in erster Linie einen Vergleich des von uns gefundenen Wertes von β mit denjenigen der früheren Forscher, solange sie überhaupt vorliegen, vornehmen.

Wie es schon anfangs gesagt wurde, ist in dem von uns behandelten Gebiete der Drucke unterhalb einer Atmosphäre

1) L. H. Siertsema u. M. de Haas, Physik. Zeitschr. 14. p. 568. 1913.

bis jetzt nur eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kayser, durchgeführt worden. Nun gibt Kayser für Luft an:

$\beta = 0{,}00000095$ mit einem möglichen Fehler $\pm 0{,}0000007$. Unser Wert $\beta = 0{,}00000396$ erscheint also mehr als viermal größer zu sein.

Die Unstimmigkeit beider Werte ist also eine vollständige. Doch muß uns diese Tatsache nicht allzuviel ärgern, da wir wissen, daß Kayser selbst den von ihm gefundenen Wert nicht für verläßlich hält.

Die Arbeiten aller übrigen Forscher beziehen sich auf Druckintervalle, die zwar auch bei Null anfangen, aber weit bis zu mehreren Atmosphären hin reichen. Es gehören hierher:

Mascart (1877) . . . . . mit $\beta = 72 \cdot 10^{-8}$,
J. Chappuis und Rivière (1888) „ $\beta = 65 \cdot 10^{-8}$,
Perreau (1896) . . . . . „ $\beta = 90 \cdot 10^{-8}$.

Diese Zahlen, durchaus kleiner als die Kaysersche, sind auf den ersten Blick mit unserer Zahl in einem noch größeren Widerspruch als die erstgenannte, indem sie 4—6mal kleiner sind als der von uns angegebene Wert. Beobachtet man aber dieselben näher, so bemerkt man sofort, daß sie auch untereinander nicht allzugut übereinstimmen; ihre gegenseitigen Differenzen übertreffen weit die zugelassenen Fehler. Dieser Umstand weist daraufhin, daß β vom Drucke abhängig sein muß und daß also die einfache Funktion (4), die für unsern Druckintervall vollständig ausreichte, für größere Druckintervalle nicht ausreichen wird. Wir sehen in der Tat aus der Tab. 4, bei welcher sich in der ersten Säule das

Tabelle 4.

Druckintervall	Mitteldruck p	β	$p\beta$	$t°$
0—760 mm	380	0,00000396	0,00150	16°
0—3400 mm	1700	0,00000090	0,00153	16°
300—6000 mm	3150	0,00000072	0,00227	22°
0—15000 mm	7500	0,00000065	0,00488	21°

Druckintervall, in dem β nach Angabe des Autors gültig sein soll, in der zweiten der Mitteldruck p dieses Intervalles befindet, daß die Werte β nach dem steigenden Drucke ge-

ordnet eine fallende Progression bilden. Also β fällt mit steigendem Drucke ab. Welches auch das Gesetz dieses Fallens sein mag, wir können immer in erster Annäherung an eine Proportionalität denken, so daß also das Produkt $p\beta$ für alle Drucke p konstant bleiben müßte. Die vierte Spalte derselben Tabelle zeigt nun, daß die ersten zwei Werte dieses Produktes wirklich mit einer großen Annäherung gleich sind, von da aber weiter, daß das Produkt $p\beta$ steigt. Da die Temperatur, die auf β auch einen Einfluß haben wird, für alle Drucke der Tabelle beinahe dieselbe ist, so muß man den Wertegang des Produktes $p\beta$ als vom Drucke p allein abhängig ansehen.

Wir finden also zuerst das wichtige Ergebnis, daß β eine Funktion des Druckes ist, so daß es mit steigendem Drucke fällt, anfangs steil, und zwar bis zu beinahe vier Atmosphären dem Drucke umgekehrt proportional, dann immer langsamer und langsamer.

Eine zweite, für uns nicht minder wichtige, aus der Tab. 4 sich ergebende Tatsache ist die, daß der von uns gefundene Wert der Größe β sich mit den Werten der übrigen Beobachter in einem sehr guten Einklange befindet.

Berechnet man nun jetzt nach der Gleichung (6) und (6') die Luftrefraktion für normale Druck- und Temperaturbedingungen, so bekommt man

$$10^6(n-1) = 291{,}67 \pm 0{,}14 .$$

Diese Zahl, die wir ihrer Natur nach als einen korrigierten Wert der Luftrefraktion halten müssen, stimmt von den in der Tab. 3 angeführten Zahlen fast vollständig mit der Lorenzschen überein. Diese Übereinstimmung ist keine zufällige. L. Lorenz maß die Luftrefraktion für das Natriumlicht und kam zu der Zahl $291{,}08 \cdot 10^{-6}$. Wie man aus seiner Arbeit[1]) erkennt, bemühte er sich, diese Zahl mit großer Sorgfalt zu bestimmen und hat sie wiederholt gemessen aus dem Grunde, weil sie so weit von den damaligen Zahlen, namentlich denjenigen von Mascart und Ketteler, abwich. Indem man seine Arbeitsweise näher beobachtet, so sieht man, daß sie im wesentlichen mit derjenigen, die bei der Gleichung (1) (p. 632) besprochen wurde, identisch war, d. h. Lorenz maß die Verschiebung des Interferenzphänomens, die entsteht,

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wenn das Gas vom Drucke Null zum Drucke 760 mm steigt oder umgekehrt. Es wurde dort darauf hingewiesen, daß dieser Vorgang zu einem richtigen Werte für $n-1$ führen muß, wie auch $n-1$ vom Drucke abhängig sein mag. Die so gefundene Zahl bezieht sich auf den Normaldruck und die D-Linie. Da die Mehrzahl der Beobachter die Dispersion für die grüne Quecksilberlinie durch die Zahl $n-n_D = 7 \cdot 10^{-7}$, die auch dem Mittel aller in den Landolt-Bernsteinschen Tafeln angeführten Zahlen gleich ist, angibt, so folgt also nach Lorenz für die Luftrefraktion der grünen Quecksilberlinie die Zahl $291{,}78 \cdot 10^{-6}$, die mit unserer Zahl $291{,}67 \cdot 10^{-6}$ in den Grenzen der Beobachtungsfehler vollständig übereinstimmt.

Nach demselben Prinzipe wie Lorenz, aber sonst nach einer ganz anderen Methode, arbeitete im Jahre 1907 Scheel, dessen Zahl sich in der Tab. 3 praktisch an zweiter Stelle zugleich mit der Zahl von Kessler befindet. Man sieht hier eine gewisse Genugtuung für L. Lorenz, dessen Zahl unverdienterweise für die am wenigsten richtige gehalten wurde. Es ist klar, daß man bei Arbeiten, die auf Grund des Quotienten $\Delta s/\Delta p$ operieren, für die Refraktion $n-1$ einen um so größeren Wert finden muß, je größer der mittlere Druck p dieses Quotienten ist, wodurch sich wahrscheinlich die großen Zahlen einiger Beobachter erklären lassen. Es wird von Interesse sein, diese Sache näher festzustellen. Bei einigen Autoren wird dies wohl schwer möglich sein, da sie den Mitteldruck p nicht angeben.

§ 8. Das Hauptinteresse, das zum Studium der funktionellen Abhängigkeit der Refraktion vom Drucke führt, liegt in der Aufgabe, die Unveränderlichkeit der sogenannten Refraktionskonstanten zu prüfen. Die allerwichtigste unter ihnen ist wegen ihrer theoretischen Begründung die Lorenz-Lorentzsche Konstante

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho},$$

nachher die Konstante von Newton-Gladstone $n-1/\varrho$, die sich im Falle der Gase von der ersteren bloß durch einen Zahlenfaktor unterscheidet, indem beide mit großer Annäherung die Gleichung

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho} = \frac{2}{3}\frac{n-1}{\varrho}$$

erfüllen. In unserem Falle genügt es also in erster Annäherung die Newton-Gladstonsche Konstante zu beobachten.

Wir können die Gasdichte ϱ für kleine Drucke befriedigenderweise durch eine analoge Funktion des Druckes, deren wir uns im Falle der Refraktion bedient hatten, ausdrücken. Wir haben somit neben der Gleichung

$$n - 1 = K p (1 + \beta p) \tag{6}$$

eine analoge Gleichung

$$\varrho = K_\varrho p (1 + \beta_\varrho p), \tag{7}$$

was durch die Division der beiden Gleichungen und bei Vernachlässigung aller höheren Potenzen von β_ϱ ergibt

$$\frac{n-1}{\varrho} = C \left(1 + (\beta - \beta_\varrho) p\right). \tag{8}$$

Soll also $n - 1/\varrho$ eine vom Drucke unabhängige Konstante bleiben, so muß $\beta = \beta_\varrho$ sein.

Man bestimmt β_ϱ aus dem Verlaufe der Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze. Nach Berthelot drückt man diesen Verlauf für kleine Drucke durch die Gleichung

$$\frac{p_0 v_0}{p v} - 1 = \alpha (p - p_0)$$

aus, wobei es zur Bestimmung von α genügt, zwei in dem betrachteten Druckintervalle womöglich gut gemessene Werte des Produktes pv zu kennen. Berthelot hat sehr genaue Messungen für eine ganze Reihe von Gasen durchgeführt und die Größe α für Drucke unterhalb einer Atmosphäre bestimmt; aber die Luft ist in dieser Reihe nicht enthalten. Diese Messung hat Lord Rayleigh im Jahre 1905 durchgeführt mit einem Resultate von $\alpha = 0{,}00000061$, welchen Wert wir für verläßlich halten können, wogegen die Angaben aller älteren Beobachtungen unsicher sind. Eine einfache Rechnung zeigt, daß es mit großer Annäherung $\beta_\varrho = \alpha$ ist, so daß wir also zum Vergleich folgende Werte bekommen:

$$\beta = 0{,}00000396,$$
$$\beta_\varrho = 0{,}00000061$$

und folglich

$$\beta - \beta_\varrho = 0{,}00000335.$$

Es ist also weit davon entfernt, daß β und β_ϱ gleich groß seien, und somit ist für Drucke unterhalb einer Atmosphäre $n - 1/\varrho$ keine Konstante.

Tabelle 5.

p mm	$\frac{n-1}{\varrho}$	$\frac{3}{2}\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho}$
0	9974,6	9974,6
100	9977,9	9977,6
200	9981,3	9980,8
300	9984,6	9983,9
400	9988,0	9987,0
500	9991,3	9990,1
600	9994,6	9993,1
700	9998,0	9996,3
760	10000,0	9998,1

Die Tab. 5 erlaubt nun eine bequeme numerische Schätzung, wie weit sich $n-1/\varrho$ von der Konstante entfernt, wobei es für den Druck einer Atmosphäre gleich 10000 gesetzt wurde. Wir sehen, daß es in dem Druckintervalle 0—760 mm beinahe um $^1/_4$ Proz. steigt, was also im ganzen wenig ist; sollten aber β und β_ϱ ihre bezüglichen Werte auch für höhere Drucke beibehalten, so würde man alsbald einen ziemlich großen Zuwachs von $n-1/\varrho$ erhalten. Dem ist aber nicht so; die Gleichungen (6) u. (7) gelten eben nur für kleine Drucke. Will man sie auch für größere Druckintervalle gelten lassen, so ist es erlaubt, aber dann verlieren β und β_ϱ ihren Charakter von Konstanten und werden mit dem Drucke veränderlich. Das haben wir übrigens vom β im vorigen Paragraphen schon bewiesen und gezeigt, wie es mit dem Drucke abfällt. Der Verlauf von β_ϱ mit dem Drucke ist ein analoger, und man kann ihn nach den Arbeiten von Regnault und Amagat beurteilen, wie es die folgende Übersichtstabelle zeigt, die in der ersten Reihe die Werte des Mitteldruckes p, darunter die Werte von β_ϱ und β bringt.

p =	570	2880	7500	12500	17500	22500	27500	32500 mm
$\beta_\varrho \cdot 10^3$ =	61	54	52	50	51	51	43	39
$\beta \cdot 10^3$ =	396	90	72	65				

Wir sehen, daß β_ϱ ebenfalls immer im Fallen begriffen ist; anfangs ist der Abfall auch ein wenig steiler, aber bei weitem nicht so steil wie bei β, so daß sich also beide Größen, die bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre so weit voneinander liegen, rasch einander nähern und bei einem Drucke um 7,5 m fast gleiche Werte annehmen. Also $n-1/\varrho$,

welches in dem Druckintervalle 0—760 mm rasch steigt, wird weiter mit dem Drucke nicht in demselben Maße wachsen, sondern immer langsamer und langsamer, so daß es, bei Drucken über 3 m anfangend, über das ganze Intervall der nicht allzu hohen Drucke ziemlich gut unveränderlich bleiben wird. Das stimmt mit der Erfahrung überein. Die meisten Arbeiten über die Refraktionskonstanten bewegen sich in den Druckintervallen von 4—40 Atm. und weisen ziemlich einstimmig darauf hin, daß

$$\frac{n-1}{\varrho} \quad \text{ebenso wie} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho}$$

praktisch unveränderlich bleiben. Für sehr hohe Drucke bleibt das Feld noch unerforscht.

Man kann für Drucke bis zu 100 m für die Lorenz-Lorentzsche Konstante mit sehr großer Annäherung setzen

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{\varrho}\frac{2}{2Kp(1+\beta p)+3}.$$

Der Korrektionsfaktor wird die Tendenz haben, das Wachsen der Hauptgröße, welche eben die Newton-Gladstonsche Konstante ist, zu beschwichtigen. Für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist dieser Einfluß natürlich im ganzen unbedeutend, wie es die dritte Spalte der Tab. 5 zeigt, in welcher sich, in gleichem Maße ausgedrückt, die Werte von

$$\frac{3}{2}\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\varrho}$$

befinden. Bei höheren Drucken dagegen wird sich dieser Einfluß schon geltend machen, so daß es auch vorkommen kann, daß $n-1/\varrho$ wohl mit dem Drucke mäßig steigen, die Lorenzsche Konstante aber fallen wird. Das bemerkt man tatsächlich an den Zahlen, die Magri[1]) in seiner bis zu Drucken von 200 Atm. reichenden Arbeit erhalten hat. Da für Drucke von 1—7 Atm. die Differenz $\beta - \beta_\varrho$ immer ziemlich groß bleibt, so kann man erwarten, daß in diesem Druckintervalle die Lorenzsche Konstante besser als die Newtonsche gültig sein wird.

Die hohe Wertdifferenz der Konstanten β und β_ϱ für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist höchst bemerkenswert, und ihre Sicherstellung bildet ein wichtiges Resultat der vor-

1) L. Magri, Physik. Zeitschr. 6. p. 629. 1905.

liegenden Arbeit, ebensogut wie die Feststellung der Tatsache, daß β mit dem Drucke rasch fällt, daß also dn/dp keine lineare Funktion des Druckes sein kann.

Zusammenfassung. — 1. Es war die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die Abhängigkeit der Luftrefraktion vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre zu studieren. Zum Ausdruck dieser Abhängigkeit wurde die Mascartsche Formel $n-1 = Kp(1+\beta p)$ benutzt, und es wurde, indem der Druck in Normalmillimetern Quecksilber gemessen wird, für β die Zahl 0,00000896 gefunden. Es wurde im Lichte der grünen Quecksilberlinie gearbeitet, für welches der Wert der Konstanten K zu $0{,}36138 \cdot 10^{-6}$ und folglich die Refraktion $n-1$ für die Normalbedingungen zu $291{,}67 \cdot 10^{-6}$ bestimmt wurden. Dieser Wert der Refraktion stimmt vollständig mit demjenigen von L. Lorenz überein.

2. Es wurde festgestellt, daß β stark vom Drucke abhängig ist. Im Druckintervalle von 0—8400 mm ist es dem Drucke sehr angenähert umgekehrt proportional, von da ab sinkt es mit steigendem Drucke immer langsamer herab.

3. Bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre wächst die Refraktion $n-1$ mit dem Drucke weit schneller als die Gasdichte ϱ. Von den beiden Refraktionskonstanten von Lorenz-Lorentz und Newton-Gladstone ist also keine in dem betrachteten Druckintervalle gültig; beide wachsen mit dem Drucke.

Die vorliegende Arbeit, der eine weitere Fortsetzung in zwei Richtungen folgen wird, indem einerseits das Druckintervall erweitert, andererseits auch zu anderen Gasen gegriffen werden soll, ist in den Laboratorien des Physikalischen Institutes der böhmischen Universität in Prag ausgeführt worden, und es ist mir eine angenehme Aufgabe, abermals herzlichen Dank dem Institutsdirektor, Hrn. k. k. Hofrat Prof. Dr. V. Strouhal, ebenso wie auch seinem Stellvertreter, Hrn. Prof. Dr. B. Kucera, für all das wohlwollende Entgegenkommen, mit dem mir die Institutsarbeitsmittel zur Verfügung gestellt wurden, zu zollen.

Prag, Juni 1917.

(Eingegangen 17. Oktober 1917.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

V 493